УДК 336.781.3:62-50

СТОХАСТИЧЕСКОЕ ДОМИНИРОВАНИЕ I И II РОДА

Т.С. Варочкина, А.А. Новоселов*

Одной из основных проблем в теории риска является принятие решений в условиях неопределенности. Под принятием решений понимается выбор наилучшего вероятностного распределения. Стохастическое доминирование – один из методов для решения такого рода задач. Иногда, когда значения случайной величины интерпретируются как доходы, применимо стохастическое доминирование I рода. Когда же значения случайной величины интерпретируются как расходы, то возможно применение стохастического доминирования II рода. В работе исследуются свойства этого отношения порядка, а также некоторые соотношения между доминированием разных порядков.

1. Определения и обозначения

Пусть задано вероятностное пространство (**R, B, P**), где **R** – множество вещественных чисел, **B** – борелевская сигма-алгебра, **P** – вероятностная мера на **B**. Пусть **P** – множество вероятностных распределений на измеримом пространстве (**R,B**). Тогда функцию распределения, соответствующую $P \in \mathbf{P}$, будем обозначать $F_P(x) = \mathbf{P}((-\infty, x])$, а дополнительную функцию распределения $S_P(x) = 1 - F_P(x) = \mathbf{P}((x, \infty))$.

Определение 1. Пусть $P, G \in \mathbf{P}$. Имеет место стохастическое доминирование1-го порядка I рода:

$$P \leq_{1,I} G, \tag{1}$$

если

$$F_P(x) \geq F_G(x), x \in \mathrm{R}.$$

Имеет место стохастическое доминирование k-го порядка I рода, $P \leq_{k,I} G$, если

$$F_P^{(k)}(x) \geq F_G^{(k)}(x), x \in \mathrm{R},$$

где $F_P^{(k)}(x) = \int_{-\infty}^{x} F_P^{(k-1)}(t)dt, k = 2,3...$

Определение 2. Пусть $P, G \in \mathbf{P}$. Имеет место стохастическое доминирование1-го порядка II рода:

$$P \leq_{1,II} G, \tag{2}$$

если

$$S_P(x) \leq S_G(x), x \in \mathrm{R}.$$

Имеет место стохастическое доминирование k-го порядка I рода, $P \leq_{k,I} G$, если

---

* ©Т.С. Варочкина, Красноярский государственный университет, 2004. e-mail: yurikon@rol.ru;
А.А. Новоселов, Институт вычислительного моделирования СО РАН, 2004.

$$S_P^{(k)}(x) \le S_G^{(k)}(x)\,,\, x\in \mathrm{R}\,,$$

где $S_P^{(k)}(x) = \int\limits_x^{\infty} S_P^{(k-1)}(t)dt, k = 2,3...$

Замечание: формулы (1) и (2) эквивалентны.

2. Условие существования $F_P^{(k+1)}(x)$ и $S_P^{(k+1)}(x)$

Утверждение. Пусть X – случайная величина с функцией распределения $P\in \mathbf{P}$. Если $E|X^k| < \infty$, то $F_P^{(k+1)}(x)$ и $S_P^{(k+1)}(x)$ определены.

Доказательство. Так как в доказательстве речь пойдет об одной функции распределения, то в записи F_P и S_P опустим нижний индекс P. Рассмотрим случай, когда k - четное.

$$EX^k = \int\limits_{-\infty}^{\infty} t^k dF(t) = \int\limits_{-\infty}^{0} t^k dF(t) + \int\limits_{0}^{\infty} t^k dF(t) = t^k \quad F(t)\Big|_{-\infty}^{0} - \int\limits_{-\infty}^{0} F(t)dt^k + \int\limits_{0}^{\infty} t^k dF(t) =$$

$$=\text{(используя (4))}= - \int\limits_{-\infty}^{0} F(t)dt^k + \int\limits_{0}^{\infty} t^k dF(t) =\text{(используя (5))}=$$

$$= - \int\limits_{-\infty}^{0} F(t)dt^k + \int\limits_{0}^{\infty} S(t)dt^k =\text{(используя (6))}= k!\int\limits_{-\infty}^{0} F^{(k)}(t)dt + k!\int\limits_{0}^{\infty} S^{(k)}(t)dt. \tag{3}$$

Покажем, что

$$t^k F(t)\Big|_{-\infty}^{0} = 0 \text{ и } t^k(1-F(t))\Big|_0^{\infty} = 0\,. \tag{4}$$

Так как

$$\int\limits_{-\infty}^{0} t^k t dF(t) + \int\limits_{-0}^{\infty} t^k dF(t) < \infty\,,$$

то каждое слагаемое конечно. При этом

$$\lim_{A\to\infty} \int\limits_{-\infty}^{A} t^k dF(t) = 0,\ \lim_{B\to\infty} \int\limits_{B}^{\infty} t^k dF(t) = 0.$$

Кроме того,

$$\int\limits_{-\infty}^{A} t^k dF(t) \le A^k \int\limits_{-\infty}^{A} dF(t) = A^k F(A) \le 0, \text{ когда } k \text{ нечетное,}$$

$$\int\limits_{-\infty}^{A} t^k dF(t) \ge A^k \int\limits_{-\infty}^{A} dF(t) = A^k F(A) \ge 0, \text{ когда } k \text{ четное.}$$

$$\int\limits_{B}^{\infty} t^k dF(t) \ge B^k \int\limits_{B}^{\infty} dF(t) = B^k(1-F(B)) \ge 0.$$

$$\int\limits_{0}^{\infty} t^k dF(t) = -\int\limits_{0}^{\infty} t^k d(1-F(t)) = -t^k(1-F(t))\Big|_0^{\infty} + \int\limits_{0}^{\infty} (1-F(t))dt^k = \text{(используя (4))}=$$

$$= -\lim_{t\to\infty} t^k(1-F(t)) + \int\limits_{0}^{\infty}(1-F(t))dt^k = \int\limits_{0}^{\infty} S(t)dt^k\,. \tag{5}$$

$$-\int\limits_{-\infty}^{0} F(t)dt^k = -k\int\limits_{-\infty}^{0} t^{k-1}d\int\limits_{-\infty}^{t} F(u)du = -k\int\limits_{-\infty}^{0} t^{k-1}dF^2(t) = -kt^{k-1}F^2(t)\Big|_{-\infty}^{0} + k\int\limits_{-\infty}^{0} F^2(t)dt^{k-1} =$$

$$= k\int\limits_{-\infty}^{0} F^2(t)dt^{k-1} = k(k-1)\int\limits_{-\infty}^{0} t^{k-2}d\int\limits_{-\infty}^{t} F^2(u)du = k(k-1)\int\limits_{-\infty}^{0} t^{k-2}dF^3(t) = \ldots$$

$$=\text{продифференцировав } k \text{ раз} = k!\int\limits_{-\infty}^{0} t^0 dF^{k+1}(t) = k!\int\limits_{-\infty}^{0} F^{(k)}(t)dt \qquad (6)$$

Пользуясь аналогичными рассуждениями, получаем, что

$$\int\limits_{0}^{\infty} S(t)dt^k = \int\limits_{0}^{\infty} S^{(k)}(t)dt.$$

Итак,

$$E\left|X^k\right| = k!\int\limits_{-\infty}^{0} F^{(k)}(t)dt + k!\int\limits_{0}^{\infty} S^{(k)}(t)dt.$$

Если $E\left|X^k\right| < \infty$, то каждое слагаемое конечно.

Следовательно, $F_P^{(k+1)}(x)$ и $S_P^{(k+1)}(x)$ определены. Заметим, что в случае, когда k нечетно, доказательство аналогичное.

Предположение. Будем иметь дело с распределениями, все моменты которых конечны. Обозначим $\tilde{\mathbf{P}}$ – множество таких распределений. Уместно предположить, что распределения как в определениях 1 и 2, так и в рассмотренных далее примерах будут принадлежать множеству $\tilde{\mathbf{P}}$.

3. Пример существования стохастического доминирования для пары распределений

Рассмотрим пару распределений:

Распределение G

X	0	1
P	0	1

Распределение P

Y	0	2
P	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

Из определения следует, что доминирования 1-го порядка не существует. Покажем существование второго.

Так как разность $F_G^2 - F_P^2 \le 0$, то $G \ge_{I,2} P$, то есть имеет место доминирование 2-го порядка I рода (рис. 1).

Доминирование 2-го порядка II рода $G \ge_{II,2} P$ не существует, так как $S_P^2 - S_G^2 \ge 0$. Попробуем теперь "пошевелить" P-распределение. "Отодвинем" грань F_P сначала на ε влево, затем на ε вправо (рис. 2).

Таким образом, при изменении F_P на ε влево доминирование 2-го порядка I рода сохраняется (рис. 3), а при изменении F_P на ε вправо – исчезает (рис 4).

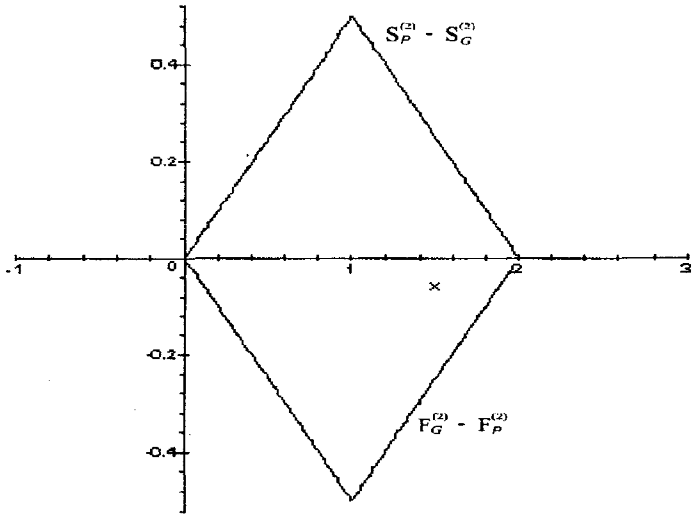

Рис. 1. Разность функций $F_G^{(2)}$ ***и*** $F_P^{(2)}$, $S_G^{(2)}$ ***и*** $S_P^{(2)}$

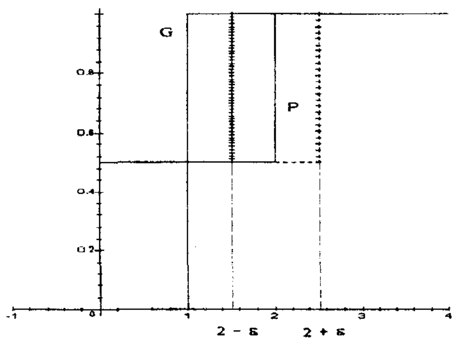

Рис. 2. Функции распределений G ***и*** P

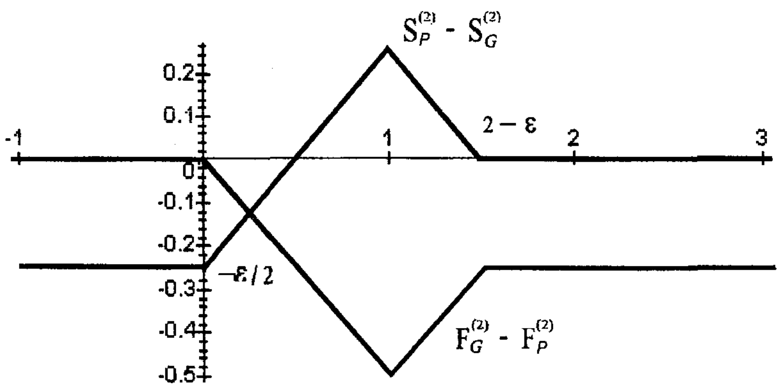

Рис. 3. Разность функций $F_G^{(2)}$ ***и*** $F_P^{(2)}$, $S_G^{(2)}$ ***и*** $S_P^{(2)}$ ***при сдвиге*** F_P ***на ε влево***

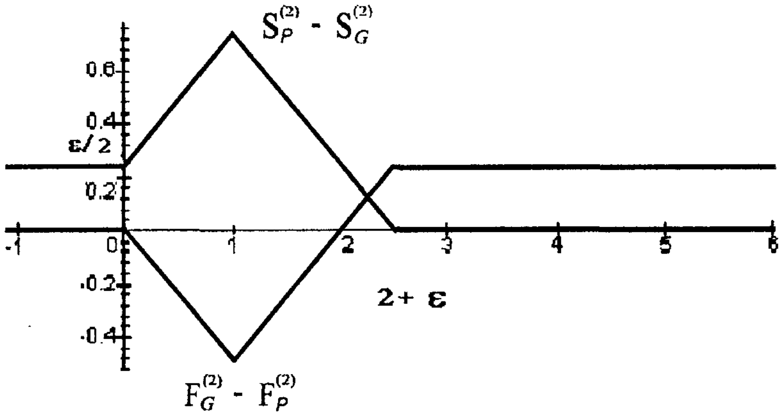

Рис. 4. Разность функций $F_G^{(2)}$ и $F_P^{(2)}$, $S_G^{(2)}$ и $S_P^{(2)}$ при сдвиге F_P на ε вправо

4. Соотношения между доминированием разных порядков

Покажем, что из существования доминирования I рода $k-1$ порядка следует доминирование порядка k.

$$P \le_{(k-1)} G \Rightarrow F_P^{(k-1)}(x) \ge F_G^{(k-1)}(x) \Rightarrow \int_{-\infty}^{x} F_P^{(k-1)}(t)dt \ge \int_{-\infty}^{x} F_G^{(k-1)}(t)dt \Rightarrow$$
$$\Rightarrow F_P^{(k)}(x) \ge F_G^{(k)}(x) \Rightarrow P \le_k G.$$

Аналогично показывается, что из существования доминирования II рода $k-1$ порядка следует доминирование порядка k.

Таким образом, если мы будем рассматривать стохастическое доминирование только одного рода, то выполняется следующее соотношение:

$$P \le_1 G \Rightarrow P \le_2 G \Rightarrow P \le_3 G \Rightarrow \dots$$

На рис. 5 проиллюстрировано данное соотношение.

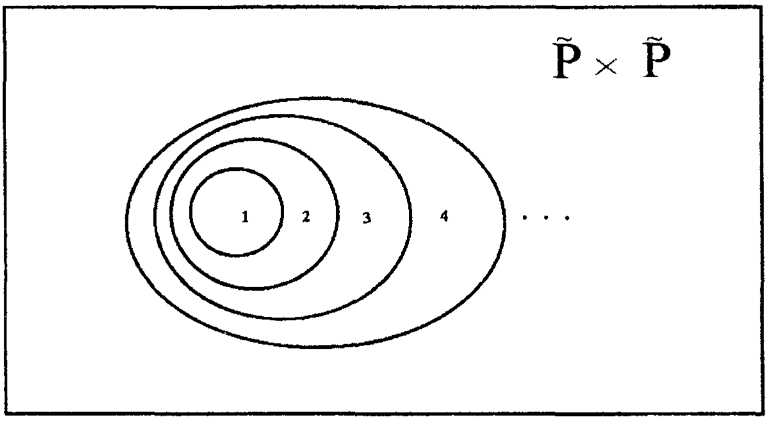

Рис. 5. Соотношения между доминированием разных порядков

Попробуем видоизменить эту картинку для стохастического доминирования I и II рода. Для начала рассмотрим случай, когда $k = 2$ (рис.6).

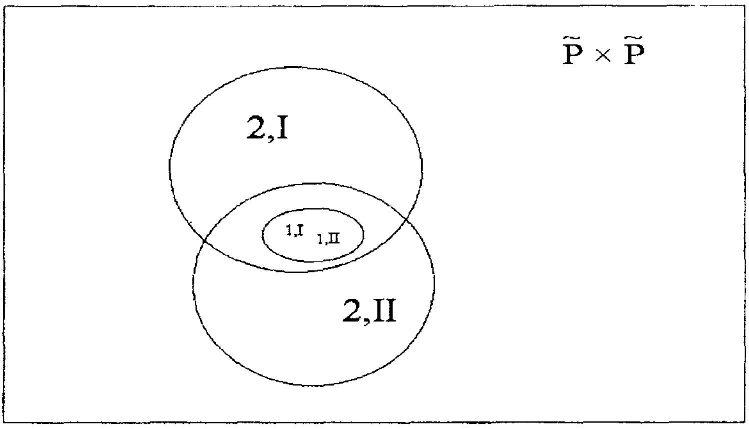

Рис. 6. Соотношение между доминированием I и II рода при $k = 2$

Отметим, что для пары распределений P и G возможен случай, когда существует стохастическое доминирование 2-го порядка I и II рода, хотя доминирование 1-го порядка отсутствует. Проиллюстрируем это на примере.

Распределение P

X	2	3
P	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

Распределение G

Y	0	2.5
P	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$

В данном случае $P \geq_{I,2} G$ и $P \geq_{II,2} G$, хотя доминирования первого порядка ни первого, ни второго рода не существует (рис. 7).

Покажем соотношения между доминированием I и II рода для произвольного k. Пара распределений может быть связана отношением стохастического доминирования только I или только II рода порядка k, также возможны случаи, когда доминирование I и II рода для пары распределений существует одновременно.

Рис 7. Разность функций $F_G^{(2)}$ ***и*** $F_P^{(2)}$, $S_G^{(2)}$ ***и*** $S_P^{(2)}$

Для произвольного k соотношение между доминированием разных порядков будет выглядеть следующим образом (рис. 8).

В работе было рассмотрено стохастическое доминирование I и II рода k-го порядка. Выявлены соотношения между доминированием разных порядков для одного рода, а также некоторые соотношения между доминированием I и II рода.

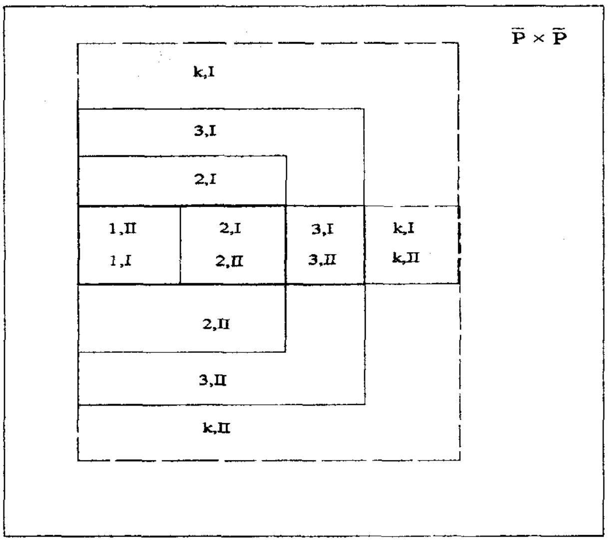

Рис. 8. Соотношения между доминированием I и II рода при произвольном k

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Новоселов А.А. Математическое моделирование финансовых рисков: теория измерения / А.А. Новоселов – Новосибирск: Наука, 2001.– 102 с.
2. Wang S. Premium calculation by transforming the layer premium density / S. Wang // ASTIN Bulletin, 26, 1996. – pp. 71-92.

STOCHASTIC DOMINANCE I AND II KINDS

T.S. Varochkina, A.A. Novosyolov

One of the main problems in the theory of risk is the decision making in conditions of uncertainty. Decision making is understood as selection of the best probabilistic distribution. The stochastic dominance is one of methods for such solution of problems. In some cases, when the values of a random variable are interpreted as the incomes the stochastic dominance I kinds is applicable. When the values of a random variable are interpreted as the consumptions, applying stochastic dominance II kinds is possible. In activity the properties of this order relation, and also some ratio between dominance of the miscellaneous orders are studied.