

ПРИМЕНЕНИЕ ПОДВИЖНЫХ СЕТОК К ЧИСЛЕННОМУ РЕШЕНИЮ ЗАДАЧИ О ПОРШНЕ

Н.Н. Меркулова*, Ю.А. Сенчурова**

В работе представлены численные расчеты модельной задачи о поршне, имеющей аналитическое решение, полученные с помощью адаптивных сеток на основе метода С.К. Годунова. Дано сравнение двух способов численного решения задачи путем вычисления относительной погрешности между численным и аналитическим решением. Подвижные разностные сетки получены с применением вариационного и геометрического подходов. Для анализа построенных сеток в задаче о поршне использованы критерии качества.

В настоящее время существенно возрос интерес к построению подвижных разностных сеток и проведению на них численных расчетов. Как показывают исследования, адаптивные сетки могут существенно увеличивать точность и экономичность вычислительных алгоритмов. Особенно эффективны такие сетки при расчетах многомерных и нестационарных задач, имеющих узкие зоны с большими производными решения [1], а также при использовании алгоритмов с распараллеливанием.

Построение сетки – это часть процесса моделирования, который осуществляется при взаимодействии человека и компьютера. При этом естественным образом возникает задача автоматизации способа построения сетки прежде всего в целях экономии затрат человеческого труда. Особую роль играют алгоритмы, позволяющие значительно упростить процесс создания сетки, в которых перестройку сетки можно проводить локально в небольшой части области.

Во многих областях науки и техники появляются задачи, включающие в качестве существенного элемента уравнения газовой динамики. Уравнения газовой динамики нелинейны, поэтому единственным эффективным и универсальным способом их решения в настоящее время являются численные методы, основанные на использовании быстродействующих ЭВМ.

Одним из наиболее популярных во всем мире методов численного решения уравнений газовой динамики сжимаемых сред является метод Годунова С.К. [2]. Этот метод развивался усилиями многих специалистов [3]-[4] и в настоящее время существует немало его модификаций.

В данной работе обсуждаются результаты численных расчетов одномерной задачи газовой динамики, полученные с использованием подвижных разностных сеток. Расчеты проводились по схеме «распада разрывов» Годунова С.К. [2]. Подвижные разностные сетки строились с использованием уравнения для управления движением сетки, выведенного в [5] на основе вариационного принципа Остроградского-Гамильтона, и геометрическим способом [2].

Для использования подвижных сеток требуется наличие закона, по которому движется сетка, и наличие разностной схемы на подвижной сетке [6].

Разностная схема строится при следующих предположениях:

- 1) в начальный момент времени $t = t_0$ газ разбит на слои узлами сетки с координатами x_j ;
- 2) внутри каждого слоя величины скорости среды, плотности, давления и энергии постоянны, и для слоя с номером $j - 1/2$, заключенного между узлами x_{j-1} и x_j , их значения обозначаются соответственно $(u, \rho, p, \varepsilon)_{j-1/2}$.

* © Н.Н. Меркулова, 2004; Томский государственный университет (Россия); E-mail: nn@math.tsu.ru

** © Ю.А. Сенчулова, 2004; Беловский институт (филиал) Кемеровского государственного университета (Россия); E-mail: cua@belovo.kemsu.ru

3) новые значения этих величин на момент времени $t = t_0 + \tau$ обозначаются $(u, \rho, p, \varepsilon)^{j-1/2}$.

Применяя законы сохранения к ячейке сетки $j-1/2$ в течение времени от t_0 до $t_0 + \tau$, можно выписать явные разностные формулы для средних значений $(u, \rho, p, \varepsilon)^{j-1/2}$ для неподвижной сетки в виде [2]:

$$\begin{aligned} & \left[\rho^{j-1/2} - \rho_{j-1/2} \right] (x_j - x_{j-1}) + \tau [M_j - M_{j-1}] = 0, \\ & \left[(\rho u)^{j-1/2} - (\rho u)_{j-1/2} \right] (x_j - x_{j-1}) + \tau [J_j - J_{j-1}] = 0, \\ & \left[\rho \left(\varepsilon + \frac{u^2}{2} \right)^{j-1/2} - \rho \left(\varepsilon + \frac{u^2}{2} \right)_{j-1/2} \right] (x_j - x_{j-1}) + \tau [K_j - K_{j-1}] = 0, \end{aligned} \quad (1)$$

где введены обозначения

$$\begin{aligned} M_j &= (RU)_j, \\ J_j &= (P + RU^2)_j, \\ K_j &= \left[RU \left(E + \frac{U^2}{2} \right) + PU \right]_j \end{aligned}$$

для величин, которые представляют потоки массы, импульса и энергии на единицу длины бокового ребра прямоугольной ячейки сетки на плоскости переменных x, t .

В работе [5] в качестве закона движения сетки предлагается использовать уравнение

$$2\rho \frac{\partial \varpi}{\partial t} - \frac{(u - \varpi)^2}{2} \frac{\partial \rho}{\partial x} - \rho(u - \varpi) \frac{\partial u}{\partial x} + 2 \frac{\partial p}{\partial x} = 0, \quad (2)$$

где u - скорость среды, p - давление, ρ - плотность, $\omega = -\dot{x}$ - скорость движения сетки. Проведя несложные преобразования, можно получить уравнение

$$\frac{\partial(\rho\omega)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} [p - \rho(u - \omega)(0.25u - 1.25\omega)] = 0, \quad (3)$$

которое удобно записать в интегральной форме $\oint \rho \omega dx - [p - \rho(u - \omega)(0.25u - 1.25\omega)] dt = 0$.

Вычислив криволинейный интеграл по контуру ячейки сетки, получим разностное уравнение для управления движением сетки

$$\omega^{j-1/2} = \frac{\rho_{j-1/2} \omega_{j-1/2} (x_j - x_{j-1}) - \tau (T_j - T_{j-1})}{\rho^{j-1/2} (x^j - x^{j-1})}, \quad (4)$$

где введено обозначение $T_j = P_j - R_j (U_j - W_j) (0.25U_j - 1.25W_j)$, x_j -координаты узлов старой сетки, x^j -координаты узлов новой сетки, которые вычисляются по формуле

$$x^j = x_j + \tau \cdot W_j^*, \quad W_j^* = W_{j+1/2}^* \quad (\text{способ 1}). \quad (5)$$

Здесь обозначено W_j^* - скорость движения j -того узла сетки. Далее уравнения (4)-(5) используются в численных расчетах.

Не вызывает сомнений тот факт, что выделение в процессе расчета границ, представляющих интерес с физической точки зрения (ударных волн, контактных разрывов и т.п.), может существенно повысить качество расчета. Такая возможность реализуется в описываемой разностной схеме, если проводить расчет в подвижных сетках. Для этого требуется лишь внести некоторые изменения в счет «больших» величин и в формулы для расчета потоков.

Перейдем непосредственно к построению разностной схемы на подвижной сетке. Если ввести W_j^* - скорость движения j -того узла сетки, то для потоков получим следующие формулы:

$$\begin{aligned} M_j &= \left[R(U - W_j^*) \right]_j, \\ J_j &= \left(P + MU^2 \right)_j, \end{aligned}$$

$$K_j = \left[\left(E + \frac{U^2}{2} \right) M + PU \right]_j. \quad (6)$$

Пользуясь системой уравнений газовой динамики, можно построить разностную схему на подвижной сетке:

$$\begin{aligned} & \rho^{j-1/2} (x^j - x^{j-1}) - \rho_{j-1/2} (x_j - x_{j-1}) + \tau [M_j - M_{j-1}] = 0 \\ & (\rho u)^{j-1/2} (x^j - x^{j-1}) - (\rho u)_{j-1/2} (x_j - x_{j-1}) + \tau [J_j - J_{j-1}] = 0, \\ & \rho \left(\varepsilon + \frac{u^2}{2} \right)^{j-1/2} (x^j - x^{j-1}) - \rho \left(\varepsilon + \frac{u^2}{2} \right)_{j-1/2} (x_j - x_{j-1}) + \tau [K_j - K_{j-1}] = 0 \end{aligned} \quad (7)$$

Здесь величины M, J, K имеют вид (6).

Можно показать, что построенная явная разностная схема (7) аппроксимирует систему нестационарных уравнений газовой динамики с первым порядком по пространственной переменной и временной координате и условно устойчива. Устойчивость можно исследовать методом А.А.Самарского [7] для линеаризованной модели разностной схемы. Условие устойчивости [2]

$$\tau < \tau^* = \frac{2h}{\max(|u_0 + c_0|, |u_0 - c_0|)}$$

можно обобщить на случай подвижных разностных сеток следующим образом. Для каждого интервала сетки сначала определяем величины

$$\tau_{j-1/2} = \frac{x_j - x_{j-1}}{\max(c_0 - W_j^*, -c_0 - W_{j-1}^*)}, \quad (8)$$

а затем полагаем $\tau = \alpha \min_j \tau_{j-1/2}$, где $0 < \alpha < 1$; c_0 - скорость звука в невозмущенной среде.

Для сравнения со способом 1 использовался метод Годунова построения подвижной сетки (способ 2). Здесь новые значения и скорость сетки определяются соответственно из формул:

$$x^j = (x_0 + \tau W_0^*) + \frac{(x_N + \tau W_N^*) - (x_0 + \tau W_0^*)}{x_N - x_0} (x_j - x_0), \quad (9)$$

$$W_j^* = (x^j - x_j) / \tau. \quad (10)$$

Таким образом, с использованием подвижных сеток, построенных способом 1 и способом 2, находилось численное решение модельной задачи о поршне, имеющей аналитическое решение. Численные расчеты проводились в случае, когда поршень движется в полубесконечной трубе, заполненной газом, со скоростью $u = -at$, где a - ускорение. В качестве конкретного газа рассматривался воздух, для которого показатель адиабаты $\gamma = 1.4$. Задача решалась в размерном виде.

В начальный момент времени задавали следующие значения параметров: $\rho_0 = 1.2928 \text{ кг/м}^3$, $p_0 = 1.01325 \cdot 10^5 \text{ Па}$, $c_0 = 330 \text{ м/с}$. Поршень движется в трубе длиной 1 метр с ускорением $a = 45833.33 \text{ м/с}^2$ и в начальный момент времени расположен в точке $x_0 = 0$. Расчетная область находится справа от поршня и содержит 11 точек, отстоящих на одинаковом расстоянии друг от друга с шагом $h = 0.1 \text{ м}$. В узлах сетки задают средние значения скорости среды, скорости сетки, плотности и давления. В точке $x_0 = 0$ ставят следующие граничные условия: $u(x_0) = -at$, $\omega(x_0) = -at$ соответственно для скорости среды и скорости движения сетки. Затем во всех точках сетки из вспомогательной задачи о распаде разрыва вычисляют «большие» величины и находят точное решение задачи о поршне. Расчеты проводят слоями по времени, причем временной шаг определяют из условия устойчивости (8). После этого начинается пересчет новых координат узлов сетки по способу 1 до момента образования волны разрежения, т.е. до тех пор, пока $x_j \leq c_0 \cdot t$. Далее, уже на новом временном слое находят средние значения плотности, скорости среды и скорости сетки, которые определяются из построенной разностной схемы (7). Среднее значение давления

вычисляют из уравнения состояния вида $p = \frac{P_0}{\rho_0} \rho^\gamma$. Таким образом, счет продолжается до тех пор, пока

$$t < \frac{2c_0}{a(\gamma - 1)}.$$

При проведении численных расчетов для сравнения результатов использовали способ 2 построения подвижной сетки. Его отличие состоит в том, что новые координаты узлов и скорость сетки находят по формулам (9) - (10). В итоге, по результатам расчетов строится подвижная сетка по способу 1 (рис.1) и способу 2 (рис.2). На рис.1-2 цифрой 1 обозначена траектория движения поршня, цифрой 2 – распространение в газе волны разрежения.

Поведение сетки в задаче о поршне (разрежение, способ 1)

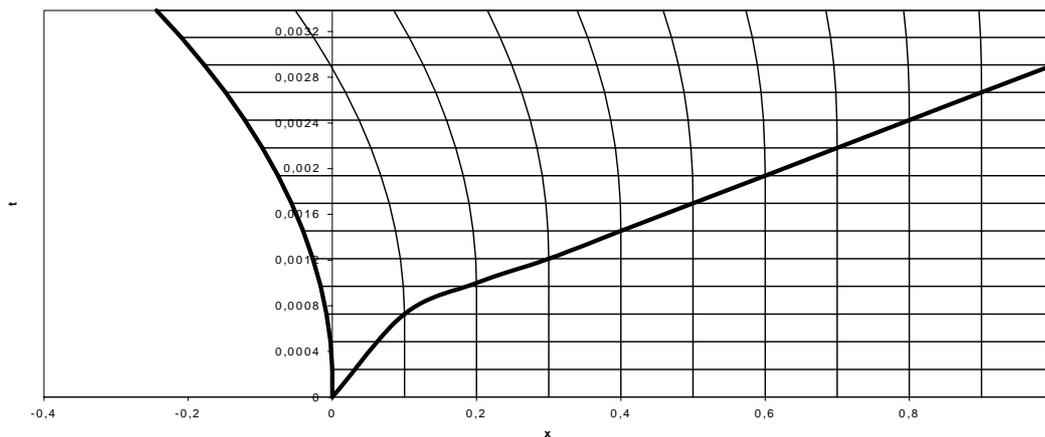


Рис.1

Поведение сетки в задаче о поршне (разрежение, способ 2)

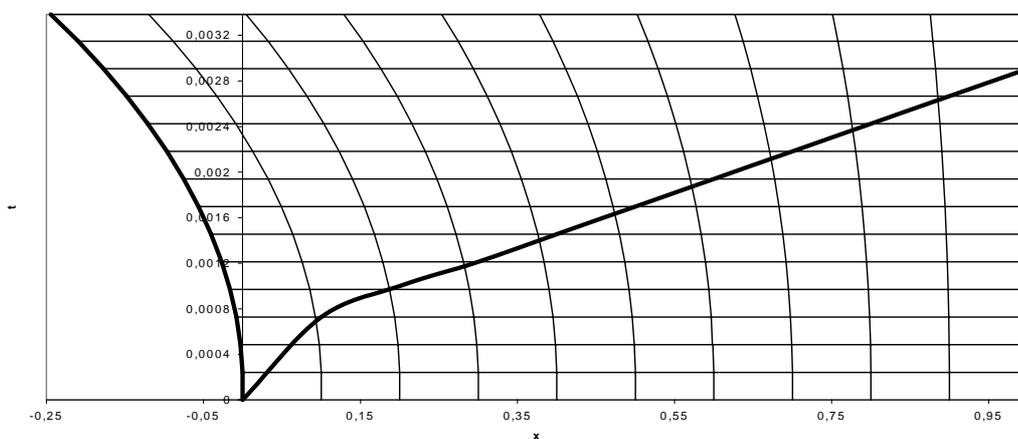


Рис.2

Если наложить рис.1 на рис.2, то можно убедиться, что характер поведения сеток совпадает, линия движения поршня и волна разрежения ведут себя одинаково.

На таких подвижных сетках двумя способами было получено численное решение, которое сравнивалось с аналитическим. Поведение численных и точных значений скорости, давления и плотности, полученных по способу 1 и по способу 2, изображали графически. Визуальный анализ графиков показал, что полученное численное решение способом 1 мало чем отличается от численного решения, полученного способом 2. Поэтому целесообразно было воспользоваться одной из сравнительных характеристик – поведением относительной погрешности численного решения.

В таблице представлены значения относительной погрешности, полученные по способу 1 и способу 2 для скорости, давления и плотности.

Таблица

	5	10	15	20
Δ_{UB}	13.35 %	10.36 %	9.52 %	3.05 %
$\Delta_{UBГ}$	9.15 %	16.57 %	16.4 %	5.94 %
Δ_{PB}	0.76 %	1.41 %	2.08 %	2.89 %
$\Delta_{PBГ}$	1.47 %	2.16 %	1.55 %	2.35 %
Δ_{RB}	0.53 %	1 %	1.48 %	2.06 %
$\Delta_{RBГ}$	1.04 %	1.53 %	1.43 %	2.87 %

В таблице использованы следующие обозначения: Δ_{UB} , Δ_{PB} , Δ_{RB} - относительная погрешность скорости, давления и плотности, полученная способом 1, $\Delta_{UBГ}$, $\Delta_{PBГ}$, $\Delta_{RBГ}$ - относительная погрешность скорости, давления и плотности, полученная способом 2; 5, 10, 15, 20 – номера слоев, соответствующие моментам времени $t = 0.00121$ с, $t = 0.00242$ с, $t = 0.00363$ с, $t = 0.00484$ с.

Как следует из таблицы, относительная погрешность численного решения, полученного по способу 1 в момент времени $t = 0.00484$ с для скорости составляет 3.05 %, для давления – 2.89 %, для плотности – 2.06 %. Относительная погрешность для тех же газодинамических величин, полученная по методу Годунова, имеет значения – 5.94 %, 2.35 %, 2.87 %. Примерно такая же зависимость наблюдается и для других моментов времени, представленных в таблице.

Таким образом, сравнительный анализ результатов позволяет высказаться в пользу первого подхода.

Для оценки качества построенных сеток использовали критерий качества сетки F [8]. Для этого вычислялась величина

$$F = \min_{j \in M_j} (f)_j,$$

где $f = \frac{2}{\sigma} \min_{i=1,4} \sigma_i$, σ - площадь рассматриваемой ячейки, M_j - множество ячеек сетки.

Как показали результаты расчетов, сетки, построенные двумя способами, состоят из выпуклых ячеек, т.к. $0 < f \leq 1$. Минимальное значение среди f по всем ячейкам сетки с использованием способа 1 достигается на 14-том слое в ячейке с номером «0» и равно 0.985022, с использованием способа 2 – на 14-том слое в ячейке с номером «5» и равно 0.985778. Т.е., минимумы совпадают до третьего знака, но достигаются в разных ячейках.

Таким образом, построенные сетки полностью соответствуют описанному критерию качества и дают удовлетворительные результаты для рассматриваемой задачи о поршне. Кроме того, можно утверждать, что первый способ построения подвижных сеток увеличивает точность численных расчетов по сравнению с геометрическим методом Годунова.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Лисейкин В.Д. Обзор методов построения структурных адаптивных сеток / В.Д. Лисейкин // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. -1996. - Т.36.- № 1.- С. 3 - 42.
2. Годунов С.К. Численное решение многомерных задач газовой динамики / С.К.Годунов, А.В.Забродин, М.Я.Иванов и др.. - М.: Наука, 1976.- С.400.
3. Van Leer B. A second-order sequel to Godunov's method / B.Van Leer // J. Comput. Phys.-1979. - V.32.- № 1. - P.101 -136.
4. Иванов М.Я. Неявная схема Годунова С.К. повышенной точности для интегрирования уравнений Эйлера / М.Я.Иванов, Р.З.Нигматуллин // Журн. вычисл. матем. и матем. физ.-1987.- Т.27.- № 11. - С.1725 -1735.
5. Гриднева В.А. О построении подвижных разностных сеток / В.А.Гриднева, Н.Н.Меркулова // Численные методы механики сплошной среды. - 1983. - Т.14.- № 4.- С. 44.
6. Механика деформируемого твердого тела / Под ред. А.В.Жукова. – Томск: ТГУ, 1991. - С. 24 - 28.
7. Самарский А.А. Введение в теорию разностных схем / А.А. Самарский. - М.: Наука, 1971.- С. 552.
8. Прокопов Г.П. Об организации сравнения алгоритмов и программ построения регулярных двумерных разностных сеток / Г.П. Прокопов // Математическое моделирование физических процессов. - 1989. - № 3.- С. 98 -108.

USING THE MOVING GRIDS TO THE NUMERICAL SOLUTION
OF THE PROBLEM ABOUT THE PISTON

N.N. Merkulova, YU.A. Senchurova

This work presents the numerical calculations of the simulation problem about the piston which has analytical solution received by means of adaptive grids on the basis of S.K. Godunov's method. Two ways of the numerical solution of the problem are compared by means of calculation of relative inaccuracy between the numerical and analytical solution. The moving adaptive grids are received by means of using variation and geometric approaches. Criteria of quality are used for the analysis of the obtained grids in this problem about the piston.