

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ТРЕХМЕРНЫХ ТЕЧЕНИЙ ИДЕАЛЬНОЙ ЖИДКОСТИ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ВЕКТОРНОГО ПОТЕНЦИАЛА И ФУНКЦИИ ВИХРЯ

Н.Ю. Шокина*

Данная работа служит продолжением исследований в области численного моделирования на криволинейных адаптивных сетках трехмерных стационарных задач протекания идеальной несжимаемой жидкости через каналы сложной геометрии с использованием новых зависимых переменных: векторного потенциала ψ и вектора вихря ω [1]. Использована аппроксимация интегрального соотношения для векторного потенциала, имеющая 19-точечный шаблон. Приведены результаты численных расчетов течения жидкости в трубе с поворотом потока на 180° .

В [1] для расчета компонент векторного потенциала был применен трехмерный аналог схемы "косой крест", которая успешно использовалась ранее [2] для расчета функции тока плоскопараллельного течения. Однако последующие исследования показали, что разностный оператор, соответствующий такой схеме, может вырождаться. Кроме того, трехмерная схема типа "косой крест" имеет 27-точечный шаблон и требует при программной реализации большого объема памяти для хранения значений коэффициентов разностных уравнений. По этим причинам в данной работе использована другая аппроксимация уравнений для векторного потенциала, имеющая меньший (19-точечный) шаблон.

Для расчета вектора вихря использован аналог неявной двухмерной схемы предиктор-корректор из [3], применяемой в настоящей работе для решения гиперболической системы из трех уравнений. Необходимые для расчета значения вектора вихря на входе в область получаются с использованием заданных значений скорости на входе и вычисленных на предыдущей итерации значений векторного потенциала в приграничных узлах.

Для построения трехмерных расчетных сеток используется метод эквираспределения [4].

С помощью разработанного алгоритма решена задача о течении жидкости в изогнутой трубе, на входе которой задан сдвиговый поток. Полученные результаты качественно согласуются с выводами работ других авторов [5]-[9] о возникновении вторичных течений в искривленной части трубы.

Математическая постановка

Пусть Ω – односвязная область в пространстве декартовых координат x^1, x^2, x^3 . Математическая постановка задачи об установившемся протекании идеальной несжимаемой жидкости через область Ω заключается в определении вектора скорости \mathbf{u} и давления p , удовлетворяющих в Ω уравнениям неразрывности и движения:

$$\operatorname{div} \mathbf{u} = 0, \quad (1)$$

$$(\mathbf{u} \cdot \nabla) \cdot \mathbf{u} + \nabla p = 0, \quad \mathbf{x} = (x^1, x^2, x^3) \in \Omega \quad (2)$$

и краевым условиям на границе $\Gamma = \partial\Omega$:

$$\mathbf{u} \Big|_{x \in \Gamma_1} = \mathbf{v}_1(\mathbf{x}), \quad \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} \Big|_{x \in \Gamma_0} = 0, \quad \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} \Big|_{x \in \Gamma_2} = v_2(\mathbf{x}), \quad (3)$$

* © Н.Ю.Шокина, 2004, High Performance Computing Center Stuttgart (HLRS), Germany; Институт вычислительных технологий СО РАН, , Россия. E-mail: shokina@hlrs.de

где $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$, u_α ($\alpha = 1, 2, 3$) – компоненты вектора скорости в направлении осей Ox^α , $\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x^1}, \frac{\partial}{\partial x^2}, \frac{\partial}{\partial x^3} \right)$, \mathbf{n} – внешняя нормаль к Γ , $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_0 \cup \Gamma_2$, Γ_1 – вход в Ω ($\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{n} < 0$), Γ_0 – непроницаемая часть границы, Γ_2 – выход из Ω ($v_2 > 0$), $\Gamma_1 \cap \Gamma_2 = \emptyset$.

Для единственности решения необходимо в дополнение к условиям (3) задать в некоторой точке $\mathbf{x}_0 \in \bar{\Omega}$ давление:

$$p(\mathbf{x}_0) = p_0.$$

Кроме того, для поставленной задачи должно выполняться необходимое условие разрешимости, выражающее собой выполнение закона баланса массы:

$$\int_{\Gamma_1} v(\mathbf{x}) d\Gamma_1 = - \int_{\Gamma_2} v(\mathbf{x}) d\Gamma_2, \quad (4)$$

где

$$v(\mathbf{x}) = \begin{cases} \mathbf{v}_1(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x}), & \mathbf{x} \in \Gamma_1, \\ 0, & \mathbf{x} \in \Gamma_0, \\ v_2(\mathbf{x}), & \mathbf{x} \in \Gamma_2. \end{cases} \quad (5)$$

Введем новые зависимые переменные: векторный потенциал $\boldsymbol{\psi} = (\psi_1, \psi_2, \psi_3)$ и вектор вихря $\boldsymbol{\omega} = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)$, связанные с вектором скорости формулами

$$\boldsymbol{\omega} = \text{rot } \mathbf{u}, \quad (6)$$

$$\mathbf{u} = \text{rot } \boldsymbol{\psi}. \quad (7)$$

Система уравнений для новых переменных имеет вид

$$\Delta \boldsymbol{\psi} = -\boldsymbol{\omega} + \nabla(\text{div } \boldsymbol{\psi}), \quad (8)$$

$$(\boldsymbol{\omega} \cdot \nabla) \cdot \mathbf{u} - (\mathbf{u} \cdot \nabla) \cdot \boldsymbol{\omega} = 0. \quad (9)$$

Из формул (6), (7) при учете равенства

$$\text{div}(\text{rot } \mathbf{a}) = 0,$$

справедливого для произвольного векторного поля \mathbf{a} , немедленно вытекают следствия:

$$\text{div } \mathbf{u} = 0, \quad (10)$$

$$\text{div } \boldsymbol{\omega} = 0. \quad (11)$$

Таким образом, уравнение неразрывности (1) выполняется автоматически, а условие (11) необходимо при разрешимости задачи в новой формулировке. Кроме того, отсутствует давление как неизвестная функция.

Постановка задачи в криволинейной системе координат

Пусть

$$x^\alpha = x^\alpha(q^1, q^2, q^3), \quad \alpha = 1, 2, 3 \quad (12)$$

есть взаимно-однозначное невырожденное отображение единичного куба Q в пространстве координат q^1, q^2, q^3 на область Ω (рис. 1), при этом вход Γ_1 служит образом грани $q^2 = 0$ (далее для этой грани мы будем использовать обозначение γ_1), а выход Γ_2 – образом грани $q^2 = 1$ (γ_2). Предполагается, что непроницаемая часть границы Γ_0 состоит из четырех частей Γ_0^{left} , Γ_0^{right} , Γ_0^{low} и Γ_0^{up} , которые при отображении (12) являются образами соответственно граней $q^1 = 0$ (γ_0^{left}), $q^1 = 1$ (γ_0^{right}), $q^3 = 0$ (γ_0^{low}) и $q^3 = 1$ (γ_0^{up}).

Уравнения (8), (9), записанные в новых криволинейных координатах, имеют вид

$$\frac{\partial}{\partial q^\alpha} \left(J g^{\alpha\gamma} \frac{\partial \psi_\beta}{\partial q^\gamma} \right) = -J \omega_\beta + \frac{\partial}{\partial q^\alpha} \left(J g^{\alpha\gamma} \frac{\partial \psi_\gamma}{\partial q^\beta} \right) + v_\alpha \varepsilon^{\alpha\mu\gamma} \frac{\partial g_{\beta\gamma}}{\partial q^\mu}, \quad \beta = 1, 2, 3, \quad (13)$$

$$\frac{\partial}{\partial q^\alpha} J (v^\alpha \omega^\beta - v^\beta \omega^\alpha) = 0, \quad \beta = 1, 2, 3, \quad (14)$$

где ψ_β, ω_β – ковариантные компоненты вектор-функций ψ, ω . По повторяющимся индексам α, γ, μ ведется суммирование от 1 до 3:

$$\varepsilon^{\alpha\mu\gamma} = \begin{cases} 1, & \text{если } \alpha, \mu, \gamma \text{ - четная перестановка чисел } 1, 2, 3, \\ -1, & \text{если } \alpha, \mu, \gamma \text{ - нечетная перестановка чисел } 1, 2, 3, \\ 0, & \text{если среди чисел } \alpha, \mu, \gamma \text{ есть равные.} \end{cases}$$

$g^{\alpha\gamma}$ – элементы обратной матрицы для матрицы компонент $g_{\alpha\gamma}$ метрического тензора отображения (12), J – якобиан отображения (12), $J > 0$, v_α и v^α – ковариантные и контравариантные компоненты вектора скорости соответственно,

$$v_\alpha = g_{\alpha\gamma} v^\gamma, \quad \omega_\alpha = g_{\alpha\gamma} \omega^\gamma, \quad \alpha = 1, 2, 3, \quad (15)$$

$$v^1 = \frac{1}{J} \left(\frac{\partial \psi_3}{\partial q^2} - \frac{\partial \psi_2}{\partial q^3} \right), \quad v^2 = \frac{1}{J} \left(\frac{\partial \psi_1}{\partial q^3} - \frac{\partial \psi_3}{\partial q^1} \right), \quad v^3 = \frac{1}{J} \left(\frac{\partial \psi_2}{\partial q^1} - \frac{\partial \psi_1}{\partial q^2} \right), \quad (16)$$

$$\omega^1 = \frac{1}{J} \left(\frac{\partial v_3}{\partial q^2} - \frac{\partial v_2}{\partial q^3} \right), \quad \omega^2 = \frac{1}{J} \left(\frac{\partial v_1}{\partial q^3} - \frac{\partial v_3}{\partial q^1} \right), \quad \omega^3 = \frac{1}{J} \left(\frac{\partial v_2}{\partial q^1} - \frac{\partial v_1}{\partial q^2} \right). \quad (17)$$

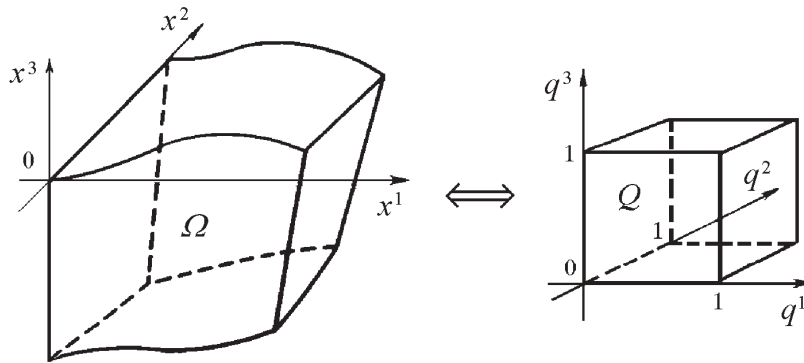


Рис. 1. Физическая область Ω и вычислительная область Q

На гранях куба $q^\alpha = 0$ и $q^\alpha = 1$, $\alpha = 1, 2, 3$, $\alpha \neq \beta$ значения ковариантных компонент ψ_β , $\beta = 1, 2, 3$ определяются с помощью соотношений (16), при требовании выполнения на границе Γ области Ω краевого условия для нормальной составляющей скорости:

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} \Big|_{x \in \Gamma} = v(\mathbf{x}). \quad (18)$$

Граничные значения для вектора вихря отсутствуют в исходной постановке задачи. Способ для их вычисления будет указан ниже.

Разностные уравнения для векторного потенциала

Сеточные функции определены в следующих узлах разнесенной сетки:

- контравариантные компоненты $g^{\alpha\beta}$ метрического тензора, якобиан J и ковариантные компоненты векторного потенциала ψ_β – в целых узлах \mathbf{q}_j , $j = j_1, j_2, j_3$ равномерной прямоугольной сетки \bar{Q}_h с шагами h_1, h_2, h_3 ;
- контравариантные компоненты v^α вектора скорости – в центрах граней $q^\alpha = \text{const}$ ячеек сетки;
- контравариантные компоненты вихря ω^α – в центрах граней $q^2 = \text{const}$.

Области определения ковариантных и контравариантных компонент векторов совпадают.

Разностные уравнения для сеточной функции ψ получаются интегро-интерполяционным методом путем аппроксимации интегральных соотношений – интегральных аналогов дифференциальных уравнений (13). Например, для первой компоненты ψ_1 интегральное соотношение имеет такой вид:

$$\begin{aligned}
 & \iint_C Jg^{1\gamma} \frac{\partial \psi_1}{\partial q^\gamma} dq^2 dq^3 - Jg^{2\gamma} \frac{\partial \psi_1}{\partial q^\gamma} dq^1 dq^3 + Jg^{3\gamma} \frac{\partial \psi_1}{\partial q^\gamma} dq^1 dq^2 = \\
 & = \iiint_{D_C} \left(-J\omega_1 + \nu_\alpha \varepsilon^{\alpha\mu\gamma} \frac{\partial g_{1\gamma}}{\partial q^\mu} \right) dq^1 dq^2 dq^3 - \\
 & - \iint_C \psi_\gamma \frac{\partial Jg^{1\gamma}}{\partial q^1} dq^2 dq^3 - \psi_\gamma \frac{\partial Jg^{2\gamma}}{\partial q^1} dq^1 dq^3 + \psi_\gamma \frac{\partial Jg^{3\gamma}}{\partial q^1} dq^1 dq^2.
 \end{aligned}
 \tag{19}$$

При получении разностных уравнений для внутренних узлов в качестве C берется поверхность параллелепипеда D_C , показанного на рис. 2. Шаблон разностного уравнения 19-точечный, и он обладает тем свойством, что в каждом из сечений $q^\alpha = \text{const}$ плоскостями, проходящими через точку \mathbf{q}_j , лежит 9 узлов шаблона.

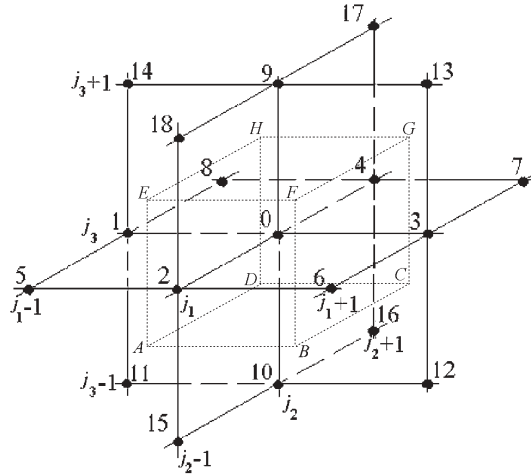


Рис. 2. Поверхность интегрирования и шаблон разностных уравнений для компонент векторного потенциала

Для каждого поверхностного интеграла из (19) применяется трехмерный аналог формулы прямоугольников с использованием в ней значений подынтегральной функции в центрах прямоугольников.

В результате использования подобных аппроксимаций на всех других гранях поверхности C получается 19-точечное разностное уравнение во внутреннем узле \mathbf{q}_j :

$$\left(\sum_{k=0}^{18} \alpha_k \psi_1(k) \right)_j = P_j, \tag{20}$$

где P_j – аппроксимация правой части соотношения (19), $\psi_1(k)$ – значение сеточной функции ψ_1 в узле, имеющем в шаблоне номер k .

Коэффициенты α_k уравнения (20) не зависят от правой части, так как она рассчитывается с использованием величин, вычисленных на предыдущей итерации. Коэффициент α_0 вычисляется по формуле

$$\alpha_0 = -\sum_{k=1}^{18} \alpha_k.$$

Аналогично выводятся разностные уравнения во внутренних узлах для второй и третьей ковариантных компонент векторного потенциала. Эти уравнения также можно записать в виде (20), причем для внутренних узлов сетки коэффициенты α_k будут одинаковыми для всех трех компонент ψ_β , отличие будет лишь в правых частях уравнений (20).

Количество уравнений (20) совпадает с количеством внутренних узлов \mathbf{q}_j сетки \bar{Q}_h . Однако значения ψ_1 неизвестны не только во внутренних узлах, но и, как это указано ранее, в узлах левой и правой грани куба Q . Поэтому к выписанным уравнениям добавляются разностные уравнения для ψ_1 во внутренних узлах грани γ_0^{left} и γ_0^{right} . Поясним вывод этих дополнительных уравнений на примере грани γ_0^{left} . Запишем уравнение (13) при $\beta = 1$ в следующем виде:

$$\begin{aligned}
 & \frac{\partial}{\partial q^1} \left(Jg^{1\gamma} \frac{\partial \Psi_1}{\partial q^\gamma} \right) + \frac{\partial}{\partial q^2} \left(Jg^{2\gamma} \frac{\partial \Psi_1}{\partial q^\gamma} \right) + \frac{\partial}{\partial q^3} \left(Jg^{3\gamma} \frac{\partial \Psi_1}{\partial q^\gamma} \right) = \\
 & = -J\omega_1 + \frac{\partial}{\partial q^1} \left(Jg^{11} \frac{\partial \Psi_1}{\partial q^1} + Jg^{12} \frac{\partial \Psi_1}{\partial q^2} + Jg^{13} \frac{\partial \Psi_1}{\partial q^3} \right) + \\
 & + \frac{\partial}{\partial q^1} \left(Jg^{12} \frac{\partial \Psi_2}{\partial q^1} + Jg^{13} \frac{\partial \Psi_3}{\partial q^1} \right) + \frac{\partial}{\partial q^2} \left(Jg^{22} \frac{\partial \Psi_2}{\partial q^1} + Jg^{23} \frac{\partial \Psi_3}{\partial q^1} \right) + \\
 & + \frac{\partial}{\partial q^3} \left(Jg^{23} \frac{\partial \Psi_2}{\partial q^1} + Jg^{33} \frac{\partial \Psi_3}{\partial q^1} \right) + \frac{\partial \Psi_1}{\partial q^1} \left[\frac{\partial}{\partial q^2} (Jg^{12}) + \frac{\partial}{\partial q^3} (Jg^{13}) \right] - \\
 & - \frac{\partial \Psi_1}{\partial q^2} \frac{\partial}{\partial q^1} (Jg^{12}) - \frac{\partial \Psi_1}{\partial q^3} \frac{\partial}{\partial q^1} (Jg^{13}) + v_\alpha \varepsilon^{\alpha\mu\gamma} \frac{\partial g_{1\gamma}}{\partial q^\mu}.
 \end{aligned} \tag{21}$$

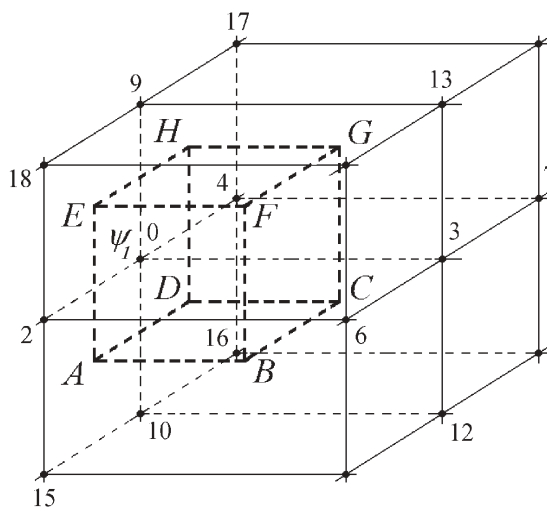


Рис. 3. Поверхность интегрирования и шаблон разностных уравнений для первой компоненты векторного потенциала на левой грани вычислительной области

Пусть \mathbf{q}_j – внутренний узел грани γ_0^{left} . Для поверхности интегрирования, изображенной на рис. 3, интегральное соотношение для уравнения (21) запишем как

$$\begin{aligned}
 & \iint_{BCGF} Jg^{1\gamma} \frac{\partial \Psi_1}{\partial q^\gamma} dq^2 dq^3 - \iint_{ADHE} Jg^{1\gamma} \frac{\partial \Psi_1}{\partial q^\gamma} dq^2 dq^3 + \iint_{DCGH} Jg^{2\gamma} \frac{\partial \Psi_1}{\partial q^\gamma} dq^1 dq^3 - \\
 & - \iint_{ABFE} Jg^{2\gamma} \frac{\partial \Psi_1}{\partial q^\gamma} dq^1 dq^3 + \iint_{EFGH} Jg^{3\gamma} \frac{\partial \Psi_1}{\partial q^\gamma} dq^1 dq^2 - \iint_{ABCD} Jg^{3\gamma} \frac{\partial \Psi_1}{\partial q^\gamma} dq^1 dq^2 = \\
 & = -\iiint_{D_C} J\omega_1 dq^1 dq^2 dq^3 + \iint_{BCGF} Jg^{1\gamma} \frac{\partial \Psi_1}{\partial q^\gamma} dq^2 dq^3 - \iint_{ADHE} Jg^{1\gamma} \frac{\partial \Psi_1}{\partial q^\gamma} dq^2 dq^3 + \\
 & + \iint_{BCGF} \left(Jg^{12} \frac{\partial \Psi_2}{\partial q^1} + Jg^{13} \frac{\partial \Psi_3}{\partial q^1} \right) dq^2 dq^3 - \iint_{ADHE} \left(Jg^{12} \frac{\partial \Psi_2}{\partial q^1} + Jg^{13} \frac{\partial \Psi_3}{\partial q^1} \right) dq^2 dq^3 + \\
 & + \iint_{DCGH} \left(Jg^{22} \frac{\partial \Psi_2}{\partial q^1} + Jg^{23} \frac{\partial \Psi_3}{\partial q^1} \right) dq^1 dq^3 - \iint_{ABFE} \left(Jg^{22} \frac{\partial \Psi_2}{\partial q^1} + Jg^{23} \frac{\partial \Psi_3}{\partial q^1} \right) dq^1 dq^3 + \\
 & + \iint_{EFGH} \left(Jg^{23} \frac{\partial \Psi_2}{\partial q^1} + Jg^{33} \frac{\partial \Psi_3}{\partial q^1} \right) dq^1 dq^2 - \iint_{ABCD} \left(Jg^{23} \frac{\partial \Psi_2}{\partial q^1} + Jg^{33} \frac{\partial \Psi_3}{\partial q^1} \right) dq^1 dq^2 + \\
 & + \iiint_{D_C} \left[\frac{\partial \Psi_1}{\partial q^1} \left(\frac{\partial}{\partial q^2} (Jg^{12}) + \frac{\partial}{\partial q^3} (Jg^{13}) \right) - \right. \\
 & \left. - \frac{\partial \Psi_1}{\partial q^2} \frac{\partial}{\partial q^1} (Jg^{12}) - \frac{\partial \Psi_1}{\partial q^3} \frac{\partial}{\partial q^1} (Jg^{13}) + v_\alpha \varepsilon^{\alpha\mu\gamma} \frac{\partial g_{1\gamma}}{\partial q^\mu} \right] dq^1 dq^2 dq^3.
 \end{aligned} \tag{22}$$

Второе слагаемое в левой части и третье слагаемое в правой части сокращаются, то есть на грани $ADHE$ требуются только компоненты ψ_2 и ψ_3 , которые уже известны. Применяя к (22) квадратурную формулу прямоугольников, мы получим 14-точечное разностное уравнение. При этом для интеграла по грани $BCGF$ используется та же аппроксимация, что и во внутренних узлах.

Дополнительные уравнения для второй компоненты ψ_2 записываются в узлах передней и задней граней, а для третьей компоненты ψ_3 — в узлах нижней и верхней граней вычислительной области Q . Они получены тем же способом, что и уравнения для первой компоненты.

Расчет вектора вихря

Пусть следующее неравенство выполняется во всей вычислительной области Q :

$$v^2 > 0, \mathbf{q} \in \bar{Q}. \quad (23)$$

Безусловно, это ограничение сужает класс рассматриваемых течений. Однако при его выполнении упрощается алгоритм расчета вихря, поскольку для компонент вектора вихря получается гиперболическая система уравнений

$$Jv^2 \frac{\partial \boldsymbol{\omega}}{\partial q^2} + Jv^1 \frac{\partial \boldsymbol{\omega}}{\partial q^1} + Jv^3 \frac{\partial \boldsymbol{\omega}}{\partial q^3} = \mathbf{f}, \quad (24)$$

в которой роль времени играет переменная q^2 . Здесь

$$\boldsymbol{\omega} = \begin{pmatrix} \omega^1 \\ \omega^2 \\ \omega^3 \end{pmatrix}, \mathbf{f} = \begin{pmatrix} f^1 \\ f^2 \\ f^3 \end{pmatrix}, f^\beta = J\omega^\alpha \frac{\partial v^\beta}{\partial q^\alpha}, \beta = 1, 2, 3.$$

Используя уравнение неразрывности

$$\frac{\partial}{\partial q^\alpha} (Jv^\alpha) = 0, \quad (25)$$

систему (24) можно записать и в дивергентной форме:

$$\frac{\partial}{\partial q^2} (Jv^2 \boldsymbol{\omega}) + \frac{\partial}{\partial q^1} (Jv^1 \boldsymbol{\omega}) + \frac{\partial}{\partial q^3} (Jv^3 \boldsymbol{\omega}) = \mathbf{f}. \quad (26)$$

Для нахождения приближенного решения системы (26) используют неявную схему предиктор-корректор С. К. Годунова [3]. На шаге предиктор для аппроксимации уравнения (24) используют неявную схему расщепления, с помощью которой в центрах четырех граней ($q^1 = q_{j_1}^1$, $q^1 = q_{j_1+1}^1$, $q^3 = q_{j_3}^3$ и $q^3 = q_{j_3}^3$) элементарных ячеек сетки вычисляют вспомогательные величины $\boldsymbol{\omega}^*$.

После того как вспомогательные величины $\boldsymbol{\omega}^*$ определены, выполняется шаг корректор, на котором вычисляют значение вектора вихря $\boldsymbol{\omega}$ на следующем слое по q^2 . Для этого используют явную аппроксимацию уравнения (26):

$$\left(D_{q^2} (Jv^2 \boldsymbol{\omega}) + D_{q^1} (Jv^1 \boldsymbol{\omega}^*) + D_{q^3} (Jv^3 \boldsymbol{\omega}^*) \right)_{j+1/2} = \mathbf{f}_{j+1/2}, \mathbf{q}_{j+1/2} \in Q_h^0, \quad (27)$$

где Q_h^0 — сетка, состоящая из узлов, являющихся центрами ячеек сетки \bar{Q}_h .

Полученные разностные уравнения трехточечные, поэтому для их решения можно использовать метод скалярной прогонки. Для реализации прогонок необходимо дополнить данные уравнения уравнениями для граничных узлов на непроницаемых стенках, которые получаются при применении метода расщепления к уравнению для вектора вихря в дивергентной форме (26) и использовании условий непротекания. Применение метода прогонки корректно, так как полученные разностные уравнения обладают свойством диагонального преобладания.

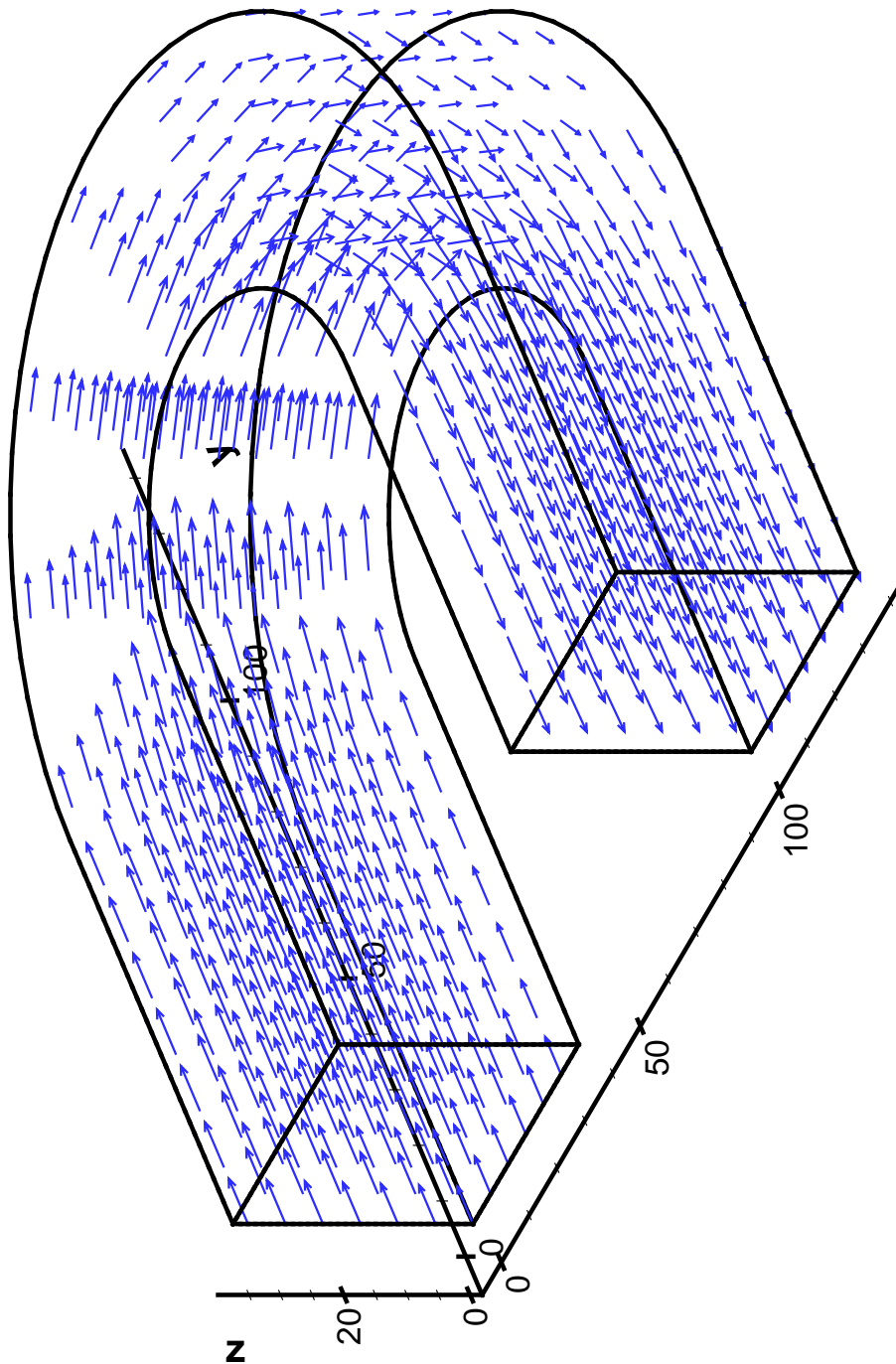
Граничные значения на непроницаемых стенках для $\boldsymbol{\omega}^*$ используют лишь на шаге предиктор при выполнении прогонок. На шаге корректор они не требуются, что следует из формулы (27) и условия непротекания.

Расчет вектора вихря производится маршевым методом, т.е. от одного слоя по q^2 к другому. Граничные значения компонент вектора вихря на входе вычисляются на основе граничных условий (3) и найденных на предыдущей итерации значений векторного потенциала внутри области.

Итерационный процесс

Итерационный процесс решения трехмерной задачи о вихревом течении идеальной несжимаемой жидкости начинается с расчета потенциального течения жидкости ($\omega = 0$) путем решения разностных уравнений для ψ_1 , ψ_2 и ψ_3 . Граничные значения для касательных ковариантных компонент векторного потенциала и проводятся одновре-

(28)



жидкости служит на $\omega^n - n$ -е итерацион-

ша (20) для ψ_1 , ψ_2 и

входе в область, при-
ек используют новые
де вектором скорости
начала итерационного
енных узлах сетки, по-
ые значения для ω^1 и

(29)

и на выходе γ_2 . При
итераций:

(30)

и конечно-разностный

отока на 180° .

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Khakimzyanov G.S. Numerical modelling of three-dimensional steady fluid flows on adaptive grids / G.S.Khakimzyanov, N.Yu.Shokina // Russ. J. Numer. Anal. Math. Model. - 2001. - Vol. 16. - № 1. - P. 33-57.
2. Шокина Н.Ю. Численное моделирование на адаптивных сетках двумерных установившихся течений жидкости и газа / Н.Ю. Шокина // Вычислительные технологии. - 1998. - Т. 3. - № 3. - С. 85-93.
3. Годунов С.К. Численное решение многомерных задач газовой динамики / С.К. Годунов и др. - М.: Наука, 1976.
4. Khakimzyanov G.S. Equidistribution method for the construction of adaptive grids / G.S.Khakimzyanov, N.Yu.Shokina // Russ. J. Numer. Anal. Math. Model. - 1999. - Vol. 14. - № 4. - P. 339-358.
5. Wong A.K. An effective vorticity – vector potential formulation for the numerical solution of three-dimensional duct flow problem / A.K.Wong, J.A.Reizes // J. Comput. Phys. - 1984. - Vol. 55. - P. 98-114.
6. Hille P. The development and structure of primary and secondary flow in a curved square duct / P.Hille, R.Vehrenkamp, E.O.Schulz-DuBois // J. Fluid Mech. - 1985. - Vol. 151. - P. 219-241.
7. Chang S.-C. A new approach for solving the three-dimensional steady Euler equations. I. General theory / S.-C.Chang, J.Adameczyk // J. Comput. Phys. - 1985. - Vol. 60. - P. 23-40.
8. Chang S.-C. A new approach for solving the three-dimensional steady Euler equations. II. Application to secondary flows in a turning channel / S.-C.Chang, J.Adameczyk // J. Comput. Phys. - 1985. - Vol. 60. - P. 41-61.
9. Yang H. An improved vorticity – potential method for three-dimensional duct flow simulations / H.Yang, R.Camarero // Int. J. Numer. Methods Fluids. - 1986. - Vol. 6. - P. 35-45.

**NUMERICAL MODELLING OF THREE-DIMENSIONAL IDEAL FLUID FLOWS
USING VORTICITY-VECTOR POTENTIAL FORMULATION**

N.Yu. Shokina

The present work continues the investigations [1] in the field of numerical modelling of three-dimensional stationary ideal fluid flows through channels with complicated geometry using new dependent variables: vector potential ψ and vorticity vector ω on curvilinear adaptive grids. The simpler approximation of the integral relation for vector potential, which has 19-point pattern, is used. The results of numerical modelling of the fluid flow in the duct with the stream bending by an angle of 180° are presented.