УДК 517+530.1

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ МЕТОДОМ ВАРИАЦИОННЫХ НЕРАВЕНСТВ ДЛЯ ЗНАЧЕНИЙ ЕМКОСТЕЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ КОНДЕНСАТОРОВ

В.П.Казанцев, О.А.Золотов, М.В.Долгополова*

На основе прямого и дуального вариационных принципов с помощью метода обобщенных координат построены решения задачи о емкости цилиндрического конденсатора с подобными и подобно расположенными обкладками. Найдены сходящиеся последовательности оценок сверху и снизу для значения емкости. Эффективность подхода подтверждается примерами.

Емкость цилиндрических конденсаторов с обкладками, образованными подобными и подобно расположенными поверхностями

Эта работа – непосредственное продолжение статьи авторов [1]. Прежде всего заметим, что в рассматриваемом случае неравенства части 1 примут вид

$$\frac{1}{2F} < C < \frac{1}{2F}\left(1+\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f'^2(\theta)d\theta\right). \tag{1}$$

Причем, левое неравенство имеет теперь простую и наглядную интерпретацию, а именно: из него следует, что из всех цилиндрических конденсаторов, внешняя обкладка которых геометрически подобна с некоторым постоянным для всего множества конденсаторов коэффициентом подобия внутренней, минимальной емкостью, рассчитанной на единицу длины, обладает конденсатор, образованный коаксиальными круговыми цилиндрами.

Оценки для значения емкости сверху. Для улучшения неравенств (1) наряду со схемой предыдущего параграфа может быть использована другая, по своей сути аналогичная методу Канторовича [10], однако имеющая свои характерные для рассматриваемого нами класса задач особенности. Подставим в функционал пробную функцию

$$\varphi^{(N)} = \varPhi_0(\lambda) + \sum_{k=1}^{N} T_K(\theta)\varPhi_k(\lambda), \tag{2}$$

где T_k - какие либо N различных функций из тригонометрической системы $\sin n\theta$; $\cos n\theta$, $n = 1,2...$; $\varPhi_0$ и $\varPhi_k$ - пока неопределенные функции λ. После интегрирования по θ найдем

$$\frac{1}{H}W\left(\varphi^{(N)}\right) = \int_0^1 \left(\varPhi_0'^2 + 2\varPhi_0'\vec{a}\cdot\vec{\varPhi}' + 2\varPhi_0'\vec{b}\cdot\vec{\varPhi} + \vec{\varPhi}'\cdot\hat{A}\cdot\vec{\varPhi}' + 2\vec{\varPhi}'\cdot\hat{B}\cdot\vec{\varPhi} + \vec{\varPhi}\cdot\hat{C}\cdot\vec{\varPhi}\right)d\lambda. \tag{3}$$

Штрих здесь обозначает операцию дифференцирования; $\vec{\varPhi}$ - вектор с компонентами $\varPhi_i$;

$$H = \int_0^{2\pi}\sigma_{\lambda\lambda}d\theta;\quad a_i = \frac{1}{H}\int_0^{2\pi}\sigma_{\lambda\lambda}T_i d\theta;\quad b_i = \frac{1}{H}\int_0^{2\pi}\sigma_{\lambda\theta}T_i' d\theta;$$
$$A_{ij} = \frac{1}{H}\int_0^{2\pi}T_i\sigma_{\lambda\lambda}T_j d\theta;\quad B_{ij} = \frac{1}{H}\int_0^{2\pi}T_i\sigma_{\lambda\theta}T_j' d\theta;\quad C_{ij} = \frac{1}{H}\int_0^{2\pi}T_i'\sigma_{\theta\theta}T_j' d\theta. \tag{4}$$

Напомним, что в исследуемом случае

$$\sigma_{\lambda\lambda} = \frac{1}{F}(1+f'^2(\theta));\qquad \sigma_{\lambda\theta} = -f'(\theta);\qquad \sigma_{\theta\theta} = F, \tag{5}$$

а $\exp(f)$ описывает форму кривых, лежащих в сечении конденсатора и изображенных на рисунке. Важно отметить, что, как видно из соотношений (4), (5), $\hat{A},\hat{B}$ и $\hat{C}$ постоянные квадратные матрицы размерности $N\times N$, $\vec{a}$ и $\vec{b}$ - постоянные N - векторы.

Для того чтобы пробная функция (2) удовлетворяла граничным условиям , в которых мы с целью упрощения дальнейших расчетов положим $U = 1$, достаточно потребовать

$$\varPhi_0(0) = 1;\quad \varPhi_0(1) = 0;\quad \vec{\varPhi}(0) = \vec{\varPhi}(1) = 0. \tag{6}$$

Варьируя функционал (3) по $\varPhi_0$ и $\vec{\varPhi}$ при граничных условиях (6), получим первый интеграл

$$\varPhi_0^{/} + \vec{a} \cdot \vec{\varPhi} + \vec{b} \cdot \vec{\varPhi} = p_0 \tag{7}$$

где p_0 - постоянная, и систему уравнений Эйлера-Лагранжа

$$\left(\hat{A} - \vec{a}\vec{a}\right) \cdot \vec{\varPhi}^{//} + \left(\hat{B} - \hat{B}^{+} + \vec{b}\vec{a} - \vec{a}\vec{b}\right) \cdot \vec{\varPhi}^{/} - \left(\hat{C} - \vec{b}\vec{b}\right) \cdot \vec{\varPhi}^{/} = p_0 \vec{b}\,, \tag{8}$$

из которой уже исключено $\varPhi_0^{/}$ с помощью первого интеграла (7), и где два стоящих рядом N - вектора $\vec{g}\vec{h}$ обозначают матрицу с элементами $g_i h_i$. Для пробной функции (2), соответствующей решению уравнений (7), (8), как это нетрудно показать, функционал (3) примет значение

$$W\left(\varphi^{(N)}\right) = H p_0\,. \tag{9}$$

Решение системы дифференциальных уравнений (4-9) представим в форме

$$\vec{\varPhi} = p_0 \vec{d} + \hat{\Sigma}_1 \cdot \exp(\hat{\alpha}\lambda) \cdot \vec{x} + \hat{\Sigma}_2 \cdot \exp(-\hat{\alpha}\lambda) \cdot \vec{y}\,, \tag{10}$$

где

$$\vec{d} = \left(\hat{C} - \vec{b}\vec{b}\right)^{-1} \cdot \vec{b}\,. \tag{11}$$

Матрица $\hat{C} - \vec{b}\vec{b}$ имеет обратную, поскольку она положительно определена. Пока неизвестные векторы $\vec{x}$ и $\vec{y}$ будут найдены из граничных условий. $\hat{\alpha}$ - диагональная матрица, на главной диагонали которой расположены в порядке возрастания их реальной части корни уравнения

$$\det\left[\alpha^2 \left(A - \vec{a}\vec{a}\right) + \alpha\left(\hat{B} - \hat{B}^{+} + \vec{b}\vec{a} - \vec{a}\vec{b}\right) - \hat{C} + \vec{b}\vec{b}\right] = 0\,. \tag{12}$$

Столбцы матрицы $\hat{\Sigma}_1$, обозначим $i^{ый}$ $\vec{\Sigma}_{1i}$, будут решениями уравнений

$$\left[\alpha_i^2 \left(\hat{A} - \vec{a}\vec{a}\right) + \alpha_i\left(\hat{B} - \hat{B}^{+} + \vec{b}\vec{a} - \vec{a}\vec{b}\right) - \hat{C} + \vec{b}\vec{b}\right] \cdot \vec{\Sigma}_{1i} = 0\,. \tag{13}$$

Аналогичный столбец $\vec{\Sigma}_{2i}$ матрицы $\hat{\Sigma}_2$ будет решением уравнения, полученного из (13) заменой в нем α_i на $-\alpha_i$.

Отметим, что уравнение (12) – это алгебраическое уравнение $N^{ой}$ степени относительно α^2. Действительно, замена α на $-\alpha$ в уравнении (12) эквивалентна операции транспонирования заключенной в квадратные скобки матрицы, то есть не приводит к изменению значения определителя, что, в свою очередь возможно, если многочлен (12) зависит лишь от четных степеней α. Весьма вероятно, хотя мы не располагаем доказательством этого факта, однако проверили его на нескольких примерах, что все α^2, являющиеся корнями уравнения (12) положительны, а также однократны. В этом случае

$$\vec{x} = p_0 \hat{\Sigma}_1^{-1} \cdot \left[\exp(\hat{\alpha}_1) - \exp(-\hat{\alpha}_2)\right]^{-1} \cdot \left[\hat{e} - \exp(-\hat{\alpha}_2)\right] \cdot \vec{d}\,; \quad \vec{y} = p_0 \hat{\Sigma}_2^{-1} \cdot \left[\exp(\hat{\alpha}_1) - \exp(-\hat{\alpha}_2)\right]^{-1} \cdot \left[\exp(\hat{\alpha}_1) - \hat{e}\right] \cdot \vec{d}\,;$$

$$p_0^{-1} = 1 + \vec{b} \cdot \vec{d} - 2\vec{b} \cdot \left(\hat{\alpha}_1^{-1} + \hat{\alpha}_2^{-1}\right) \cdot \left[cth\left(\frac{1}{2}\hat{\alpha}_1\right) + cth\left(\frac{1}{2}\hat{\alpha}_2\right)\right]^{-1} \cdot \vec{d}\,;$$

$$\hat{\alpha}_1 = \hat{\Sigma}_1 \cdot \hat{\alpha} \cdot \hat{\Sigma}_1^{-1}\,; \qquad \hat{\alpha}_2 = \hat{\Sigma}_2 \cdot \hat{\alpha} \cdot \hat{\Sigma}_2^{-1}\,. \tag{14}$$

Здесь $\hat{e}$ - единичная матрица. Соотношения (14) завершают построение расчетной схемы оценок сверху. Еще отметим, что зависимость $\hat{\alpha}$ от F сводится к

$$\hat{\alpha} = F\tilde{\hat{\alpha}}\,, \tag{15}$$

где $\tilde{\hat{\alpha}}$ - числовая, не зависящая от F матрица.

Оценки снизу. Вычисление возрастающей последовательности нижних граней проводится аналогичным образом. Пробную функцию $\psi^{(N)}$ выберем в виде

$$\psi^{(N)} = y_0 \Psi(\theta) + \sum_{k=1}^{N} T_k(\theta) \Psi_k(\lambda)\,. \tag{16}$$

Здесь $\Psi(\theta)=\dfrac{\theta}{F}$ соответствует левой части неравенств (1); y_0 - постоянная; $\Psi_k(\lambda)$ - пока неопределенные функции. После подстановки $\psi^{(N)}$ в функционал $\hat{\sigma}$ (22), в котором следует положить $U=1$, и интегрирования по θ найдем

$$L\left(\psi^{(N)}\right)=\frac{2\pi}{F}y_0\left(y_0-2\right)+\int_0^1\left(\vec{\Psi}^{/}\cdot\hat{A}\cdot\vec{\Psi}^{/}+2\vec{\Psi}^{/}\cdot\hat{B}\cdot\vec{\Psi}+\vec{\Psi}\cdot\hat{C}\cdot\vec{\Psi}+2y_0\vec{p}\cdot\vec{\Psi}^{/}\right)d\lambda\,, \quad (17)$$

где постоянные матрицы $\hat{A},\hat{B}$ и $\hat{C}$ определяются по формулам (45) при $H=1$; $\vec{p}$ - вектор с компонентами

$$p_i=\frac{1}{F}\int_0^{2\pi}\sigma_{\theta\lambda}T_i d\theta\,. \quad (18)$$

Варьируя функционал (17) по $\vec{\Psi}$, получим не только систему уравнений Эйлера-Лагранжа

$$\hat{A}\cdot\vec{\Psi}^{//}+\left(\hat{B}-\hat{B}^{+}\right)\cdot\vec{\Psi}^{/}-\hat{C}\cdot\vec{\Psi}=0\,, \quad (19)$$

но и естественные граничные условия

$$\hat{A}\cdot\vec{\Psi}^{/}+\hat{B}\cdot\vec{\Psi}+\vec{p}\Big|_{\lambda=0}=0\,; \qquad \hat{A}\cdot\vec{\Psi}^{/}+\hat{B}\cdot\vec{\Psi}+p\Big|_{\lambda=1}=0\,. \quad (20)$$

Для пробной функции $\psi_0^{(N)}$, соответствующей решению системы уравнений (19) с граничными условиями (20),

$$L\left(\psi_0^{(N)}\right)=\frac{2\pi}{F}y_0\left(y_0-2\right)+y_0\vec{p}\cdot\left[\vec{\Psi}(1)-\vec{\Psi}(0)\right]. \quad (21)$$

Удобно решение уравнения (19) представить в форме

$$\vec{\Psi}=\hat{\Sigma}_1\cdot\exp\left(\hat{\alpha}\lambda\right)\cdot\vec{x}+\hat{\Sigma}_2\cdot\exp\left(-\hat{\alpha}\lambda\right)\cdot\vec{y}\,, \quad (22)$$

где $\hat{\alpha}$ - диагональная матрица, на главной диагонали которой расположены в порядке возрастания их положительной реальной части корни уравнения

$$\det\left[\alpha^2\hat{A}+\alpha\left(\hat{B}-\hat{B}^{+}\right)-\hat{C}\right]=0\,. \quad (23)$$

Столбцы матрицы $\hat{\Sigma}_1$, $\vec{\Sigma}_{1i}$, находятся как решения уравнений

$$\left[\alpha_i^2\hat{A}+\alpha_i\left(\hat{B}-\hat{B}^{+}\right)-\hat{C}\right]\cdot\vec{\Sigma}_{1i}=0 \quad (24)$$

они линейно независимы, поэтому матрица $\hat{\Sigma}_1$ имеет обратную. Столбцы матрицы $\hat{\Sigma}_2$ будут решениями уравнения, получаемого из уравнения (24) заменой α_i на $-\alpha_i$. Матрица $\hat{\Sigma}_2$ также имеет обратную. Постоянные вектора $\vec{x}$ и $\vec{y}$ следует выбрать так, чтобы удовлетворить граничным условиям (20). В случае, когда все являющиеся корнями уравнения (23) α^2 положительны, имеем

$$\vec{x}=-y_0\hat{D}_1^{-1}\cdot\left[\exp\left(\hat{\alpha}_1\right)-\exp\left(-\hat{\alpha}_2\right)\right]^{-1}\cdot\left[\hat{e}-\exp\left(-\hat{\alpha}_2\right)\right]\cdot\vec{p}\,;\quad y=-y_0\hat{D}_2^{-1}\cdot\left[\exp\left(\hat{\alpha}_1\right)-\exp\left(-\hat{\alpha}_2\right)\right]^{-1}\cdot\left[\exp\left(\hat{\alpha}_1\right)-\hat{e}\right]\cdot\vec{p}\,; \quad (25)$$

$$\hat{D}_1=\hat{A}\cdot\hat{\Sigma}_1\hat{\alpha}+\hat{B}\cdot\hat{\Sigma}_1\,;\quad \hat{D}_2=\hat{A}\cdot\hat{\Sigma}_2\cdot\hat{\alpha}-\hat{B}\cdot\hat{\Sigma}_2\,;\quad \hat{\alpha}_1=\hat{D}_1\cdot\hat{\alpha}\cdot\hat{D}_1^{-1}\,;\quad \hat{\alpha}_2=\hat{D}_2\cdot\alpha\cdot\hat{D}_2^{-1}\,;$$

$$L\left(\psi_0^{(N)}\right)=\frac{2\pi}{F}y_0\left(y_0-2\right)-2y_0^2\vec{p}\cdot\left(\hat{\Sigma}_1\cdot\hat{D}_1^{-1}+\hat{\Sigma}_2\cdot\hat{D}_2^{-1}\right)\cdot\left[cth\left(\frac{\hat{\alpha}_1}{2}\right)+cth\left(\frac{\hat{\alpha}_2}{2}\right)\right]^{-1}\cdot\vec{p}=\frac{2\pi}{F}y_0\left(y_0-2\right)-2Ky_0^2. \quad (26)$$

После проведения минимизации $L\left(\psi_0^{(N)}\right)$ (26) по y_0 находим

$$L\left(\psi_0^{(N)}\right)=-\frac{2\pi^2}{F\left(\pi-KF\right)}\,. \quad (27)$$

Отметим также, что и здесь зависимость $\hat{\alpha}$ от F имеет вид (15).

Удобно в неравенствах для емкости $-L\left(\psi_0^{(N)}\right) \le 4\pi C \le W\left(\varphi_0^{(N)}\right)$ выделить зависимость от F. Как показывает анализ соотношений (14) и (26) $-L\left(\psi_0^{(N)}\right)$ и $W\left(\varphi_0^{(N)}\right)$ могут быть представлены единообразно, например,

$$C \ge -\frac{1}{4\pi} L\left(\psi_0^{(N)}\right) = \frac{1}{2}\left\{F - \frac{P_{N-1}(z_k)}{P_N(z_k)}\right\}^{-1} \tag{28}$$

где $P_n(z_k)$ $(n = N-1, N)$ обозначен однородный многочлен степени n от $z_k = cth\left(\frac{\tilde{\alpha}_k F}{2}\right)$, причем коэффициенты этих многочленов уже не зависят от F; $\tilde{\alpha}_k$ $(k = 1,2,...N)$ - отнесенные к F корни уравнения (64). Аналогичное представление допускают и оценки сверху. В частности при $N = 1$

$$\left[2F - b_i th\left(\frac{\tilde{\alpha}_i F}{2}\right)\right]^{-1} < C < \left[a_S F - b_S th\left(\frac{\tilde{\alpha}_S F}{2}\right)\right]^{-1}. \tag{29}$$

Проиллюстрируем проведенные расчеты приложением неравенств (29) к задаче о емкости цилиндрического конденсатора, форма обкладок которого определяется кривой, представимой в декартовой системе координат уравнением

$$x^4 + y^4 = a^4$$

что соответствует уравнениям изображенных на рисунке кривых в полярных координатах

$$f_1(\theta) = \frac{a}{\left(\cos^4\theta + \sin^4\theta\right)^{\frac{1}{4}}}; \qquad f_2(\theta) = \exp(F) f_1(\theta).$$

Отсюда находим вполне определяющую матричные элементы тензора $\hat{\sigma}$ функцию

$$f^{/}(\theta) = \left(\ln f_1\right)^{/} = \frac{\sin 4\theta}{3 + \cos 4\theta}.$$

Числовые значения входящих в неравенства (70) параметров, полученные по формулам настоящего параграфа, приведены в табл.1.

Таблица 1

b_i	$\tilde{\alpha}_i$	a_S	b_S	$\tilde{\alpha}_S$
$5{,}64802 \cdot 10^{-2}$	3,83428	1,99643	$5{,}79410 \cdot 10^{-2}$	3,82516

Отметим, что расчет приходящейся на единицу длины емкости такого конденсатора может быть проведен согласно неравенствам (29) с погрешностью $\Delta \le 0{,}16\%$ во всем интервале изменения $0 < F < \infty$. Что касается приближения действительного распределения напряженности электрического поля пробными, то относительная средняя квадратичная погрешность здесь не превышает 4%. Таким образом, в рассмотренном примере довольно простые и аналитические по параметру F вариационные неравенства оказываются весьма эффективными.

Емкость конденсатора, обкладками которого служат подобные относительно центральной оси эллиптические цилиндры

Чтобы применить развитую в предыдущем разделе схему вариационных оценок к рассматриваемой здесь задаче, удобно в представленном в декартовой системе координат функционале энергии провести замену переменных

$$x = ae^{\lambda}\cos\theta; \quad 0 \le \theta \le 2\pi; \qquad y = be^{\lambda}\sin\theta; \quad 0 \le \lambda \le F, \tag{30}$$

где a и b - длины полуосей эллипса – сечение внутренней обкладки конденсатора плоскостью, перпендикулярной образующей обкладки.

После проведения необходимых преобразований найдем

$$\sigma_{\lambda\lambda} = \frac{1 + \varepsilon\cos 2\theta}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}; \quad \sigma_{\lambda\theta} = -\frac{\varepsilon}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}\sin 2\theta; \quad \sigma_{\theta\theta} = \frac{1 - \varepsilon\cos 2\theta}{\sqrt{1-\varepsilon^2}} \tag{31}$$

$$\varepsilon = \frac{b^2 - a^2}{b^2 + a^2}.$$

Симметрия области позволяет выбрать пробную функцию в виде

$$\varphi^{(N)}(\lambda,\theta) = \Phi_0(\lambda) + \sum_{k=1}^{N} \Phi_k(\lambda)\cos(2k\theta). \tag{32}$$

Процесс минимизации функционала энергии проводится так же, как и в предыдущем разделе, принимая во внимание, что

$$H = \frac{2\pi}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}; \quad a_k = \frac{\varepsilon}{2}\delta_{k_1}; \quad b_k = \varepsilon\delta_{k_i}; \quad A_{ij} = \frac{1}{2}\delta_{ij} + \frac{\varepsilon}{4}\left(\delta_{ij+1} + \delta_{ij-1}\right); \quad B_{ij} = \frac{\varepsilon}{2} j\left(\delta_{ij-1} - \delta_{ij+1}\right);$$
$$C_{ij} = 2ij\delta_{ij} - \varepsilon ij\left(\delta_{ij+1} + \delta_{ij-1}\right). \tag{33}$$

Простейшая оценка будет соответствовать $N = 0$

$$C < \frac{1}{2F\sqrt{1-\varepsilon^2}}.$$

Более точную оценку получим при $N = 1$

$$C < \frac{1}{2\sqrt{1-\varepsilon^2}}\left(\frac{2}{2-\varepsilon^2}F - \frac{\varepsilon^2}{2-\varepsilon^2}thF\right)^{-1}.$$

Еще более точную оценку имеем, когда $N = 2$,

$$C < \frac{1}{2\sqrt{1-\varepsilon^2}}\left(\frac{4-\varepsilon^2}{4-3\varepsilon^2}F - \frac{\varepsilon^2}{2\left(4-3\varepsilon^2\right)} \frac{8cth(2F) - 3\varepsilon^2 cth(F)}{\left(2-\varepsilon^2\right)cth(F)cth(2F) - \varepsilon^2\left(cth(F) - cth(2F)\right)^2}\right)^{-1} \tag{34}$$

Разумеется процесс уточнения оценок может быть продолжен. При больших N следует использовать ЭВМ.

Последовательность оценок снизу для емкости конденсатора найдем, выбирая нормированный на единичный заряд внутренней обкладки векторный потенциал

$$\psi^{(N)}(\lambda,\theta) = \frac{1}{2\pi} arctg\left(\sqrt{\frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}}tg\theta\right) + \sum_{i=1}^{N}\psi_i(\lambda)\sin 2i\theta \tag{35}$$

и переходя к функционалу

$$W\left(\psi^{(N)}\right) = W(\psi_0) + \int_0^F \left(\vec{\psi}'\cdot\hat{A}\cdot\vec{\psi}' + 2\vec{\psi}'\cdot\hat{B}\cdot\vec{\psi} + \vec{\psi}\cdot\hat{C}\cdot\vec{\psi} + 2\vec{a}\cdot\vec{\psi}'\right)d\lambda, \tag{36}$$

в котором

$$W(\psi_0) = \frac{F}{2\pi}; \qquad a_i = -\left(\frac{\varepsilon}{1+\sqrt{1-\varepsilon^2}}\right)^i; \qquad A_{ij} = \frac{\pi}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}\left(\delta_{ij} + \frac{\varepsilon}{2}\left(\delta_{ij+1} + \delta_{ij-1}\right)\right);$$
$$B_{ij} = -\frac{\pi\varepsilon}{\sqrt{1-\varepsilon^2}} j\left(\delta_{ij+1} - \delta_{ij-1}\right); \qquad C_{ij} = \frac{\pi}{\sqrt{1-\varepsilon^2}} 4ij\left(\delta_{ij} - \frac{\varepsilon}{2}\left(\delta_{ij+1} + \delta_{ij-1}\right)\right). \tag{37}$$

Минимизацию функционала $W\left(\psi^{(N)}\right)$ можно провести с помощью соотношений (19) – (25), заменяя в них $y_0 p$ на $\vec{a}$. Окончательный результат минимизации вместо формулы (26) будет представлен как

$$W\left(\psi_0^{(N)}\right) = W(\psi_0) - 2\vec{a}\cdot\left(\hat{\Sigma}_1\cdot\hat{D}_1^{-1} + \hat{\Sigma}_2\cdot D_2^{-1}\right)\cdot\left(cth\left(\frac{\hat{\alpha}_1 F}{2}\right) + cth\left(\frac{\hat{\alpha}_2 F}{2}\right)\right)^{-1}\cdot\vec{a} \tag{38}$$

Оценки для емкости снизу будут определять неравенство

$$C > \frac{1}{4\pi W\left(\psi_0^{(N)}\right)}. \tag{39}$$

В частности, более точным по сравнению с простейшей оценкой снизу (1) будет неравенство

$$C > \frac{1}{2}\left(F - \frac{2\varepsilon^2\sqrt{1-\varepsilon^2}}{\left(1+\sqrt{1-\varepsilon^2}\right)^2} thF \right)^{-1}, \tag{40}$$

отвечающее $N = 1$. Еще более точное выражение получаем при $N = 2$

$$C > \frac{1}{2}\left(F - a\frac{b\, cth2F + c\, cthF}{cthF\, cth2F - d\left(cthF - cth2F\right)^2} \right)^{-1}, \tag{41}$$

где

$$a = \frac{\varepsilon^2\sqrt{1-\varepsilon^2}\left(4-\varepsilon^2\right)}{2\left(2-\varepsilon^2\right)\left(1+\sqrt{1-\varepsilon^2}\right)^2}; \qquad b = 2\left(1 + \frac{2\varepsilon^2}{\left(2-\varepsilon^2\right)\left(1+\sqrt{1-\varepsilon^2}\right)} \right);$$

$$c = \frac{\varepsilon^2}{1+\sqrt{1-\varepsilon^2}}\left(\frac{1}{1+\sqrt{1-\varepsilon^2}} - \frac{4}{2-\varepsilon^2} \right); \qquad d = \frac{2\varepsilon^2}{\left(2-\varepsilon^2\right)^2}.$$

Точность оценок значений емкости, очевидно, должна зависеть при фиксированном N от ε и F. В табл. 2 приведены значения оценок снизу C_i и сверху C_S, отвечающие значению $N = 2$, а также максимальная величина погрешности оценок Δ для нескольких значений F и двух значений $\frac{b}{a}$. Как видно из таблицы, полученные аналитические оценки для небольших значений N могут быть достаточно точными для эллиптических обкладок с эксцентриситетами не слишком близкими к 1. Разумеется, предложенный здесь метод позволяет находить оценки с требуемой точностью, однако для этого необходимо использовать ЭВМ.

Таблица 2

	F	0,1	0,3	0,5	1	3	5	10
$\frac{b}{a}=\frac{1}{2}$	C_S	6,225	2,062	1,224	0,5906	0,1790	0,1043	0,05106
	C_S	6,245	2,069	1,228	0,5928	0,1795	0,1046	0,05121
	Δ	0,16%	0,189%	0,19%	0,19%	0,14%	0,14%	0,14%
$\frac{b}{a}=\frac{3}{10}$	C_i	8,465	2,751	1,598	0,7385	0,1968	0,1102	0,05243
	C_S	9,062	2,969	1,734	0,7958	0,2079	0,1161	0,05514
	Δ	3,4%	3,8%	4,1%	3,7%	2,7%	2,6%	2,5%

Отметим, что в статье [2] с помощью предложенного в работах [3,4] аппарата характеристических мультиполей развит метод получения оценок снизу для емкости цилиндрических конденсаторов. В частности, для рассматриваемой здесь задачи в [2] было найдено неравенство

$$C > \frac{1}{2}(\ln\Lambda - \frac{\left(\Lambda^2-1\right)\left(\delta-1\right)^2}{\left(\Lambda^2+1\right)\left(\delta^2+1\right)} - \frac{\left(\Lambda^2-1\right)^6}{64\left(\Lambda^2+1\right)^2}(4\left(\Lambda^8-1\right)\left(1+\frac{(\delta+1)^4}{(\delta-1)^4}\right) - \frac{2\left(\Lambda^2-1\right)\left(\Lambda^8-\Lambda^4+1\right)}{\Lambda^4\left(\Lambda^2+1\right)}(\frac{(\delta+1)^2}{(\delta-1)^2}+1))^{-1})^{-1}, \tag{42}$$

в котором $\Lambda = e^F$; $\delta = \frac{a}{b}$. При некоторых значениях параметров F и ε это неравенство существенно улучшает оценки снизу по сравнению с неравенством (41). Так при $F = 0{,}5$ и $\delta = {}^{10}\!/_{3}$ вместо приведенного в табл.2 значения оценки снизу 1, 598 с помощью неравенства (42) находим оценку 1,730.

Заключение

Здесь с помощью перехода к неортогональной криволинейной системе координат были рассмотрены, конечно, в самых общих чертах вариационные схемы решения задачи о емкости цилиндрических конденсаторов. Приложение этих схем к практическим задачам потребует их дальнейшей детальной разработки. Однако уже сейчас нетрудно построить аналогичные приведенной выше таблицы, позволяющие оценивать значения емкостей конденсаторов различных профилей. Как показывают рассмотренные примеры, такие оценки могут быть вполне удовлетворительными. Нельзя также не указать на то обстоятельство, что вариационные неравенства наиболее соответствуют практическим потребностям, ибо вычисления последовательностей оценок всегда можно остановить, как только будет достигнута необходимая точность.

Необходимо подчеркнуть, что главным результатом работы все же представляются не конкретные оценки, а общая вариационная схема, основанная на органически связанном с вариационными принципами методе обобщенных координат. Думается, что эта схема будет основной и для других классов задач электростатики, то есть окажется фундаментом для построения электростатики по типу аналитической механики.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Докажем отсутствие чисто мнимых корней α_i уравнения

$$(\hat{A}\alpha_i^2 + \hat{B}\alpha_i - \hat{C}) \bullet \vec{\Sigma}_i = \vec{0}, \tag{1}$$

где $\vec{\Sigma}_i$ - собственный вектор уравнения (1).

Предположим, что α_i и $\vec{\Sigma}_i$ - комплексные. Если умножить (1) слева на комплексно-сопряженный вектор-строку $\tilde{\vec{\Sigma}}_i^*$, то получим скалярное уравнение

$$a\alpha_i^2 + ib\alpha_i - c = 0 \tag{2}$$

где в силу положительной определенности матрицы $\hat{A}$, неотрицательности $\hat{C}$ и антисимметричности $\hat{B}$:

$$a = \tilde{\vec{\Sigma}}_i^* \bullet \hat{A} \bullet \vec{\Sigma}_i > 0, \quad c = \tilde{\vec{\Sigma}}_i^* \bullet \hat{C} \bullet \vec{\Sigma}_i \ge 0,$$
$$b = \mathrm{Im}(\tilde{\vec{\Sigma}}_i^* \bullet \hat{B} \bullet \vec{\Sigma}_i), \mathrm{Re}(\tilde{\vec{\Sigma}}_i^* \bullet \hat{B} \bullet \vec{\Sigma}_i) = 0. \tag{3}$$

Тогда решение квадратного уравнения (2)

$$\alpha_i = \frac{-ib \pm \sqrt{D}}{2a}, D = 4ac - b^2 \tag{4}$$

имеет ненулевую действительную часть, если $D > 0$.

Дискриминант D можно представить в виде определителя матрицы

$$4\begin{pmatrix} a & b/2 \\ -b/2 & c \end{pmatrix}, \tag{5}$$

которую, в свою очередь, можно представить как

$$4\begin{pmatrix} \tilde{\vec{\Sigma}}_i^* & \tilde{\vec{\Sigma}}_i^* \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} \hat{A} & \hat{B}/2 \\ \tilde{\hat{B}}/2 & \hat{C} \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} \vec{\Sigma}_i \\ \vec{\Sigma}_i \end{pmatrix}, \tag{6}$$

где «~» означает операцию транспонирования.

Если теперь записать лагранжиан в виде

$$\begin{pmatrix} \tilde{\vec{\psi}}' & \tilde{\vec{\psi}} \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} \hat{A} & \hat{B}/2 \\ \tilde{\hat{B}}/2 & \hat{C} \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} \vec{\psi}' \\ \vec{\psi} \end{pmatrix}, \tag{7}$$

то из положительной определенности функционала будет следовать и неотрицательность рассматриваемой матрицы. Анализ структуры матрицы $\hat{C}$ показывает, что она имеет единственный нулевой корень, который соответствует вырожденному (линейному) решению $\alpha_0 = 0$. Для остальных α_i $\tilde{\vec{\Sigma}}_i^* \bullet \hat{C} \bullet \vec{\Sigma}_i > 0$ и, таким образом, все эти корни имеют ненулевую действительную часть.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Казанцев В.П. Вариационные неравенства для значений емкостей цилиндрических конденсаторов/ В.П.Казанцев, О.А.Золотов, М.В.Долгополова// Вестник КрасГУ.- 2004.
2. Казанцев В.П. Понятия о высших поляризуемостях уединенных проводников в плоских задачах электростатики/ В.П.Казанцев// Деп. в ВИНИТИ.- 1997.- Красноярск.- Часть2.- № 3324.- В.97.- С.52.
3. Казанцев В.П. Вариационный принцип и высшие поляризуемости уединенных проводников в плоских задачах электростатики/ В.П.Казанцев// ДАН.- 1998.- Т.361.- № 4.- С.469-473.
4. Казанцев В.П. Характеристические мультиполи и вариационные оценки емкости цилиндрических конденсаторов/ В.П.Казанцев// ДАН.- 2000.- Т.373.- №1.-С.29-32.

VARIATIONAL INEQUALITIES OF CAPACITIES OF CYLINDRICAL CONDENSER

V.P.Kazantsev, O.A.Zolotov, M.V.Dolgopolova

On the basis of direct and dual variational principles with the help of the method of extended coordinates the solutions of the problem about capacity of cylindrical condenser with similar and similarly disposed envelopes were made. Convergent sequences of bounds upper and lower for capacities were found. Efficiency of the approach was confirmed by examples.