УДК 517.937

ОБОБЩЁННОЕ РЕШЕНИЕ СИНГУЛЯРНОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-РАЗНОСТНОГО УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА В БАНАХОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

Е.Ю. Гражданцева*

Для сингулярного дифференциально-разностного уравнения второго порядка с вырожденным оператором при старшей (по времени) производной в банаховых пространствах восстанавливается обобщенное решение при помощи фундаментальной оператор-функции соответствующего этому уравнению дифференциально-разностного оператора. Фундаментальная оператор-функция, в свою очередь, строится в условиях полноты жорданова набора для вырожденного оператора при старшей производной.

Дифференциальные уравнения в банаховых пространствах с необратимым оператором при старшей (по времени) производной многие годы вызывают к себе интерес тем, что целый ряд задач прикладного характера допускают редукцию к такого рода уравнениям. Однако построить непрерывное решение таких уравнений удается не всегда, поскольку существование этих решений обеспечивается рядом дополнительных условий; это существенно сужает область применения полученных результатов. Поэтому представляется интересным строить обобщенные решения, поскольку для их существования нет необходимости в дополнительных условиях подобного рода.

Рассмотрим задачу Коши для дифференциально-разностного уравнения второго порядка вида

$$B\frac{\partial^2}{\partial t^2}u(t,x) - A\big(u(t,x-\mu) - u(t,x)\big) = f(t,x)\,, \tag{1}$$

$$u\big|_{t=0} = u_0(x)\,, \quad \frac{\partial u}{\partial t}\bigg|_{t=0} = u_1(x)\,, \tag{2}$$

* © Е.Ю. Гражданцева, 2004; Иркутский государственный технический университет (Россия); E-mail: mihail@ic.isu.ru

где A, B - замкнутые линейные операторы из E_1 в E_2, E_1 и E_2 - банаховы пространства, $\overline{D(B)} = \overline{D(A)} = E_1$, $D(B) \subset D(A)$, $R(B) = \overline{R(B)}$, B - вырожденный оператор (фредгольмов или нетеров), $f(t,x)$ - достаточно гладкая функция по t и для любого фиксированного $t \geq 0$ $f(t,x) \in BUC(R;E_2)$, $BUC(R;E_2)$ - пространство ограниченных равномерно непрерывных функций на R со значениями в E_2 [1], $u_0(x), u_1(x) \in BUC(R;E_2)$. Решение задачи (3.1)-(3.2) - $u(t,x) \in C^2(t \geq 0) \bigcap BUC(R,E_2)$.

Предполагая, что задача (1)-(2) имеет непрерывное решение $u(t,x)$, продолжим его, а также функцию $f(t,x)$ нулями при отрицательных t и введем следующие обозначения:

$$\widetilde{u}(t,x) = u(t,x)\theta(t), \quad \widetilde{f}(t,x) = f(t,x)\theta(t), \tag{3}$$

где $\theta(t)$ – функция Хевисайда.

С учетом условий (2)

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} u(t,x)\theta(t) + u_1(x)\delta(t) + u_0(x)\delta'(t) = \frac{\partial^2}{\partial t^2}\widetilde{u}(t,x) - u_1(x)\delta(t) - u_0(x)\delta'(t), \tag{4}$$

здесь и далее $\delta(t)$ - дельта-функция Дирака своего аргумента.

Тогда, согласно (3), (4), задача (1)-(2) примет вид следующего сингулярного дифференциально-разностного уравнения:

$$B\frac{\partial^2}{\partial t^2}\widetilde{u}(t,x) - A\big(\widetilde{u}(t,x-\mu) - \widetilde{u}(t,x)\big) = g(t,x), \tag{5}$$

где

$$g(t,x) = Bu_1(x)\delta(t) + Bu_0(x)\delta'(t) + \widetilde{f}(t,x). \tag{6}$$

Таким образом задача (1)-(2) свелась к построению решения обобщенного сингулярного дифференциально-разностного уравнения второго порядка (5).

Задачу об отыскании решения уравнения (5) называют обобщенной задачей Коши для исходной задачи (1)-(2).

Определение. Пусть L – дифференциальный (дифференциально-разностный) оператор. Фундаментальной оператор-функцией оператора L на классе $D'(t \geq 0)$ обобщенных функций с носителем из полупространства $t \geq 0$ называется такая обобщенная оператор-функция $U(t,x)$, которая удовлетворяет уравнению

$$L * U(t,x) * u(t,x) = u(t,x) \tag{7}$$

для любых $u(t,x) \in D'(t \geq 0)$.

Решение уравнения (5) можно найти как свертку фундаментальной оператор-функции $U(t,x)$, соответствующей дифференциально-разностному оператору [2]

$$B\delta''(t)\delta(x) - A\delta(t)\big(\delta(x-\mu) - \delta(x)\big) \tag{8}$$

рассматриваемого уравнения (5), с правой частью (6) этого уравнения.

Лемма 1. Справедливы следующие равенства:

1) $\sum\limits_{m=0}^{k}(-1)^m C_k^m \delta\big(x-(k-m)\mu\big) * \sum\limits_{l=0}^{\infty}\delta(x-l\mu) = \sum\limits_{m=0}^{k-1}(-1)^{m+1} C_{k-1}^m \delta\big(x-(k-1-m)\mu\big)$;

2) $\sum\limits_{l=0}^{\infty} C_{l+k-1}^{k-1}\big(\delta(x-(l+1)\mu) - \delta(x-l\mu)\big) = -\sum\limits_{l=0}^{\infty} C_{l+k-2}^{k-2}\delta(x-l\mu)$;

3) $\underbrace{\sum\limits_{l=0}^{\infty}\delta(x-l\mu) * \cdots * \sum\limits_{l=0}^{\infty}\delta(x-l\mu)}_{r\ раз} = \sum\limits_{l=0}^{\infty} C_{l+r-1}^{r-1}\delta(x-l\mu)$,

где $C_m^n = \dfrac{m!}{n!(m-n)!}$.

Доказательство. Согласно свойствам свертки [3] левая часть первого равенства преобразуется следующим образом:

$$\sum_{m=0}^{k}(-1)^m C_k^m \delta\left(x-(k-m)\mu\right) * \sum_{l=0}^{\infty}\delta(x-l\mu) =$$

$$= \sum_{m=0}^{k}(-1)^m \Big(C_k^m \delta\left(x-(k-m)\mu\right)+\delta\left(x-(k+1-m)\mu\right)+\delta\left(x-(k+2-m)\mu\right)+\cdots\Big).$$

Далее, после приведения подобных слагаемых в этом выражении относительно δ-функций получим правую часть первого равенства, так как, начиная с $(k+1)$ -го, слагаемые этой суммы равны нулю.

В истинности второго равенства можно убедиться простой перегруппировкой слагаемых.

Третье равенство доказывается индукцией по *r*.

Справедливы следующие теоремы.

Теорема 1 (*B* – фредгольмов оператор). Если *A, B* - замкнутые линейные операторы из E_1 в E_2, E_1 и E_2 - банаховы пространства, $\overline{D(B)} = \overline{D(A)} = E_1$, $D(B) \subset D(A)$, $R(B) = \overline{R(B)}$, *B* - фредгольмов оператор и имеет полный *A*-жорданов набор элементов $\left\{\varphi_j^{(k)}, j=\overline{1,n}, k=\overline{1,p_j}\right\}$ [4,5], то дифференциально-разностный оператор $B\delta''(t)\delta(x) - A\delta(t)\big(\delta(x-\mu)-\delta(x)\big)$ имеет на классе обобщенных функций с носителем из полупространства $t \ge 0$ фундаментальную оператор-функцию вида

$$U(t,x) = \Gamma\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(A\Gamma)^k t^{2k+1}}{(2k+1)!}\theta(t)\sum_{m=0}^{k}(-1)^m C_k^m\delta\left(x-(k-m)\mu\right) *$$

$$* \left(I\delta(t)\delta(x) + \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=0}^{p_j-1}\left\langle \bullet, \psi_j^{(i+1)}\right\rangle A\varphi_j^{(p_j)}(-1)^{p_j-i-1}\delta^{(2(p_j-i))}(t)\sum_{l=0}^{\infty}C_{l+p_j-i-1}^{p_j-i-1}\delta(x-l\mu)\right), \qquad (9)$$

где $\left\{\psi_j^{(k)}, j=\overline{1,n},\ k=\overline{1,p_j}\right\}$ - *A**-жорданов набор оператора *B**, Г - оператор Шмидта [4].

Доказательству теоремы 1 предпошлем следующие утверждения.

Лемма 2. Если $Q_j = \left\langle \bullet, \psi_j\right\rangle A\varphi_j^{(p_j)}$, $\left\{\psi_j^{(i)},\ j=\overline{1,n},\ i=\overline{1,p_j}\right\}$, *A**-жорданов набор оператора *B**, Г – оператор Шмидта [4, с.340], то справедливо равенство

$$Q_j(A\Gamma)^r Q_k = \begin{cases} 0, & при\ r \ne p_k; \\ Q_k\delta_{jk}, & при\ r = p_k. \end{cases}$$

Лемма 3. Дифференциально-разностный оператор $I\delta''(t)\delta(x) - A\Gamma\delta(t)\big(\delta(x-\mu)-\delta(x)\big)$ с ограниченным обратным оператором *A*Г имеет на классе $D'(t \ge 0)$ обобщенных функций с носителем из полупространства $t \ge 0$ фундаментальную оператор-функцию вида

$$G(t,x) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(A\Gamma)^k t^{2k+1}}{(2k+1)!}\theta(t)\sum_{m=0}^{k}(-1)^m C_k^m\delta\left(x-(k-m)\mu\right).$$

Доказательство. Действительно, $\forall u(t,x) \in D'(t \ge 0)$ в соответствие со свойствами свертки [3, с. 135-138] имеет

$$\left[I\delta''(t)\delta(x) - A\Gamma\delta(t)\big(\delta(x-\mu)-\delta(x)\big)\right] * G(t,x) * u(t,x) =$$

$$\left[\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\frac{(A\Gamma)^k t^{2k+1}}{(2k+1)!}\theta(t)\right)\sum_{m=0}^{k}(-1)^m C_k^m\delta\left(x-(k-m)\mu\right) - \right.$$

$$\left. A\Gamma\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(A\Gamma)^k t^{2k+1}}{(2k+1)!}\theta(t)\sum_{m=0}^{k}(-1)^m C_k^m\left\{\delta\left(x-(k+1-m)\mu\right)-\delta\left(x-(k-m)\mu\right)\right\}\right] * u(t,x).$$

После 2-кратного дифференцирования первого слагаемого и простой перегруппировки членов второго слагаемого этого выражения получим следующую цепочку равенств:

$$[I\delta''(t)\delta(x) - A\Gamma\delta(t)(\delta(x-\mu)-\delta(x))] * G(t,x) * u(t,x) =$$

$$= \left[I\delta(t)\delta(x) + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(A\Gamma)^{k+1} t^{2k+1}}{(2k+1)!}\theta(t) \sum_{m=0}^{k+1} (-1)^m C_{k+1}^m \delta(x-(k+1-m)\mu) - \right.$$

$$\left. - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(A\Gamma)^{k+1} t^{2k+1}}{(2k+1)!}\theta(t) \sum_{m=0}^{k+1} (-1)^m C_{k+1}^m \delta(x-(k+1-m)\mu) \right] * u(t,x) = I\delta(t)\delta(x) * u(t,x) = u(t,x) .$$

Таким образом, оператор-функция $G(t,x)$ удовлетворяет определению фундаментальной оператор-функции для дифференциально-разностного оператора $I\delta''(t)\delta(x) - A\Gamma\delta(t)(\delta(x-\mu)-\delta(x))$, что доказывает лемму 3.

Доказательство теоремы 1. Убедимся, что (9) является фундаментальной оператор-функцией дифференциально-разностного оператора (8), подставив в левую часть (7) $U(t,x)$ вида (9) и вместо L оператор (8), то есть проверим справедливость равенства

$$[B\delta''(t)\delta(x) - A\delta(t)(\delta(x-\mu)-\delta(x))] * \left[\Gamma \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(A\Gamma)^{k} t^{2k+1}}{(2k+1)!}\theta(t) \sum_{m=0}^{k} (-1)^m C_{k}^m \delta(x-(k-m)\mu) * \right.$$

$$\left. * \left(I\delta(t)\delta(x) + \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=0}^{p_j-1} \left\langle \bullet, \psi_j^{(i+1)} \right\rangle z_j (-1)^{p_j-i-1} \delta^{(2(p_j-i))}(t) \sum_{l=0}^{\infty} C_{l+p_j-i-1}^{p_j-i-1} \delta(x-l\mu) \right) \right] * u(t,x) = u(t,x) . \qquad (10)$$

Так как [3, 4, 5],

$\left\langle \bullet, \psi_j^{(i+1)} \right\rangle z_j = \left\langle \bullet, \psi_j \right\rangle z_j (A\Gamma)^j = Q_j (A\Gamma)^j$, где $Q_j = \left\langle \bullet, \psi_j \right\rangle z_j$, $i = \overline{1,n}$, $j = \overline{1,n}$;

$\Gamma Y(t,x) = \Gamma\delta(t)\delta(x) * Y(t,x), \quad \forall Y(t,x)$;

$B\Gamma = I - Q, \ Q = \sum_{j=1}^{n} Q_j$,

то в силу леммы 3 левая часть уравнения (10) преобразуется в выражение следующего вида:

$$\left[I\delta(t)\delta(x) - Q \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\frac{(A\Gamma)^k t^{2k+1}}{(2k+1)!} \theta(t) \right) \sum_{m=0}^{k} (-1)^m C_k^m \delta(x-(k-m)\mu) - \right.$$

$$- Q \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(A\Gamma)^k t^{2k+1}}{(2k+1)!} \theta(t) \sum_{m=0}^{k+1} (-1)^m C_{k+1}^m \delta(x-k+1-m)\mu) *$$

$$\left. * \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=0}^{p_j-1} Q_j (A\Gamma)^i (-1)^{p_j-i-1} \delta^{(2(p_j-i))}(t) \sum_{l=0}^{\infty} C_{l+p_j-i-1}^{p_j-i-1} \delta(x-l\mu) \right] * u(t,x) . \qquad (11)$$

Далее, поскольку согласно [4,5]

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left(-Q(A\Gamma)^{k+1} + Q(A\Gamma)^{k+p_j+1} + Q(A\Gamma)^{k+p_j} Q(A\Gamma) + \cdots + Q(A\Gamma)^{k+2} Q(A\Gamma)^{p_j-1} \right) = 0 ,$$

то, с учетом лемм 1 и 2, а также свойств свертки обобщенных функций [3], после дифференцирования выражения (11) уравнение (10) примет вид

$$I\delta(t)\delta(x) * u(t,x) = u(t,x) .$$

Таким образом, теорема 1 доказана.

Определение. Индексом нетерова оператора B называется число $\nu = n - m$, где $n = \dim N(B)$, $m = \dim N(B^*)$.

Теорема 2 (B - нетеров оператор с положительным индексом). Если A, B - замкнутые линейные операторы из E_1 в E_2, E_1 и E_2 - банаховы пространства, $\overline{D(B)} = \overline{D(A)} = E_1$, $D(B) \subset D(A)$, $R(B) = \overline{R(B)}$, B имеет полный A-жорданов набор элементов $\left\{ \varphi_j^{(k)}, j = \overline{1,n}, k = \overline{1,p_j} \right\}$, $\left\{ \psi_s^{(k)}, s = \overline{1,m}, k = \overline{1,p_s} \right\}$ [5,6,7], $n > m$, $n = \dim N(B)$, $m = \dim N(B^*)$, то дифференциально-разностный оператор $B\delta''(t)\delta(x) - A\delta(t)(\delta(x-\mu)-\delta(x))$ имеет на классе обобщенных функций с носителем из полупространства $t \geq 0$ фундаментальную оператор-функцию вида

$$V(t,x)=B^{+}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(AB^{+})^{k}t^{2k+1}}{(2k+1)!}\left(I-\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=0}^{p_j-1}\left\langle \bullet,\psi_j^{(i+1)}\right\rangle A\varphi_j^{(p_j-i)}\right)\theta(t)\sum_{m=0}^{k}(-1)^{m}C_k^m\delta\left(x-(k-m)\mu\right)+$$

$$+\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=0}^{p_j-1}\left\{\sum_{i=0}^{p_j-1-k}(-1)^{k}\left\langle \bullet,\psi_j^{(i+1)}\right\rangle \varphi_j^{(p_j-k-i)}\right\}\delta^{(2k)}(t)\sum_{l=0}^{\infty}C_{l+k}^{k}\delta(x-l\mu)\,, \tag{12}$$

где $\psi_j^{(i)}$, $j=\overline{m+1,n}$, $i=\overline{2,p_j}$, - произвольные функционалы и $\psi_j^{(1)}=0$.

Доказательство. Подставив, как и прежде, в уравнение (7) вместо L дифференциально-разностный оператор (8), а вместо $U(t,x)$ оператор-функцию $V(t,x)$ вида (12), получим равенство

$$\left[B\delta''(t)\delta(x)-A\delta(t)\left(\delta(x-\mu)-\delta(x-\mu)\right)\right]*$$

$$*\left[B^{+}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(AB^{+})^{k}t^{2k+1}}{(2k+1)!}\left(I-\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=0}^{p_j-1}\left\langle \bullet,\psi_j^{(i+1)}\right\rangle A\varphi_j^{(p_j-1)}\right)\theta(t)\sum_{m=0}^{k}(-1)^{m}C_k^m\delta\left(x-(k-m)\mu\right)+\right.$$

$$\left.+\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=0}^{p_j-1}\left\{\sum_{i=0}^{p_j-1-k}(-1)^{k}\left\langle \bullet,\psi_j^{(i+1)}\right\rangle \varphi_j^{(p_j-k-i)}\right\}\delta^{(2k)}(t)\sum_{l=0}^{\infty}C_{l+k}^{k}\delta(x-l\mu)\right]*u(t,x)=u(t,x)\,. \tag{13}$$

Учитывая полноту A-жорданова набора оператора B [5,6,7], после приведения подобных слагаемых в левой части (13) получим следующую цепочку равенств:

$$\left[I\delta(t)\delta(x)-\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left\{Q\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(A\Gamma)^{k}t^{2k+1}}{(2k+1)!}\left(I-\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=0}^{p_j-1}\left\langle \bullet,\psi_j^{(i+1)}\right\rangle A\varphi_j^{(p_j-1)}\right)\theta(t)\times\right.\right.$$

$$\left.\left.\times\sum_{m=0}^{k+1}(-1)^{m}C_{k+1}^m\delta\left(x-(k+1-m)\mu\right)\right\}\right]*u(t,x)=I\delta(t)\delta(x)*u(t,x)=u(t,x)\,,$$

где $Q=\sum_{s=1}^{m}\left\langle \bullet,\psi_s\right\rangle A\varphi_s^{(p_s+1)}$. Теорема 2 доказана.

Теорема 3 (B - нетеров оператор с отрицательным индексом). Если A, B - замкнутые линейные операторы из E_1 в E_2, E_1 и E_2 - банаховы пространства, $\overline{D(B)}=\overline{D(A)}=E_1$, $D(B)\subset D(A)$, $R(B)=\overline{R(B)}$, B имеет полный A-жорданов набор элементов $\left\{\varphi_j^{(k)}, j=\overline{1,n}, k=\overline{1,p_j}\right\}$, $\left\{\psi_s^{(k)}, s=\overline{1,m}, k=\overline{1,p_s}\right\}$ [5,6,7], $n<m$, $n=\dim N(B)$, $m=\dim N(B^*)$, то дифференциально-разностный оператор $B\delta''(t)\delta(x)-A\delta(t)\left(\delta(x-\mu)-\delta(x)\right)$ имеет фундаментальную оператор-функцию вида (12) на подклассе функций $u(t,x)\in D'(t\geq 0)$, удовлетворяющих условиям

$$Q_s\delta(t)\delta(x)*\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(AB^{+})^{k}t^{2k+1}}{(2k+1)!}\theta(t)\sum_{m=0}^{k}(-1)^{m}C_k^m\delta\left(x-(k-m)\mu\right)*u(t,x)=0 \tag{14}$$

для любых $s=\overline{n+1,m}$.

Доказательство. Повторяя рассуждения доказательства теоремы 2, с учетом условий (14) получим тождество, что говорит о справедливости теоремы 3.

Все теоремы допускают обобщение на случай дифференциально-разностных операторов более высокого порядка, а именно справедливы следующие теоремы.

Теорема 4 (B – фредгольмов оператор). Если A, B - замкнутые линейные операторы из E_1 в E_2, E_1 и E_2 - банаховы пространства, $\overline{D(B)}=\overline{D(A)}=E_1$, $D(B)\subset D(A)$, $R(B)=\overline{R(B)}$, B - фредгольмов оператор и имеет полный A-жорданов набор элементов $\left\{\varphi_j^{(k)}, j=\overline{1,n}, k=\overline{1,p_j}\right\}$ [4,5], то дифференциально-разностный оператор $B\delta^{(r)}(t)\delta(x)-A\delta(t)\left(\delta(x-\mu)-\delta(x)\right)$ имеет на классе обобщенных функций с носителем из полупространства $t\geq 0$ фундаментальную оператор-функцию вида

$$U_r(t,x)=\Gamma\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(A\Gamma)^{k}t^{r(k+1)-1}}{(r(k+1)-1)!}\theta(t)\sum_{m=0}^{k}(-1)^{m}C_k^m\delta\left(x-(k-m)\mu\right)*$$

$$* \left(I\delta(t)\delta(x) + \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=0}^{p_j-1} \left\langle \bullet, \psi_j^{(i+1)} \right\rangle A\varphi_j^{(p_j)} (-1)^{p_j-i-1} \delta^{(r(p_j-i))}(t) \sum_{l=0}^{\infty} C_{l+p_j-i-1}^{p_j-i-1} \delta(x-l\mu) \right), \tag{15}$$

где $\left\{\psi_j^{(k)}, j=\overline{1,n},\ k=\overline{1,p_j}\right\}$ - A*-жорданов набор оператора B*, Г - оператор Шмидта [3].

Теорема 5 (B - нетеров оператор с положительным индексом). Если A, B - замкнутые линейные операторы из E_1 в E_2, E_1 и E_2 - банаховы пространства, $\overline{D(B)} = \overline{D(A)} = E_1$, $D(B) \subset D(A)$, $R(B) = \overline{R(B)}$, B имеет полный A-жорданов набор элементов $\left\{\varphi_j^{(k)}, j=\overline{1,n}, k=\overline{1,p_j}\right\}$, $\left\{\psi_s^{(k)}, s=\overline{1,m}, k=\overline{1,p_s}\right\}$ [5,6,7], $n > m$, $n = \dim N(B)$, $m = \dim N(B^*)$, то дифференциально-разностный оператор $B\delta^{(r)}(t)\delta(x) - A\delta(t)(\delta(x-\mu)-\delta(x))$ имеет на классе обобщенных функций с носителем из полупространства $t \ge 0$ фундаментальную оператор-функцию вида

$$V_r(t,x) = B^+ \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(AB^+)^k t^{r(k+1)-1}}{(r(k+1)-1)!} \left(I - \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=0}^{p_j-1} \left\langle \bullet, \psi_j^{(i+1)} \right\rangle A\varphi_j^{(p_j-i)} \right) \theta(t) \sum_{m=0}^{k} (-1)^m C_k^m \delta\left(x-(k-m)\mu\right) +$$

$$+ \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=0}^{p_j-1} \left\{ \sum_{i=0}^{p_j-1-k} (-1)^k \left\langle \bullet, \psi_j^{(i+1)} \right\rangle \varphi_j^{(p_j-k-i)} \right\} \delta^{(rk)}(t) \sum_{l=0}^{\infty} C_{l+k}^{k} \delta(x-l\mu), \tag{16}$$

где $\psi_j^{(i)}$, $j=\overline{m+1,n}$, $i=\overline{2,p_j}$ - произвольные функционалы и $\psi_j^{(1)} \equiv 0$.

Теорема 6 (B - нетеров оператор с отрицательным индексом). Если A, B - замкнутые линейные операторы из E_1 в E_2, E_1 и E_2 - банаховы пространства, $\overline{D(B)} = \overline{D(A)} = E_1$, $D(B) \subset D(A)$, $R(B) = \overline{R(B)}$, B имеет полный A-жорданов набор элементов $\left\{\varphi_j^{(k)}, j=\overline{1,n}, k=\overline{1,p_j}\right\}$, $\left\{\psi_s^{(k)}, s=\overline{1,m}, k=\overline{1,p_s}\right\}$ [5,6,7], $n < m$, $n = \dim N(B)$, $m = \dim N(B^*)$, то дифференциально-разностный оператор $B\delta^{(r)}(t)\delta(x) - A\delta(t)(\delta(x-\mu)-\delta(x))$ имеет фундаментальную оператор-функцию вида (16) на подклассе функций $u(t,x) \in D'(t \ge 0)$, удовлетворяющих условиям

$$Q_s\delta(t)\delta(x) * \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(AB^+)^k t^{r(k+1)-1}}{(r(k+1)-1)!} \theta(t) \sum_{m=0}^{k} (-1)^m C_k^m \delta\left(x-(k-m)\mu\right) * u(t,x) = 0$$

для любых $s = \overline{n+1,m}$.

Замечание 1. В условиях теоремы 4 и согласно свойствам свертки обобщенных функций оператор-функция (15) может быть представима в виде

$$U_r(t,x) = \Gamma \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(A\Gamma)^k t^{r(k+1)-1}}{(r(k+1)-1)!} \left(I - \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=0}^{p_j-1} \left\langle \bullet, \psi_j^{(i+1)} \right\rangle A\varphi_j^{(p_j-i)} \right) \theta(t) \sum_{m=0}^{k} (-1)^m C_k^m \delta\left(x-(k-m)\mu\right) +$$

$$+ \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=0}^{p_j-1} \left\{ \sum_{i=0}^{p_j-1-k} (-1)^k \left\langle \bullet, \psi_j^{(i+1)} \right\rangle \varphi_j^{(p_j-k-i)} \right\} \delta^{(rk)}(t) \sum_{l=0}^{\infty} C_{l+k}^{k} \delta(x-l\mu).$$

Замечание 2. Как было показано выше, решение обобщенной задачи Коши примет вид свертки фундаментальной оператор-функции $U(t,x)$ с функцией вида (6), что и будет являться обобщенным решением задачи Коши (1)-(2). Однако, если в задаче (1)-(2) функции $u_0(x)$, $u_1(x)$ и $f(t,x)$ подобрать таким образом, чтобы в обобщенном решении сингулярная составляющая обратилась в нуль, то полученное решение совпадет с непрерывным решением поставленной задачи. Кроме того, условия для функций $u_0(x)$, $u_1(x)$ и $f(t,x)$, обеспечивающие наличие непрерывного решения задачи (1)-(2), будут служить, в свою очередь, достаточными условиями существования обобщенного решения этой задачи.

Автор выражает глубокую благодарность доценту кафедры математического анализа ИМЭ ИГУ М.В. Фалалееву и заведующему кафедрой профессору Н.А.Сидорову за постановку задачи, а также сотрудникам кафедры за полезные обсуждения представленных здесь результатов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Голдстейн Дж. Полугруппы линейных операторов и их применения / Дж.Голдстейн. – Киев: Выща шк., 1989.
2. Sidorov N., Loginov B., Sinitsyn A., Falaleev M. Lypunov-Schnidt Method in Nonlinear Analysis and Applications – Kluwer Academic Publishers, 2002, 566 p.
3. Владимиров В.С. Уравнения математической физики / В.С. Владимиров. – М.: Наука, 1981.
4. Вайнберг М.М. Ветвление решений нелинейных уравнений / М.М.Вайнберг, В.А.Треногин. - М.: Наука, 1969.
5. Сидоров Н.А. О применении некоторых результатов теории ветвления при решении дифференциальных уравнений с вырождением / Н.А.Сидоров, О.А.Романова // Дифференциальные уравнения. – 1983. – Т. 19, № 9.
6. Русак Ю.Б. Жорданова структура линейных нетеровских оператор-функций / Ю.Б. Русак // Дифференциальные уравнения и их приложения. – Ташкент, ФАН, 1979. – С. 130-138.
7. Сидоров Н.А. Уравнения с частными производными с оператором конечного индекса при главной части / Н.А.Сидоров, О.А.Романова, Е.Б.Благодатская. – Иркутск, 1992 (Препринт / ИрВЦ СО РАН).

THE GENERALIZED DECISION FOR THE SINGULAR DIFFERENTIAL-DIFFERENCE EQUATION OF SECOND ORDER IN BANACH SPACES

E.YU. Grazhdantseva

The decision for singular differential-difference equation of second order with the degenerated operator in the main part in Banach spaces construct at fundamental operator-function of differential-difference operator for corresponding this equation. And the fundamental operator-function, in its turn, is constructed on conditions of a complete Jordan set for degenerated operator in the main part.