УДК 533.6.011.72

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ МОДЕЛЬ ПРОНИКНОВЕНИЯ СКАЧКА В СДВИГОВЫЙ СЛОЙ

А. Л. Адрианов*

Предложена эффективная модель взаимодействия скачка уплотнения со сдвиговым слоем. Скачок схематизирован поверхностью сильного газодинамического разрыва, на которой выполняются обычные и дифференциальные условия, учитывающие малые вязкость и теплопроводность среды. Получено аналитическое (в расширенном смысле) решение задачи проникновения скачка в сдвиговый слой, сводящееся к построению численного решения задачи Коши для жесткой системы ОДУ. Вычислительным путем показано, что в зависимости от интенсивности падающего скачка и числа Рейнольдса для возмущенного течения в слое возможно существование двух различных режимов: автомодельного (работает газодинамическое приближение) и диффузионного (малые интенсивность скачка и число Рейнольдса).

В настоящей работе продолжены исследования 1–3 взаимодействия скачка уплотнения (СУ) со сдвиговым слоем (СС) на основе оригинальной математической модели 3, приближённо учитывающей действие сил вязкости и механизма теплопроводности при больших числах Рейнольдса. Существенно, что данная математическая модель и вычислительный алгоритм предполагают явное выделение СУ, схематизируемого поверхностью сильного газодинамического разрыва 4,5.

Схематично (дискретно) – для невязкого случая – процесс проникновения СУ малой интенсивности в непрерывный модельный СС (взята сверхзвуковая часть пограничного слоя (ПС)) представлен в физической плоскости на рис. 1, *а*. Здесь *1...3* – основные элементы рефракции скачка, *4* – догоняющие возмущения, несущие тот или иной краевой эффект 1, а τ и $\hat{\tau}$ - одна и та же линия тока до скачка и за скачком уплотнения, являющаяся вырожденным (искусственным; его интенсивность обратно пропорциональна количеству разбиений) тангенциальным разрывом. На рис. 1, *б*, с большей степенью схематизации (исключен краевой эффект *4*, рис. 1, *а*), дискретно представлена динамика этого же процесса в сверхзвуковой его части в плоскости поляр 6,4 в координатах (β, Λ=ln(J)), где β – угол преломления вектора скорости на СУ, а $J = \hat{p}/p$ – его интенсивность. Поляры *1,2* на рис. 1, *б* соответствуют двум соседним линиям тока (рис. 1, *а*) невозмущенного течения с малым различием (в силу непрерывности профиля параметров в СС) чисел Маха, а поляра *3* — линии тока за падающим СУ (числу Маха $\hat{M}$).

Приведем основные допущения, используемые в данной работе на этапе постановки задачи, в математических выкладках и в ходе вычислений.

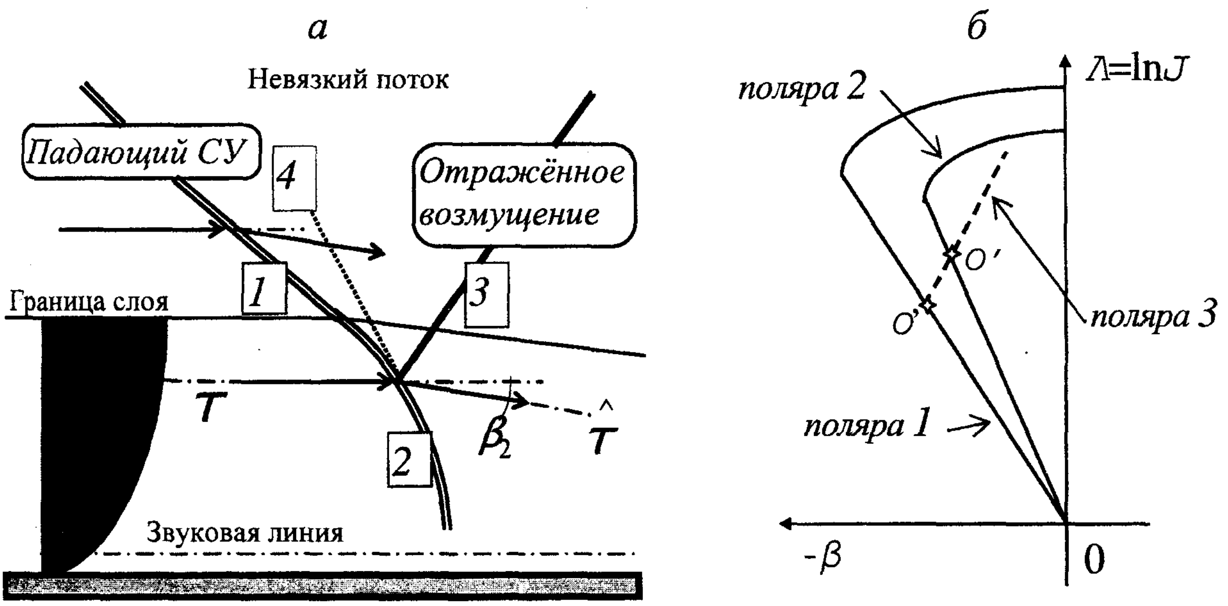


Рис. 1. Схема взаимодействия скачка уплотнения со сдвиговым слоем в невязкой постановке: а – физическая плоскость; б – плоскость поляр

1. Основные допущения

1) Газ предполагается совершенным, а режим течения – ламинарным и сверхзвуковым при больших ($>10^3$) числах Рейнольдса.
2) Невозмущенный СС на момент его взаимодействия со скачком считается сформировавшимся и может рассматриваться как некоторый источник, а сам процесс взаимодействия — двумерным (плоская или осевая симметрия) стационарным.
3) Начальная (на внешней границе СС – на бесконечности) интенсивность падающего СУ предполагается умеренной: отрыва потока не происходит (например, 7,8), течение за СУ всегда сверхзвуковое.
4) Предполагается, что справедливы погранслойные оценки величин в областях гладкости сдвигового течения.
5) Величины вязких напряжений и потоков тепла по обе стороны СУ считаются малыми (см. 1)) в сравнении с их изменением в поперечном (в СС) направлении.
6) Не учитывается в рамках математической модели краевой эффект за СУ (элемент *4* на рис. 1, *а*).
7) Проникающий в СС скачок уплотнения схематизируется поверхностью сильного газодинамического разрыва.

Из перечисленных допущений в некотором обосновании нуждаются лишь четыре последних. Например, из работы (9, см. также приведенную там обширную библиографию) следует, что уравнения типа (содержат те или иные модификации) *уравнений пограничного слоя* (УПС) могут применяться как вблизи точки отрыва, так и для расчета даже некоторых отрывных течений. В 9 получено хорошее согласие решений по данным уравнениям с решениями на основе полных *уравнений Навье-Стокса* (УНС) и результатами физического эксперимента. Следовательно, погранслойные оценки величин 10 продолжают работать и в случае сильно возмущенной задачи, что доказывает обоснованность 4). Допущение 5) специфично для сдвигового течения, а при выполнении 1) позволяет использовать обычные (не модифицированные 5,11,12) *условия на косом СУ* для связи газодинамических величин по обе стороны скачка, проникающего в СС. Для сравнения, например, в работе 5 при рассмотрении задачи об отошедшем от тела малого радиуса СУ, находящемся в равномерном набегающем потоке, делается допущение, противоположное

5), а именно: изменение по координатам величин вязких напряжений и потока тепла считается малым в сравнении с самими этими величинами. Очевидно, что в случае рассматриваемого в настоящей работе градиентного вихревого СС данное допущение неприемлемо, и наоборот, допущение 5)вполне адекватно течению в СС. Обоснованию допущения 6) целиком посвящена работа 1, где, в частности, доказано, что в невязком случае данное допущение эквивалентно рефракционной (трехэлементной, рис. 1) схеме взаимодействия СУ и СС. Важно, что физика явления при этом никак не подменяется, более того, при малой интенсивности СУ решение, полученное по математической модели с учётом данного допущения, и решение, полученное методом характеристик на основе полных газодинамических уравнений, фактически совпадают 1. В защиту допущения 7) можно сказать следующее. С одной стороны, известно 13, что внутренняя структура сильного СУ не может быть идеально воспроизведена даже в рамках полных УНС. Кроме того, при численном моделировании ударно-волновых течений с использованием *методов сквозного счета* (например, 11,12,14,15,4) всегда присутствует повышенная локальная ошибка аппроксимации в окрестности скачка, а главное, – не используется естественная гладкость фронта СУ в касательном направлении. С другой стороны, применение высокоточного и вполне адекватного невязкой постановке задачи *метода выделения разрывов* 16,15,4 для моделирования течений вязкого теплопроводного газа, несмотря на имеющийся отдельный опыт 17,11,12,3, пока ещё не стало общепринятым.

Покажем, что в стационарном случае *метод выделения скачка* может эффективно применяться для моделирования течений вязкого совершенного газа при больших числах Рейнольдса и хорошо сочетается с использованием аналитического подхода, в частности, при решении задачи о взаимодействии СУ с СС.

Перейдем к описанию используемого математического аппарата Ещё раз заметим, что выполнимость (допущение 5)) обычных *условий на косом СУ* означает, что малые вязкость и теплопроводность (большие числа Рейнольдса) справедливо не должны учитываться в локальных соотношениях (на функции) на сильном разрыве (термин формальный). Однако уже интуитивно ясно, что при малой интенсивности такого СУ влияние названных пусть даже и малых факторов всё же должно как-то учитываться математической моделью. *Вихревая модель взаимодействия* 1, несмотря на высокое качество разрешения окрестности СУ за счёт его явного выделения, к сожалению, никак не учитывает соотношение сил вязкости-теплопроводности с силой разрыва (величиной интенсивности СУ). Отказ от явного выделения СУ и применение *методов сквозного счёта* разрывов (в рамках УНС или их параболизованного варианта; например, 11,12,14) с целью учёта указанных малых факторов, представляется в данном случае неоправданным, поскольку сразу же (ступенчато) приводит к ухудшению качества описания окрестности СУ (см. выше). Наиболее правильной и естественной в этой ситуации будет доработка аккуратной *вихревой модели* на случай больших, но конечных чисел Re_∞ 1–3.

Для учёта математической моделью упомянутых выше малых, но значимых физических факторов получим вначале *дифференциальные соотношения на СУ* в вязком теплопроводном совершенном газе 2, связывающие производные от газодинамических параметров до скачка уплотнения и за ним с его кривизной. В отличие от их невязкого аналога (4 – Усков В.Н.) они являются приближенными асимптотическими выражениями при $Re_\infty \to \infty$, поскольку при их выводе для ограничения числа вязких слагаемых удерживаются лишь члены с порядком малости $O(1)$ (используется допущение 4)).

2. Дифференциальные соотношения на скачке уплотнения в вязком газе при больших числах Рейнольдса (ОДСС)

Рассмотрим 2 сверхзвуковое движение вязкого совершенного газа при больших числах Re_∞ с образованием в поле течения скачка уплотнения и сдвигового слоя. Известно (например, 12), что толщины этих образований имеют разный асимптотический масштаб при $\mathrm{Re}_\infty \to \infty$, а именно: толщина СС $\delta_\tau \sim \varepsilon = (\mathrm{Re}_\infty)^{-1/2}$ (малый параметр), толщина СУ $\delta_s \sim \varepsilon^2$ (обратное число Рейнольдса). Таким образом, при соответствующем обезразмеривании, в данной задаче будут присутствовать три линейно независимых масштаба: $1, \varepsilon, \varepsilon^2$, причём $1 > \varepsilon > \varepsilon^2$ при $\varepsilon \to 0$ (единица соответствует характерному размеру задачи). Учитывая данную вилку масштабов, удобно исключить наименьший из них, схематизировав СУ математической поверхностью. Получим соотношения, выполняющиеся на данной поверхности.

Рассматривая стационарный физический процесс прохождения газа через скачок уплотнения в плоскости $\vec{W}O'\vec{n}_s$ (здесь $\vec{n}_s$ – нормаль к СУ в текущей точке O', $\vec{W}$ – вектор скорости набегающего потока в той же точке, рис. 2), введем подобно 17 (см. также 12), внутренние «растянутые» ортогональные координаты $n_{so} = n_s/\delta_s$, $\tau_{so} = \tau_s/R$ для скачка. Здесь δ_s – характерный масштаб длины (толщины) СУ в нормальном направлении (в направлении быстрого изменения газодинамических функций); τ_s – координата в касательном направлении $\vec{\tau}_s$; R – радиус кривизны СУ (R порядка характерного размера задачи). Переходя в УНС, записанных в новых переменных (τ_{so}, n_{so}), к пределу при $\varepsilon \to 0$ и, учитывая лишь главные члены в разложениях по $\zeta = \delta_s/R$, окончательную систему ОДУ запишем так:

$$\frac{d(\rho V)}{d n_{so}} = 0,\ \ \rho V\frac{dU}{dn_{so}} = \frac{d}{dn_{so}}\left(\frac{\mu}{\delta_s}\frac{dU}{dn_{so}}\right),\ \ \rho V\frac{dV}{dn_{so}} = -\frac{dp}{dn_{so}} + \frac{4}{3}\frac{d}{dn_{so}}\left(\frac{\mu}{\delta_s}\frac{dV}{dn_{so}}\right),$$
$$\rho V\frac{dH}{dn_{so}} = \frac{d}{dn_{so}}\left(U\frac{\mu}{\delta_s}\cdot\frac{dU}{dn_{so}} + \frac{4}{3}V\frac{\mu}{\delta_s}\cdot\frac{dV}{dn_{so}} + \frac{\lambda}{c_p\delta_s}\cdot\frac{dh}{dn_{so}}\right), \tag{1}$$
$$H = h + W^2/2;\ \ h = \gamma/(\gamma-1)\,p/\rho;\ \ W^2 = U^2+V^2;\ \ \lambda/c_p = \mu/\mathrm{Pr};\ \ \gamma = c_p/c_v,$$

где U и V – проекции скорости $\vec{W}$, соответственно, в $\vec{\tau}_s$ и $\vec{n}_s$ направлениях (вдоль и поперек СУ). Примем степенной закон вязкости:

$$\mu/\mu_\infty = (h/h_\infty)^\omega,\ \ 1/2 \le \omega \le 1\ .$$

В настоящей работе внутренняя структура СУ представляет для нас второстепенный интерес; поэтому, проинтегрировав уравнения (1), вернёмся к прежним координатам (τ_s, n_s). Проводя обезразмеривание величин параметрами набегающего потока:

$$\bar{n}_s = n_s/L,\ \ \bar{\rho} = \rho/\rho_\infty,\ \ \bar{W} = W/W_\infty,\ \ \bar{p} = p/(\rho_\infty W_\infty^2),\ \ \bar{T} = T/(W_\infty^2/c_p),\ \ \bar{h} = h/W_\infty^2,$$
$$\bar{T} = \bar{h},\ \ \bar{p} = \bar{\rho}\bar{T}(\gamma-1)/\gamma,\ \ \bar{\mu} = \mu/\mu_\infty,\ \ \bar{\mu} = (\bar{h}/\bar{h}_\infty)^\omega,\ \ 1/2 \le \omega \le 1,$$

первые интегралы (1) представим в виде следующих предельных соотношений:

$$\hat{\rho}\hat{V} = \rho V = M,\ \ \ \hat{\rho}\hat{V}\hat{U} - \frac{\hat{\mu}}{\mathrm{Re}_\infty}\cdot\frac{d\hat{U}}{dn_s} = \rho VU - \frac{\mu}{\mathrm{Re}_\infty}\cdot\frac{dU}{dn_s} = I_\tau,$$
$$\hat{\rho}\hat{V}^2 + \hat{p} - \frac{4}{3}\frac{\hat{\mu}}{\mathrm{Re}_\infty}\cdot\frac{d\hat{V}}{dn_s} = \rho V^2 + p - \frac{4}{3}\frac{\mu}{\mathrm{Re}_\infty}\cdot\frac{dV}{dn_s} = I_n, \tag{2}$$
$$\hat{\rho}\hat{V}\hat{H} - \frac{\hat{\mu}}{\mathrm{Re}_\infty}\cdot\frac{d}{dn_s}\left[\left(\frac{\hat{U}^2}{2}\right) + \frac{4}{3}\left(\frac{\hat{V}^2}{2}\right) + \frac{\hat{h}}{\mathrm{Pr}}\right] = \rho VH - \frac{\mu}{\mathrm{Re}_\infty}\cdot\frac{d}{dn_s}\left[\left(\frac{U^2}{2}\right) + \frac{4}{3}\left(\frac{V^2}{2}\right) + \frac{h}{\mathrm{Pr}}\right] = E.$$

Здесь и в дальнейшем черта в обозначении безразмерных величин опущена. Ограничиваясь двумерностью (плоской или осевой симметрией) внешнего течения, перейдем локально в естественную систему координат (s, n), связанную с линией тока и нормалью к ней (рис. 2). Заметим, что поскольку СУ является газодинамическим разрывом, то каждое из направлений $\vec{s}, \vec{n}$ также терпит разрыв при переходе через него. В новой системе координат компоненты скоростей и производные от них для вязких членов в (2) запишутся следующим образом:

$$\hat{V} = -\hat{W}\cdot\sin\hat{\sigma}, \qquad \hat{U} = \hat{W}\cdot\cos\hat{\sigma}, \qquad \hat{\sigma} = \hat{\sigma}(\tau_s) \neq \mathrm{f}\left(\hat{s}, \hat{n}\right),$$

$$\frac{d\hat{V}}{dn_s} = -\frac{\hat{V}}{\hat{\rho}}\frac{d\hat{\rho}}{dn_s} = \frac{\hat{W}\sin\hat{\sigma}}{\hat{\rho}}\left(\frac{\partial\hat{\rho}}{\partial\hat{n}}\cos\hat{\sigma} - \frac{\partial\hat{\rho}}{\partial\hat{s}}\sin\hat{\sigma}\right), \quad \frac{d\hat{U}}{dn_s} = \cos\hat{\sigma}\left(\frac{\partial\hat{W}}{\partial\hat{n}}\cos\hat{\sigma} - \frac{\partial\hat{W}}{\partial\hat{s}}\sin\hat{\sigma}\right). \tag{3}$$

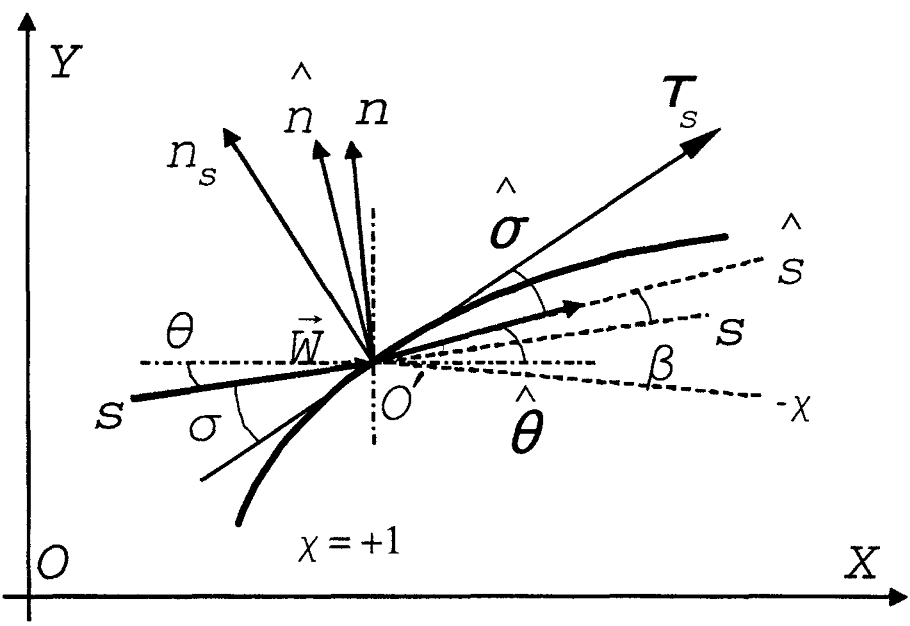


Рис. 2. Собственные «системы координат», связанные со скачком уплотнения и линией тока

Компоненты скоростей V, U и производные от них dV/dn_s, dU/dn_s до СУ записываются аналогично. В формулах (3) использованы следующие обозначения (рис. 2): W – модуль скорости; σ – острый угол между $\vec{W}$ и СУ (между s и τ_s); $\hat{\sigma}$ – аналогичный угол за СУ (между $\hat{s}$ и τ_s); $\hat{\sigma} = \sigma - \beta$; $\beta = \hat{\theta} - \theta$, где β – угол преломления вектора скорости на СУ, а θ и $\hat{\theta}$ – углы наклона соответствующих линий тока к оси OX декартовой системы координат XOY. Ось OX либо является осью симметрии (в осесимметричном случае), либо лежит в плоскости симметрии течения. Знак χ угла σ (на рис. 1 $\chi = -1$) определяет семейство, к которому принадлежит тот или иной СУ (характеристика) в предельном невязком стационарном случае (уравнения движения имеют гиперболический тип).

Соотношения (2) (с (3)) запишутся так (для примера только в полуобласти за СУ):

$$M = -\hat{\rho}\hat{W}\sin\hat{\sigma}, \quad I_\tau = M\hat{W}\cos\hat{\sigma} - \frac{\hat{\mu}}{\mathrm{Re}_\infty}\cos\hat{\sigma}\left(\frac{\partial\hat{W}}{\partial\hat{n}}\cos\hat{\sigma} - \frac{\partial\hat{W}}{\partial\hat{s}}\sin\hat{\sigma}\right),$$

$$I_n = M^2/\hat{\rho} + \hat{p} + \frac{4}{3}\frac{\hat{\mu}}{\mathrm{Re}_\infty}\frac{M}{\hat{\rho}^2}\left(\frac{\partial\hat{\rho}}{\partial\hat{n}}\cos\hat{\sigma} - \frac{\partial\hat{\rho}}{\partial\hat{s}}\sin\hat{\sigma}\right), \qquad \hat{\rho} = \frac{\gamma}{\gamma-1}\frac{\hat{p}}{\hat{h}}, \tag{4}$$

$$E = M\left(\hat{h} - \frac{\hat{W}^2}{2} + \frac{I_n - \hat{p}}{\hat{\rho}}\right) + I_\tau\hat{W}\cos\hat{\sigma} - \frac{\hat{\mu}}{\mathrm{Re}_\infty}\frac{1}{\mathrm{Pr}}\left(\frac{\partial\hat{h}}{\partial\hat{n}}\cos\hat{\sigma} - \frac{\partial\hat{h}}{\partial\hat{s}}\sin\hat{\sigma}\right).$$

При выводе соотношений (2), (4) никак не оговаривался асимптотический порядок производных, входящих в эти соотношения, фактически структура течения до СУ и за ним. Учитывая, что нами решается задача о проникновении скачка в СС, проанализируем (4) с помощью <u>погранслойных оценок величин</u> (допущения 4) и 7)), а именно:

$$W, h, \hat{W}, \hat{h}, \hat{\theta}, \frac{\partial\theta}{\partial n}, \frac{\partial W}{\partial s} \sim 1, \ \theta \sim \epsilon, \ \epsilon = \mathrm{Re}_\infty^{-1/2} - \text{ малый параметр,}$$

$$\frac{\partial W}{\partial n}, \frac{\partial h}{\partial n}, \frac{\partial^2\theta}{\partial n^2}, \frac{\partial\hat{\theta}}{\partial\hat{n}} \sim \frac{1}{\epsilon}, \quad \frac{\partial^2 W}{\partial n^2}, \frac{\partial^2 h}{\partial n^2}, \frac{\partial^2\hat{\theta}}{\partial\hat{n}^2} \sim \frac{1}{\epsilon^2} \quad \text{и т.д.} \tag{5}$$

С учётом (5) видно, что соотношения (4) кроме функций содержат ещё дифференциальные члены, имеющие порядок малости $O(\varepsilon)$ и $O(\varepsilon^2)$ при $\mathrm{Re}_\infty \to \infty$, приближённо учитывающие вязкость и теплопроводность среды (слагаемые с множителем $\hat{\mu}/\mathrm{Re}_\infty$, $\hat{\mu} \sim 1$). При отбрасывании их из (4) получатся обычные *условия на косом СУ* (соотношения на функции – **нулевой порядок**): следовательно, полные соотношения (4) могут рассматриваться как *обобщенные условия на косом СУ* (иначе – **обобщенные соотношения нулевого порядка**).

Продифференцируем массу M, тангенциальный I_τ и нормальный I_n компоненты импульса, энергию E в (4) вдоль СУ $w \equiv \tau_s$ с помощью следующих операторов (для примера за СУ):

$$\frac{d\hat{\Phi}}{dw} = \frac{\partial\hat{\Phi}}{\partial\hat{s}}\cos\hat{\sigma} + \frac{\partial\hat{\Phi}}{\partial\hat{n}}\sin\hat{\sigma}, \qquad \hat{\Phi} \neq \hat{\sigma};$$

$$\frac{d\hat{\sigma}}{dw} = K_w - \left(\frac{\partial\hat{\theta}}{\partial\hat{s}}\cos\hat{\sigma} + \frac{\partial\hat{\theta}}{\partial\hat{n}}\sin\hat{\sigma}\right), \quad K_w = \frac{d\Omega}{dw}, \quad \Omega = \theta + \sigma \equiv \hat{\theta} + \hat{\sigma},$$

где Φ – произвольная функция; K_w – продольная кривизна СУ (в отличие от радиальной кривизны $1/y$ в осесимметричном случае). Для исключения производных по $\hat{s}$ и s направлениям из продифференцированных таким образом соотношений (4) используем *параболизованные* УНС (ПУНС), записанные в переменных (s, n) относительно вектора неизвестных $(W, \theta, p, h)^T$ (для примера – только за СУ):

$$\frac{\partial \ln\left(\hat{\rho}\hat{W}\right)}{\partial \hat{s}} = -\frac{\partial \hat{\theta}}{\partial \hat{n}} - \frac{\delta}{y}\sin\hat{\theta}, \quad \hat{\rho} = \frac{\gamma}{\gamma - 1}\frac{\hat{p}}{\hat{h}},$$

$$\hat{\rho}\hat{W}\frac{\partial \hat{W}}{\partial \hat{s}} = -\frac{\partial \hat{p}}{\partial \hat{s}} + \frac{1}{\mathrm{Re}_\infty y^\delta}\frac{\partial}{\partial \hat{n}}\left(y^\delta \hat{\mu}\frac{\partial \hat{W}}{\partial \hat{n}}\right), \quad \hat{\rho}\hat{W}^2\frac{\partial \hat{\theta}}{\partial \hat{s}} = -\frac{\partial \hat{p}}{\partial \hat{n}} + \frac{\hat{W}}{\mathrm{Re}_\infty y^\delta}\frac{4}{3}\frac{\partial}{\partial \hat{n}}\left(y^\delta \hat{\mu}\frac{\partial \hat{\theta}}{\partial \hat{n}}\right), \quad (6)$$

$$\hat{\rho}\frac{\partial \hat{h}}{\partial \hat{s}} - \frac{\partial \hat{p}}{\partial \hat{s}} = \frac{1}{\mathrm{Re}_\infty \hat{W}}\left[\frac{1}{\mathrm{Pr}\, y^\delta}\frac{\partial}{\partial \hat{n}}\left(y^\delta \hat{\mu}\frac{\partial \hat{h}}{\partial \hat{n}}\right) + \hat{\mu}\left(\frac{\partial \hat{W}}{\partial \hat{n}}\right)^2\right].$$

Здесь $\delta = 0\,(1)$ соответствует плоскому и осесимметричному случаям течения соответственно. Подразумевается, что под (6) «скрывается» и аналогичная система ПУНС до СУ. УПС могут быть получены из (6) упрощением радиального уравнения импульсов до равенства $\partial p/\partial n = 0$. При отбрасывании из того же уравнения лишь вязкого члена получим так называемые *уравнения вязкого ударного слоя* (например, 12) и т. п. Здесь следует заметить, что выбранная нами локальная «система координат» $(s\,, n)$ для записи производных от газодинамических величин по обе стороны СУ наиболее подходяща (например, 20) и для записи упрощенных уравнений типа ПУНС (6).

Выразив из (6) вектор $\left(\hat{\Phi}_{j=\overline{1,4}}\right)_{\hat{s}} = \left(\hat{W}_{\hat{s}},\ \hat{\theta}_{\hat{s}},\ \hat{p}_{\hat{s}},\ \hat{h}_{\hat{s}}\right)^T$ и подставив его в продифференцированные вдоль фронта обобщенные соотношения (4), получим для полуобласти за СУ выражения, не содержащие производных по $\hat{s}$. Аналогичная процедура выполняется и для полуобласти до СУ.

Вместо ПУНС (6) могут браться и более простые *уравнения Эйлера*. И даже в этом случае вязкость (число Re_∞) в окончательный результат попадает дважды, а именно: **явно**, как коэффициент при производных в (4) и **неявно** (*вихревая модель*), как параметр, определяющий поперечные масштаб СС и компоненту скорости (см. 2)).

Полученный таким путем окончательный математический объект определим как *обобщенные дифференциальные соотношения на СУ* в вязком теплопроводном газе в приближении сдвигового слоя **(ОДСС)** (иначе – **обобщенные соотношения первого порядка**, в отличие от (4)). ОДСС связывают нормальные к линиям тока производные 1-го и 2-го порядка от газодинамических величин по обе стороны СУ с его кривизной (K_w). В предельном невязком случае в ОДСС фигурируют лишь первые производные по обе стороны СУ; ОДСС в этом случае тождественно совпадают с известным результатом 18, (4 – Усков В.Н.). Ограничимся записью ОДСС в следующей компактной форме:

$$a_{ij}\left(\hat{\Phi}_j\right)_{\hat{n}} + b_i K_w + c_{ij}\left(\Phi_j\right)_n + d_i(\delta/y) + \epsilon^2\left[e_{ij}\left(\hat{\Phi}_j\right)_{\hat{n}\hat{n}} + f_{ij}\left(\Phi_j\right)_{nn} + F_i\right] = 0, \quad (7)$$

$$\Phi_{j=\overline{1,4}} = (W,\ \theta,\ p,\ h)^T, \qquad i, j = \overline{1,4},$$

где

$$\delta = 0\,(1), \quad \epsilon^2 = \left(\mathrm{Re}_\infty\right)^{-1}, \quad F_i = \mathrm{f}_i\left(\left(\hat{\Phi}_j\right)_{\hat{n}}, \left(\Phi_j\right)_n, \hat{\Phi}_j, \Phi_j\right).$$

В записи ОДСС (7) применено суммирование по повторяющемуся индексу j, вектор **F** объединяет нелинейные слагаемые. Матрицы **A**...**F**, зависящие от газодинамических величин, являются громоздкими и в силу ограниченного объёма настоящей работы здесь не приводятся. Важно, что матрицы **A**...**D** после соответствующих допустимых преобразований в точности приводятся к аналогичным матрицам, полученным в 18,4, где используются другие группы зависимых и независимых переменных, удобные для невязкого случая (в (7) $\varepsilon^2=0$).

Проанализируем ОДСС. Четыре $\left(i=\overline{1,4}\right)$ уравнения (7) содержат 9 неизвестных величин: 8 нормальных производных 1...2-го порядка за СУ и его кривизну. Те же производные в невозмущенном СС (до СУ) считаются известными, что не умаляет общности подхода и вполне соответствует постановке задачи (см. допущение 2)): распределение параметров поперек СС может иметь либо аналитическое представление, либо подходящую параметризацию. Поскольку в ОДСС входит кривизна СУ, приведем дополнительные геометрические соотношения для декартовой системы координат:

$$K_w=\frac{d\Omega}{dw}=y''\left[1+\left(y'\right)^2\right]^{-3/2}=y''\cos^3\Omega,\qquad \frac{dx}{dw}=\cos\Omega,\quad \frac{dy}{dw}=\sin\Omega. \tag{8}$$

Таким образом, в рамках данной модели изменение угла наклона СУ к линии тока $\sigma=\Omega-\theta$ от действия вязкости-теплопроводности происходит не напрямую (через соотношения на СУ; см. 5), а через влияние этих факторов на кривизну СУ, аналогично действию краевого эффекта 1.

3. Исключение краевого эффекта в задаче взаимодействия

Даже в случае невязкого и нетеплопроводного газа ОДСС ((7), $\varepsilon^2=0$) недостаточно, чтобы найти все (первые) производные за СУ, так как его кривизна также неизвестна. Следовательно, в этом случае задача расчёта проникающего в СС фронта должна ставиться как начально-краевая задача для стационарных *уравнений Эйлера* (частный случай ПУНС (6)) с выполнением точных соотношений на поверхности СУ. Именно так ставится задача в рамках метода характеристик, когда выделяется СУ (например, 21,4,1). В этом случае рассчитывается вся область, примыкающая к СУ с задней стороны, что, собственно, и делает данную задачу начально-краевой задачей для уравнений в частных производных. Однако если какая-либо из производных или их комбинация за СУ известна, то задача упрощается: для построения фронта СУ и определения параметров в ближайшей его окрестности достаточно (7). Из работы 1, в частности, следует, что наиболее универсальным (и правильным) из такого рода дополнительных условий за СУ является следующее условие:

$$\hat{p}_{\hat{s}}+\hat{m}^{-\chi}\cdot\hat{p}_{\hat{n}}=0\,,\qquad \hat{m}^{-\chi}=\frac{-\chi}{\sqrt{\hat{\mathrm{M}}^2-1}}=-\chi\cdot\operatorname{tg}(\hat{\alpha}_{\mathrm{M}}). \tag{9}$$

В 1 доказано, что условие (9) (исключающее условие) с физической точки зрения эквивалентно исключению краевого эффекта за СУ, приносимого догоняющими (СУ) возмущениями (элемент *4* на рис. 1). При этом коэффициент $\hat{m}^{-\chi}$ в (9) фиксирует в $(\hat{s},\hat{n})$-координатах наклон характеристики противоположного скачку семейства (отраженная характеристика «$-\chi$» на рис. 2); $\hat{\mathrm{M}},\hat{\alpha}_{\mathrm{M}}$ – число и угол Маха за СУ. С формальной стороны (9) означает равенство нулю полной производной от давления вдоль характеристического направления $\hat{m}^{-\chi}$ или что данное направление является (локально, для точек на задней поверхности СУ) изобарическим. В реальности (из расчетов 1 на основе неупрощенной модели) для течений типа СС равенство (9) достаточно хорошо выполняется само по себе, и поэтому явное «навязывание» его же в качестве допущения 6) не вредит решению исходной задачи. В некотором смысле исключающее условие (9) уподобляет СУ характеристике, за которой, как известно (например, 21,4), не требуется ничего задавать.

Существенно, что в данной работе указанное условие применяется уже к вязкой задаче ((7) содержат вторые производные), следовательно, от (9) должно браться ещё его дифференциальное следствие $\hat{p}_{\hat{s}\hat{s}} - \left(\hat{m}^{-\chi}\right)^2 \cdot \hat{p}_{\hat{n}\hat{n}} = 0$. С физической точки зрения оно означает более гладкое касание изобарой соответствующей характеристики.

С использованием дифференциальных законов сохранения, условие (9), как и его дифференциальное следствие, могут быть переписаны в терминах чисто нормальных производных 1, после чего подстановка выражений для $\hat{p}_{\hat{n}}$, $\hat{p}_{\hat{n}\hat{n}}$ в (7) приводит к изменению части коэффициентов ОДСС. Условимся, если это не вредит смыслу задачи, обозначения новых (с учётом подстановки) и исходных коэффициентов (7) в дальнейшем не различать.

4. Вычислительный алгоритм для простого случая – интегрирования невязких уравнений

В случае невязкого нетеплопроводного газа, при сделанных допущениях, задача определения вектора неизвестных $\mathbf{X} = \left(\hat{W}_{\hat{n}},\ \hat{\theta}_{\hat{n}},\ K_w,\ \hat{h}_{\hat{n}}\right)^T$ (величина $\hat{p}_{\hat{n}}$ исключена с помощью (9)) из ОДСС (в (7) $\varepsilon^2 = 0$) легко разрешима, поскольку матрица $\left(a_{ij=1,2,4}, b_i\right)_{i=\overline{1,4}}$ не вырождена в каждой точке СУ. В этом случае для построения фронта СУ, проникающего в СС (точнее, уже просто – в *вихревой слой*), и определения параметров за ним достаточно знания математического выражения лишь для кривизны скачка. Определенная с использованием условия (9) из (7) кривизна в 1 получила название *рефракционной*, поскольку точно соответствует физическому процессу рефракции фронта СУ; догоняющие возмущения при этом не учитываются. В такой постановке рассматриваемая задача имеет точное решение 1 и сводится к решению задачи Коши для обыкновенного дифференциального уравнения (ОДУ) второго порядка. С учетом его конкретного вида (8) численное решение данной задачи удобно строить в так называемых естественных координатах 4, рассчитывая через (7), (9) *рефракционную кривизну*, отвечающую за форму скачка (например, параболу), и задавая его длину дуги Δw (или Δx, Δy). В декартовых координатах (приращение $\Delta x = x_{s+1} - x_s$ берется вдоль слоя в направлении эволюции СУ) такой вычислительный процесс, использующий аналитическое интегрирование с итерационным уточнением формы скачка на шаге, может быть записан следующим образом:

$$
\begin{aligned}
&y'_{s+1} = y'_s + y''_s \Delta x, \qquad && y_{s+1} = y_s + y'_s \Delta x + y''_s \Delta x^2/2, \\
&y''_{s+1} = K_{w\,s+1}\left[1 + \left(y'_{s+1}\right)^2\right]^{3/2}, && y''_{s+1/2} = \left(y''_s + y''_{s+1}\right)/2, \\
&y'_{s+1} = y'_s + y''_{s+1/2} \Delta x, && y_{s+1} = y_s + y'_s \Delta x + y''_{s+1/2} \Delta x^2/2 .
\end{aligned} \tag{10}
$$

Газодинамические параметры в каждой новой точке скачка (x_{s+1} , y_{s+1}) рассчитываются по известным параметрам перед ним через *условия на косом СУ*: по (10) известно значение наклона СУ $y'_{s+1} \equiv \operatorname{tg} \Omega_{s+1}$. Таким образом, в данном вычислительном процессе каждый участок фронта СУ на шаге Δx представляется квадратичным элементом.

Важно отметить, что в рассматриваемом нами в данном разделе невязком случае вычисление производных за СУ: $\hat{W}_{\hat{n}}$, $\hat{\theta}_{\hat{n}}$, $\hat{h}_{\hat{n}}$, равно как и его кривизны K_w в каждой расчетной точке, производится независимо с использованием полученных (разрешенных в явном виде из ОДСС (7) при $\varepsilon^2 = 0$) аналитических выражений.

В случае вязкого теплопроводного газа (в (7) $\varepsilon^2 \neq 0$) существуют принципиально два различных подхода (метода) решения данной задачи. Первый подход основан на учете того факта, что малый параметр ε^2 в (7) является малым по существу, следовательно, в каждой точке СУ невязкое приближение решения должно быть близким к точному решению. Второй подход является классическим – приведение (7) к нормальному виду (вторые производные входят в соотношения линейно) и использование стандартных вычислительных методик для численного интегрирования полученной системы ОДУ. Несколько забегая вперед, можно сказать, что каждый из этих подходов, связанный с соответствующим преобразованием и записью уравнений, имеет свою «нишу», где он является оптимальным.

Дадим краткое описание вычислительных методов, реализующих эти два подхода.

5. Метод интегрирования вязких уравнений, основанный на использовании невязкого приближения

Как уже было замечено, в основе применения соответствующего подхода лежит тот факт, что в случае невязкого газа первые производные от газодинамических параметров входят в ОДСС (7) линейным образом, а вторые — отсутствуют вовсе. Таким образом, в случае больших чисел Рейнольдса, когда $\epsilon^2 = \left(\mathrm{Re}_\infty\right)^{-1}$ – по существу малый параметр при старших производных и нелинейностях, всегда есть возможность аналитическим путем выделить в (7) линейное (нулевое) приближение для вектора $\mathbf{X} = \left(\hat{W}_{\hat{n}},\ \hat{\theta}_{\hat{n}},\ K_w,\ \hat{h}_{\hat{n}}\right)^T$ и использовать его в каждой расчетной точке скачка, а именно:

$$\mathbf{X}^0 = \mathbf{A}^{-1}\cdot\mathbf{b}, \quad \mathbf{b} = -\left(c_{ij}\left(\Phi_j\right)_n + d_i(\delta/y)\right)^T_{i=\overline{1,4}}, \quad \epsilon^2 = 0,$$

или, в общем случае, схематично:

$$\mathbf{X}^{k+1} = \mathbf{X}^0 - \epsilon^2\,\mathbf{A}^{-1}\cdot\left(e_{ij}\left(\hat{\Phi}_j\right)^k_{\hat{n}\hat{n}} + f_{ij}\left(\Phi_j\right)^k_{nn} + F^k_i\right)^T_{i=\overline{1,4}}, \quad k = 0,1,2,\mathrm{K}, \tag{11}$$

где $\mathbf{A} = \left(a_{ij=1,2}, b_i, a_{i4}\right)_{i=\overline{1,4}}$ – матрица при линейной части (7) вектора $\mathbf{X}$; $\mathbf{b}$ – постоянный в итерационном процессе вектор (в $\mathbf{b}$, как источниковые члены, могут быть перенесены также вторые производные и нелинейности до СУ из (11)); k – итерационный индекс. Не оговаривая деталей итерационного процесса (11), который с применением техники релаксации делается сходящимся, приведем математическое выражение разностного оператора, аппроксимирующего вторые производные от величин за СУ с учетом разложения последних в ряд Тейлора вдоль линии тока:

$$\left(\frac{\partial^2\hat{\Phi}}{\partial\hat{n}^2}\right)_{s+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} \approx \frac{\chi}{\Delta\hat{n}}\left[\left(\frac{\partial\hat{\Phi}}{\partial\hat{n}}\right)_{s+1}^{n+\frac{1}{2}} - \left(\frac{\partial\hat{\Phi}}{\partial\hat{n}}\right)_{s}^{n+\frac{1}{2}}\right], \qquad \left(\frac{\partial\hat{\Phi}}{\partial\hat{n}}\right)_{s}^{n+\frac{1}{2}} \approx \left(\frac{\partial\hat{\Phi}}{\partial\hat{n}}\right)_{s}^{n} + \frac{\Delta_{sn}}{2},$$

$$\left(\frac{\partial\hat{\Phi}}{\partial\hat{n}}\right)_{s+1}^{n+\frac{1}{2}} \approx \left(\frac{\partial\hat{\Phi}}{\partial\hat{n}}\right)_{s+1}^{n+1} - \frac{\Delta_{sn}}{2}, \; \Delta_{sn} = \Delta\hat{s}\left[\frac{\partial}{\partial\hat{s}}\left(\frac{\partial\hat{\Phi}}{\partial\hat{n}}\right)\right]_{s+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} \approx \frac{\chi\Delta\hat{s}}{\Delta\hat{n}}\left[\left(\frac{\partial\hat{\Phi}}{\partial\hat{s}}\right)_{s+1}^{n+1} - \left(\frac{\partial\hat{\Phi}}{\partial\hat{s}}\right)_{s}^{n}\right].$$

Тогда

$$\left(\frac{\partial^2\hat{\Phi}}{\partial\hat{n}^2}\right)_{s+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} \approx \left\{\chi\left[\left(\frac{\partial\hat{\Phi}}{\partial\hat{n}}\right)_{s+1}^{n+1} - \left(\frac{\partial\hat{\Phi}}{\partial\hat{n}}\right)_{s}^{n}\right] - \left|\operatorname{ctg}\hat{\sigma}\right| \Delta_{sn}\right\}\Bigg/\Delta\hat{n},$$
$$\left|\operatorname{ctg}\hat{\sigma}\right| \equiv \Delta\hat{s}\big/\Delta\hat{n}, \quad \Delta\hat{n}\big/\Delta\hat{w} \equiv \left|\sin\hat{\sigma}\right|, \quad \chi^2 = 1, \tag{12}$$

где приращения индексов $s \to s+1$, $n \to n+1$ отвечают элементарным сдвигам точки (разностного узла), соответственно, в нормальном (меняется линия тока) и в касательном (меняется нормаль) направлениях к линии тока. Новая (по ходу эволюции Δw) расчетная точка СУ, где требуется определить все величины, в текущей (естественной) системе координат будет иметь координаты $\left(\Delta\hat{s}, \chi\Delta\hat{n}\right)$. Для определения в данной точке второй производной, вычисляемой с помощью центрально-разностной аппроксимационной формулы (12) в промежуточном узле $\left(\Delta\hat{s}/2, \chi\Delta\hat{n}/2\right)$ на фронте СУ, окончательно следует записать:

$$\left(\frac{\partial^2\hat{\Phi}}{\partial\hat{n}^2}\right)_{s+1}^{n+1} = 1.5\left(\frac{\partial^2\hat{\Phi}}{\partial\hat{n}^2}\right)_{s+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} - 0.5\left(\frac{\partial^2\hat{\Phi}}{\partial\hat{n}^2}\right)_{s-\frac{1}{2}}^{n-\frac{1}{2}}. \tag{13}$$

В отличие от невязкого случая, в итерационном процессе (11)...(13), уточняющем значение вектора неизвестных **X**, уже нет желаемой и удобной «развязки» отдельных его компонент (из-за присутствия в (7) нелинейных членов), а поэтому их итерирование производится согласованно. По завершении этого процесса в новой точке ($s+1$, $n+1$), пересчитывается форма (положение) текущего элемента фронта СУ по формулам (10), с учетом только что найденного уточненного значения кривизны ($K_w \equiv X_3$) в новой точке. Далее процесс (11)...(13) повторяется до тех пор, пока различие в форме СУ между итерациями не будет меньше заданной погрешности вычислений.

Таким образом, описанный выше метод оказывается совершенно естественным при его применении в области малых значений ε^2 ($<10^{-5}$), когда даже интуитивно работает понятие невязкого приближения, и выделение скачка 7) не нуждается в каком-либо дополнительном обосновании.

6. Метод интегрирования вязких уравнений, основанный на приведении системы к нормальному виду

Данный метод является альтернативой описанному выше методу, и его применение становится целесообразным, когда построение решения с помощью невязкого приближения либо невозможно, либо затруднительно (требуется значительное число итераций в (11), что делает метод невязкого приближения неэффективным). Второй (классический) путь – это приведение (7) к нормальному виду и дальнейшее использование стандартных вычислительных методик для численного интегрирования получившейся системы уравнений.

Первым шагом для построения подобного метода является получение нормальной системы уравнений из (7) при $\varepsilon^2 \neq 0$. Для этого, воспользовавшись выражением

$$\frac{d\hat{\Phi}_{\hat{n}}}{dw} = \Phi_{\hat{n}\hat{n}} \cdot \sin\hat{\sigma} + \Phi_{\hat{s}\hat{n}} \cdot \cos\hat{\sigma} \qquad (14)$$

и проделав с (7)...(9) некоторые преобразования, требуемый конечный результат можно представить в виде следующей системы ОДУ (записано упрощенно):

$$\begin{aligned} &y_1' \equiv \frac{d\hat{W}_{\hat{n}}}{dw} = f_w, \quad y_2' \equiv \frac{d\hat{h}_{\hat{n}}}{dw} = f_h, \quad y_3' \equiv \frac{d\Omega}{dw} = K_w, \\ &y_4' \equiv \frac{dy}{dw} = \sin(y_3), \quad y_5' \equiv \frac{dx}{dw} = \cos(y_3), \quad y_6' \equiv \frac{d\hat{\theta}_{\hat{n}}}{dw} = f_\theta, \end{aligned} \qquad (15)$$

где правые части f_w, f_h, f_θ, K_w – сложные математические выражения, как и компоненты **X** в предыдущем методе, получены с помощью системы аналитических преобразований на ЭВМ для фиксированных значений констант $\gamma = 7/5$, Pr =1, $\omega = 1$ (см. выше).

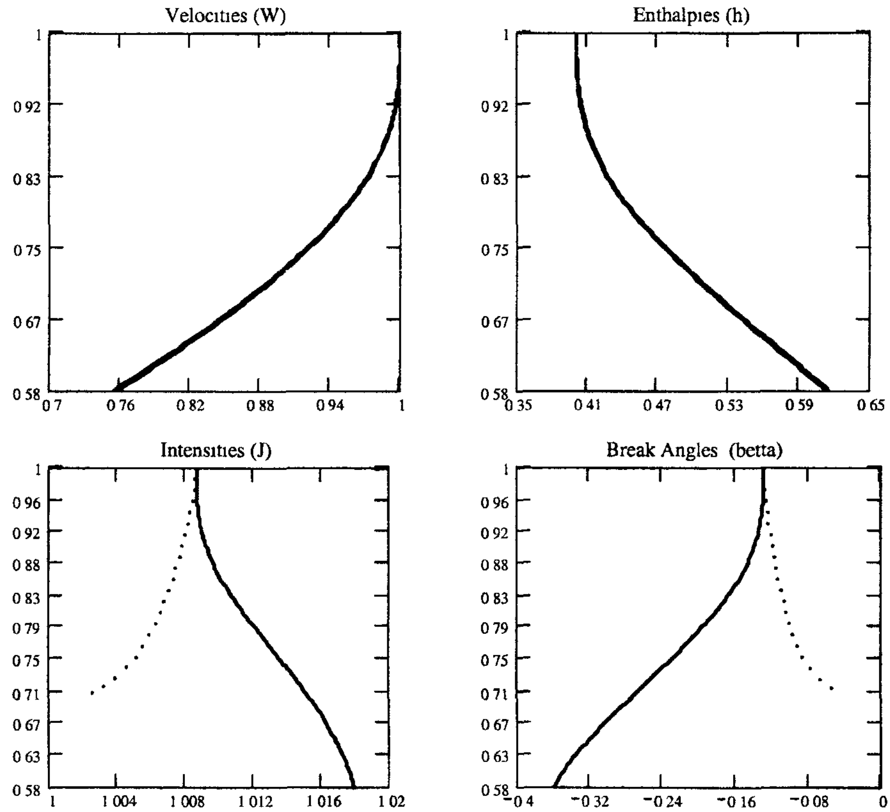
В качестве начальных условий для (15) при решении задачи проникновения СУ в СС (задачи Коши), как и в предыдущем методе, берутся параметры на внешней (невязкой, см. рис. 1) линии тока.

Как уже было замечено, применение данного метода является целесообразным в области «больших значений» ε^2 ($10^{-5} < \varepsilon^2 < 10^{-3}$). При средних ($\varepsilon^2 \equiv (\mathrm{Re}_\infty)^{-1} \sim 10^{-5}$) значениях малого параметра оба метода дают один и тот же результат примерно с одинаковой эффективностью.

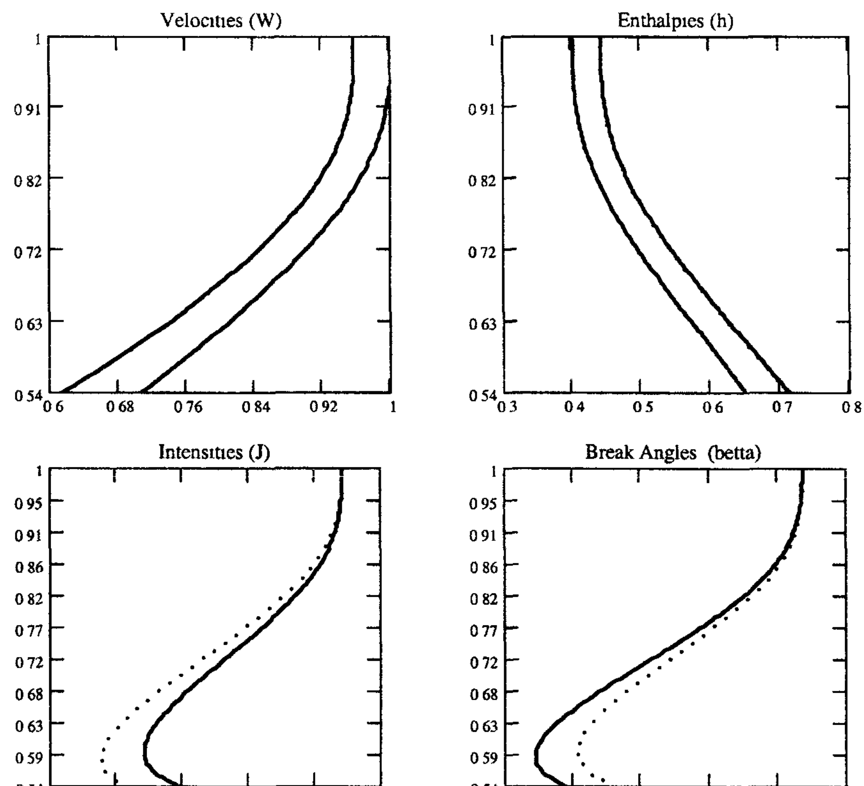
Несмотря на то, что при решении задачи проникновения СУ в СС в рассматриваемом методе используются эффективные процедуры численного интегрирования жестких систем ОДУ, продвинуться в область малых чисел Re_∞ ($\leq 10^3$), в особенности для малых интенсивностей СУ, невозможно (выделение скачка в сильно вязком (теплопроводном) газе лишено смысла).

7. Проведение расчетов и результаты

На рис. 3 представлены сравнительные расчеты для плоского модельного СС. В качестве модели бралась сверхзвуковая часть ПС на теплоизолированной пластине: Pr=1, $\partial p/\partial n = 0$, $W_{n=y=0} = 0$, $(\partial h/\partial n)_{n=y=0} = 0$. При построении профиля энтальпии h использовалось известное (например, 18,19) точное решение $H = h + W^2/2 = \mathrm{const} = H_\infty$. Поскольку задача о течении в ПС не имеет своего характерного размера, то везде в дальнейшем под Re_∞ понимается $\mathrm{Re}_x = \rho_\infty W_\infty x/\mu_\infty$, где x – текущая координата, совпадающая с точкой падения СУ.



а



б

Рис. 3. Результаты расчетов:
а – малая интенсивность СУ; б – значительная интенсивность СУ

Текущие газодинамические параметры в невозмущённой сверхзвуковой части слоя перед СУ определялись по известным профилю скорости и параметрам равномерного внешнего набегающего невязкого потока (рис. 1), помеченного в тексте символом «∞». Автомодельный профиль продольной компоненты скорости сжимаемого ПС во всех расчётах задавался в виде полинома 4-й степени (приближенный метод Польгаузена; см., например, 19) с непрерывным переходом по 1-й и 2-й производным от параметров указанного невязкого потока. Профиль малой по величине поперечной компоненты скорости (в данном случае – угла θ) рассчитывался через соответствующую толщину вытеснения (например, 8).

Одной из целей настоящей работы являлась прямая оценка (в рамках построенной модели) действия вязкости-теплопроводности на процесс взаимодействия СУ и СС в широком диапазоне интенсивностей падающего СУ. В связи с этим возникла потребность в детальном анализе механизма влияния указанных факторов на окончательный результат. Напомним (см. выше), что как параметр (неявно) вязкость присутствует в настоящей математической модели взаимодействия всегда (в этом состоит её главное действие). Вместе с этим, в настоящей модели вязкость присутствует (при $\varepsilon^2 \neq 0$) ещё и как коэффициент в (4), (7), а соответствующие члены имеют более высокий (по сравнению с неявным вхождением вязкости) асимптотический порядок, образуя своего рода дополнительный «***вязкостный эффект***» в возмущенной задаче.

Для выделения и анализа *вязкостного эффекта* необходимо потребовать, чтобы профиль не только продольной, но и поперечной компоненты скорости являлся автомодельным. Понятно, что в общем случае такое допущение будет неправомерным, однако добиться указанной автомодельности, хотя бы в конкретном расчёте при вариациях числа Re_∞ (заметим, большого), оказывается корректным и вполне реальным. С этой целью, при расчёте профиля θ и условной толщины слоя 19, рассчитывалось (или выбиралось) некоторое среднее по группе число Рейнольдса – $\mathrm{Re}_\perp$, играющее роль замороженного параметра при вариациях ε^2 в (7). В 3 в частности, применялось плоскопараллельное поле скорости: $\theta \equiv 0$, т.е. $\mathrm{Re}_\perp = \infty$.

В связи с указанным представлением профилей скорости, при построении графических зависимостей по результатам расчета применялось описанное ниже преобразование вычислительных координат. Координаты x (вдоль плоскости симметрии) и y (поперёк СС), а также величина угла θ относились к условной толщине слоя. Таким образом, в новых (выводимых) координатах СС в точке падения на него СУ всегда имел единичную толщину. Следовательно, если бы на текущие газодинамические параметры рассчитываемого возмущенного течения определённый выше *вязкостный эффект* не оказывал бы заметного действия, то все расчетные кривые (с учетом преобразования при выводе) должны были бы располагаться в узком коридоре величин и в пределе – сливаться в одну кривую. Более того, очевидно, что последняя ситуация всегда будет иметь место в тривиальном случае – при рассмотрении процесса проникновения на основе (7) с $\varepsilon^2 = 0$ (*вихревая модель взаимодействия*; *вязкостный эффект* отсутствует). Из вышеизложенного ясно следует: используемое при выводе преобразование величин «вырезает» из конечного результата главное действие вязкости-теплопроводности, выявляя при этом остающийся (если он имеет место) *вязкостный эффект*.

Конкретные значения безразмерных газодинамических параметров внешнего потока и значения параметров на плоскости симметрии, совместно определяющие невозмущённый СС, были следующими: $\mathrm{M}_\infty = 2{,}5$; $\rho_\infty = 1$; $W_\infty = 1$ при $y = 1$ и $W_{y=0} = \theta_{y=0} = 0$ при $y = 0$. При этом текущая энтальпия и давление определялись из соотношений:

$$h = H_\infty - W^2/2,\quad W = W(z),\quad z = z(y),\quad z \in (0,1],\quad y \in (0,\delta_T],\quad p = p_\infty,$$
$$h_\infty = W_\infty^2 / \left[(\gamma - 1)\mathrm{M}_\infty^2\right],\ H_\infty = H_0 = h_\infty + W_\infty^2/2,\ p_\infty = p_{y=0} = \rho_\infty h_\infty (\gamma - 1)/\gamma.$$

В ходе расчётов изменялись $\varepsilon^2 = (1/\mathrm{Re}_\infty) = \{0, \ldots, 10^{-5}\}$ (при этом среднее $\mathrm{Re}_\perp = 2/(0+10^{-5}) = 2\cdot 10^5$ было фиксировано), а также величина начальной интенсивности падающего СУ $J_\infty = J_s{}^{t_\%/100\%}$, $t_\% = 0{,}5 \div 20\ \%$, где J_S – звуковая интенсивность СУ ($\hat{\mathrm{M}} = 1$) 4.

При численной реализации описанных выше методов пространственный шаг расчётной сетки полагался равным не более 0,001 , что, в сочетании со вторым порядком аппроксимации используемых разностных схем, обеспечивало достаточную точность вычислений и гарантировало практическую сходимость. Расчёт останавливался при достижении СУ интенсивности J_S.

Рис. 3, а, б соответствуют разным начальным интенсивностям падающего на СС СУ: в первом случае интенсивность СУ – 0,5 % (малая, иначе – ***надакустические возмущения***; термин не является общепринятым, и целесообразность его введения и использования становится ясной ниже по тексту), во втором – 20 % (достаточная).

На графиках (рис. 3, а, б) профилей скоростей W и энтальпий h заметного различия между кривыми, соответствующими разным $\{\infty, 10^5\}$ числам Re_∞, не наблюдается как при малой, так и при достаточной интенсивности СУ. Из графиков на рис. 3, б видно лишь различие профилей этих параметров до СУ (одна сплошная кривая, расположенная отдельно от других) и за ним (кривые, соответствующие разным числам Re_∞). На рис. 3, а, из-за малой (почти «акустика») интенсивности падающего скачка, не видно и этого различия. На последующих двух графиках рис. 3, а – графики интенсивностей J и углов преломления β, наоборот, видно уже качественное различие в поведении кривых: $\mathrm{Re}_\infty \to \infty$ ($\varepsilon^2 = 0$) соответствует сплошная кривая, а $\mathrm{Re}_\infty = 10^5$ – пунктирная. Важно, что это существенное различие становится практически незаметным при достаточной (20 % -ной) интенсивности падающего СУ (последние два графика рис. 3, б). Следовательно с увеличением начальной интенсивности падающего СУ происходит выход возмущенного течения на *автомодельный режим*, когда вышеуказанный *вязкостный эффект* практически исчезает. При этом существенно, что время расчета «невязкого» ($\varepsilon^2 = 0$; *вихревая модель*) и вязкого (например, $\varepsilon^2 = 10^{-5}$), более трудоёмкого, вариантов задачи отличается значительно, в особенности при дальнейшем уменьшении числа Рейнольдса.

Из графиков на рис. 3, а видно, что, в случае малой начальной интенсивности СУ и значительной вязкости, физический процесс проникновения в СС СУ сопровождается быстрым его рассасыванием (*диффузией*) с последующим вырождением; при этом графики интенсивностей, соответствующие мало отличающимся значениям ε^2, ведут себя поразному. В физико-математической литературе такое поведение «соседних» решений принято называть *бифуркацией* (раздвоением) решений; однако какой-либо потери единственности решения в данном случае не происходит. С учетом того, что в качестве Re_∞ в настоящих исследованиях выступает Re_x, данное явление будет иметь место и в случае близкого падения СУ к точке образования слоя при фиксированной физической вязкости потока.

Таким образом (было показано), в случае малой начальной интенсивности СУ и значительной вязкости (теплопроводности) роль *вязкостного эффекта* может быть весьма значительной. Именно такие малые возмущения, неспособные прорваться через образующийся в течении «*вязкостный барьер*» и быстро диссипирующие внутри слоя, мы ранее без всякой аргументации назвали *надакустическими*. (Здесь мы не приводим строгого математического определения (критерия) таких возмущений; очевидно лишь, что для невязких течений данное понятие лишено всякого смысла.)

Дополнительно, в ходе вычислительного эксперимента, проводимого в рамках настоящей работы (как и в случае применения *вихревой модели* 1) исследовалась также роль краевого эффекта, исключение которого, как уже отмечалось, не приводит к какой-либо подмене физического явления. Замечено, что значительные вариации направляющего коэффициента в (9), отвечающего за конкретный краевой эффект, при малой интенсивности СУ практически не влияют на процесс проникновения СУ в СС, что лишний раз подтверждает справедливость соответствующих теоретических выводов 21,4.

8. Выводы

- Предложена новая математическая модель взаимодействия скачка уплотнения со сдвиговым слоем (большие числа Рейнольдса), обобщающая *вихревую модель*, куда вязкость (число Рейнольдса) входит лишь как параметр, определяющий поперечные масштаб и компоненту скорости невозмущённого сдвигового течения. В предлагаемой модели, наряду с таким участием, вязкость уже явно присутствует в виде малого коэффициента при старших производных в решаемых дифференциальных уравнениях, определяющих структуру возмущённого течения.
- Получено (согласно классификации, принятой в 22) аналитическое решение стационарной задачи о проникновении скачка уплотнения в сдвиговый слой. С учетом сделанных допущений исходная начально-краевая задача для *уравнений Навье-Стокса* сведена к задаче Коши для системы ОДУ, жесткость которой увеличивается по мере уменьшения числа Рейнольдса и интенсивности скачка. Даны альтернативные методы записи и решения полученной системы уравнений: классический – с нормализацией и без нее, основанный на невязком приближении. Второй — оказывается эффективнее для больших чисел Рейнольдса и, что более важно, автоматически редуцирует решаемую систему до второго порядка в предельном невязком (и нетеплопроводном) случае.
- Вычислительным путем показано, что в данной задаче, кроме основной – *автомодельной* ветви решения (внутри слоя работает газодинамическое приближение и, следовательно, может применяться *вихревая модель*), присутствует ещё и *диффузионная* ветвь, проявляющаяся при малой интенсивности скачка. В последнем случае неполноценный (как в *вихревой модели*) учёт малых вязкости и теплопроводности может привести к принципиально неверному представлению о физике процесса взаимодействия скачка со слоем.
- Показано, что малые вязкость и теплопроводность среды существенно препятствуют распространению лишь слабых – *надакустических возмущений*, ослабляя и без того малую их начальную интенсивность, а краевой эффект при этом (как и в невязком случае) не оказывает на процесс взаимодействия заметного влияния.
- Для скачков, имеющих достаточную интенсивность, вычислительным путем показан выход возмущенного течения на *автомодельный режим*, когда силы давления превалируют над вязкими силами: работает газодинамическое приближение и, следовательно, может применяться *вихревая модель*. Данный физический факт подтверждается и более сложными расчетами на основе полной модели нестационарных *уравнений Навье-Стокса*.

Для практики важно, что предлагаемая модель позволяет в рамках единого вычислительного алгоритма проходить насквозь от газодинамической до диффузионной стадии эволюции скачка в слое, чем достигается значительная экономия вычислительного ресурса: счет на ПЭВМ вместо многих часов (*уравнения Навье-Стокса*) занимает минуты или даже секунды.

Важно также, что в данной постановке задачи сохраняется естественный (бесконечный, в отсутствие других возмущений) порядок гладкости в касательном к СУ направлении, что и явилось основным мотивом для применения аналитического подхода.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Адрианов А. Л. О модельной кривизне скачка уплотнения в неравномерном потоке / А. Л. Адрианов // Вычислительные технологии. – 2000. – Т. 5. – № 6. С. 3–14.
2. Адрианов А. Л. Дифференциальные соотношения на скачке уплотнения в вязком газе при больших числах Рейнольдса / А. Л. Адрианов // Тр. семинара «Мат. моделирование в механике». ВЦК СО РАН. – Красноярск, 1996. – 18 с. – Деп. в ВИНИТИ 01.04.96. – № 1052. – В-96.
3. Адрианов А. Л. Асимптотическая модель взаимодействия скачка со сдвиговым слоем / А. Л. Адрианов // Вестник Сиб. гос. аэрокосм. ун-та им. акад. М. Ф. Решетнева: Сб. научн. тр. / Под ред. проф. Г.П. Белякова; Вып. 3. СибГАУ.– Красноярск, 2002. – С.22–34.
4. Адрианов А. Л. Интерференция стационарных газодинамических разрывов / А. Л. Адрианов, А. Л. Старых, В. Н. Усков. – Новосибирск: Наука, 1995. – 180 с.
5. Седов Л. И. Влияние вязкости и теплопроводности на течение за сильно искривленной ударной волной / Л. И. Седов, М. П. Михайлова, Г. Г. Черный // Вестник МГУ. – Механика. – 1953. – № 3. – С. 95–100.
6. Курант Р. Сверхзвуковые течения и ударные волны / Р. Курант, К. Фридрихс. – М.: ИЛ, 1950. – 426 с.
7. Краснов Н. Ф. Аэродинамика отрывных течений: Учеб. пособие для втузов / Н. Ф. Краснов, В. Н. Кошевой, В. Т. Калугин / Под ред. Н.Ф. Краснова. – М.: Высш. шк., 1988. – 351 с.
8. Бондарев Е. Н. Аэрогидромеханика: Учеб. пособие для втузов / Е. Н. Бондарев, В. Т. Дубасов, Ю. А. Рыжов и др. – М.: Машиностроение, 1993. – 608 с.
9. Уэрл М. Новый метод расчета отрыва сверхзвуковых пограничных слоев / М. Уэрл, В. Ватса // РТК. – 1974. – Т. 12. – № 11. – С. 45–53.
10. Седов Л. И. Механика сплошной среды / Л. И. Седов. – М.: Наука, 1994. – Т. 2. – 560 с.
11. Ковеня В. М. Применение метода расщепления в задачах аэродинамики / В. М. Ковеня, Г. А. Тарнавский, С. Г. Черный. – Новосибирск: Наука. Сиб. отд-ние, 1990. – 247 с.
12. Тимошенко В. И. Сверхзвуковые течения вязкого газа / В. И. Тимошенко. – Киев: Наук. думка, 1987. – 187 с.
13. Гриффитс У. Ударные волны / У. Гриффитс // Современная гидродинамика. Успехи и проблемы / Под ред. Дж. Бэтчелора и Г. Моффата. – М.: Мир, 1984. – 501 с.
14. Пасконов В. М. Численное моделирование процессов тепло- и массообмена / В. М. Пасконов, В. И. Полежаев, Л. А. Чудов. – М.: Наука, 1984. – 286 с.
15. Годунов С. К. Численное решение многомерных задач газовой динамики / С. К. Годунов, А. В. Забродин, М. Я. Иванов и др. – М.: Наука, 1976. – 400 с.
16. Алалыкин Г. Б. Решение одномерных задач газовой динамики в подвижных сетках / Г. Б. Алалыкин, С. К. Годунов, И. Л. Киреева, Л. А. Плинер. – М.: Наука, 1970. – 112 с.
17. Толстых А. И. О структуре криволинейной ударной волны / А. И. Толстых // ПММ. – 1964. – Т. 28. – Вып. 3. – С. 553–556.
18. Бай Ши-и. Введение в теорию течения сжимаемой жидкости / Ши-и Бай. – М.: Изд-во иностр. лит., 1962. – 411 с.
19. Абрамович Г. Н. Прикладная газовая динамика: Учеб. руководство для втузов / Г. Н. Абрамович. – В 2 ч. Ч. 1. – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1991. – 600 с.

20. Черный С. Г. О выборе системы координат для численного решения упрощённых уравнений Навье-Стокса маршевым методом / С. Г. Черный // Числ. методы механ. сплошной среды. – 1982. – Т. 13. – № 1. – С. 132–146.
21. Рождественский Б. Л. Системы квазилинейных уравнений и их приложения к газовой динамике / Б. Л. Рождественский, Н. Н Яненко. – М.: Наука, 1968. – 592 с.
22. Сидоров А. Ф. Метод дифференциальных связей и его приложения в газовой динамике / А. Ф. Сидоров, В. П. Шапеев, Н. Н. Яненко. – Новосибирск: Наука, 1984. – 272 с.

A DIFERENTIAL MODEL FOR THE PROBLEM OF SHOCK – SHEAR LAYER INTERACTION

A.L. Adrianov

A steady-state analytical solution is obtained for the problem of shock penetration in the shear layer. In this approach, the shock wave is considered to be a strong gasdynamic discontinuity (Shock fitting technique) with the Rankine-Hugoniot and differential relations including effects of gas viscosity and heat conductivity. In addition, there is excluded the boundary effect behind the shock which is not important for this problem. These conditions allow one to reduce the general boundary problem for Navier-Stocks equations to the initial problem for ODE system with the complex right-hand side. Were considered alternative methods of finding of solution of the given system: classical – with normalization and without it, based on inviscid case. The second method has advantages in high Reynolds number.

From numerical analyses it is evident the influence of Reynolds number and initial-boundary conditions on the refraction mechanism of the shock penetration. It is proofed the existence of a self-similarity with respect to Reynolds number for a perturbed flow.

It's important for practice, that the model, build in this work lets in the frame of unique calculation algorithm go through beginning from gasdynamic up to diffuse stage of shock evaluations. It helps to reach – the economy of computation resources.