

ЭЛЛИПТИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ И ЗАДАЧИ ИЗГИБА ТОНКИХ СТЕРЖНЕЙ И ПЛАСТИН¹

Ю.В. Захаров*, К.Г. Охоткин**

Рассматривается применение эллиптических функций при решении ряда нелинейных задач сильного изгиба тонких упругих стержней и пластин. Для описания изгиба круговой пластины вводится новый класс специальных функций, обобщающих эллиптические.

В день рождения Софьи Васильевны Ковалевской мы отмечаем, что в половине своих работ она развивала теорию эллиптических интегралов и использовала эллиптические функции для решения ряда задач механики и физики. За прошедшее столетие эллиптические интегралы и функции получили очень широкое распространение и применение. Мы опишем один небольшой аспект использования и развития теории таких функций в механике.

В настоящее время актуальны исследования, связанные с изучением сложных быстропротекающих процессов и структур с нелинейными свойствами. Такие задачи крайне важны как в теоретическом, так и практическом отношении, однако точные решения их получить весьма сложно. Подобные задачи очень часто решаются приближенными или численными методами, и только небольшое число задач удалось решить аналитически.

Задачи разработки устройств микромеханики требуют поиска точных формул для форм изгиба, стрел прогибов и частот собственных колебаний тонких стержней при различных видах закрепления и способах приложения нагрузки.

При исследовании нелинейного изгиба стержней и пластин в 1950-е годы в работах [1-3] были получены решения уравнения равновесия стержня, выраженные через эллиптические интегралы и зависящие от трех параметров, неявным образом связанных с граничными условиями и действующей нагрузкой. Эти решения в силу такого количества параметров были трудоемкими и неалгоритмичными для реализации инженерных расчетов и требовали организации отдельных вычислений для каждого участка стержня между точками перегиба.

В работах авторов [4-6] был рассмотрен ряд задач изгиба тонких стержней и пластин в геометрически нелинейном случае. В этих работах приводятся точные решения, выраженные через эллиптические функции Якоби, а не только через эллиптические интегралы и зависящие от одного параметра – модуля эллиптических функций, определяемого внешней действующей силой. Такие решения являются более алгоритмичными, чем известные ранее, и позволяют находить формы изогнутых стержней и пластин при любом числе точек перегиба. В этой работе приводится обзор полученных в работах [4-6] результатов.

1. Общее решение задачи об изгибе стержня.

Рассмотрим тонкий нерастяжимый стержень длины L с изгибной жесткостью EI . Выберем декартову систему координат XOY так, чтобы изначально прямой стержень был расположен вдоль оси OX , закреплен на левом конце, находящемся в начале координат, и свободен либо закреплен на правом конце. Стержень сжимается силой P , сосредоточенной на правом конце стержня и направление действия которой образует некоторый угол с осью OX . Обозначим l длину вдоль линии стержня, $\theta(l)$ – угол между касательной в текущей точке к линии стержня и осью OX , P_x и P_y – декартовы компоненты силы P . Система координат показана на рис. 1.

Приведем здесь кратко общее решение этой задачи, следуя работе [4]. Угол между направлением действия силы и осью OX обозначим φ .

Уравнение равновесия стержня имеет вид

$$EI \frac{d^2 \theta}{dl^2} - P_x \sin \theta + P_y \cos \theta = 0 \quad (1)$$

Введем следующие обозначения: P – модуль сосредоточенной силы, $t = l / L$ – безразмерная длина, изменяющаяся от 0 до 1, и $q^2 = PL^2/EI$ – собственное число. Приведем решение уравнения (1):

¹ При поддержке гранта РФФИ 02-01-01017.

* © Ю.В. Захаров, 2004; Сибирский государственный технологический университет, Красноярский государственный университет (Россия);

** © К.Г. Охоткин, 2004; Сибирский государственный аэрокосмический университет (Россия); E-mail: okg2000@mail.ru.

$$\begin{aligned} \theta(t) &= -\varphi + 2\arcsin[k \operatorname{sn}(qt + F_1, k)], \\ d\theta(t) / dt &= 2kq \operatorname{cn}(qt + F_1, k), \end{aligned} \quad (2)$$

где sn , cn – эллиптические синус и косинус Якоби. Модуль эллиптических функций k и параметр F_1 выполняют роль констант интегрирования, и их связь с силой P и углом φ определяется из граничных условий в каждом случае изгиба стержня.

Введем обозначение для аргумента эллиптических функций

$$u = qt + F_1. \quad (3)$$

Интегрируя соотношения $dx / dl = \cos\theta$, $dy / dl = \sin\theta$, найдем координаты произвольной точки стержня

$$x/L = X_0 \cos \varphi + Y_0 \sin \varphi, \quad y/L = Y_0 \cos \varphi - X_0 \sin \varphi, \quad (4)$$

где

$$X_0 = -t + \frac{2}{q} [E(\operatorname{am} u) - E(\operatorname{am} F_1)], \quad Y_0 = \frac{2k}{q} [\operatorname{cn} F_1 - \operatorname{cn} u]. \quad (5)$$

Здесь $E(\operatorname{am} u)$ – неполный эллиптический интеграл второго рода от эллиптической амплитуды Якоби. Выражения (4), (5) задают форму профиля изогнутого стержня в параметрическом виде с параметром t – приведенной длиной стержня.

Далее выпишем, следуя методу работы [4], точное аналитическое решение для случая силы постоянного направления, действующей под заданным углом φ . При этом находятся пороги потери устойчивости стержня и выражения для различных мод изгиба – форм изогнутого нагруженного стержня.

2. Изгиб стержня с заземленным концом и другим свободным концом под действием нагрузки, направленной под постоянным углом. Поставим граничные условия к уравнению равновесия (1). Заземление на левом конце стержня требует, чтобы

$$\theta(0) = 0. \quad (6)$$

На свободном конце должно выполняться условие равенства нулю момента сил, т.е.

$$d\theta(L) / dl = 0. \quad (7)$$

Применим первое условие (6), используя решение (2) уравнения (1). Получим, что $\operatorname{sn} F_1 = \sin(\varphi/2) / k$, следовательно,

$$F_1 = F \left[\arcsin \left(\frac{\sin \varphi/2}{k} \right), k \right]. \quad (8)$$

Соответственно, модуль k изменяется в пределах, определяемых углом действия силы:

$$\sin(\varphi/2) < k < 1.$$

Применив второе условие (7), аналогично получим, что $\operatorname{cn}(q + F_1) = 0$, откуда

$$q = (2n - 1) K(k) - F_1, \quad n = 1, 2, 3, \dots, \quad (9)$$

где $K(k)$ и $F(\varphi, k)$ – соответственно, полный и неполный эллиптические интегралы первого рода. Из выражений (8) и (9) следует спектр собственных значений $q_n(k)$, который, в свою очередь, определяет систему порогов внешней нагрузки:

$$\frac{P}{P_c} = \left(\frac{2}{\pi} \right)^2 \left\{ (2n-1)K(k) - F \left[\arcsin \left(\frac{\sin \varphi/2}{k} \right), k \right] \right\}^2, \quad (10)$$

где $P_c = (\pi/2)^2 EI/L^2$ – эйлерова критическая сила, а n – номер моды решения. Зависимость нагрузки P/P_c от параметров k и φ в соответствии с выражением (10) приведена на рис. 2.

Координаты точек стержня в параметрическом задании определяются выражениями (4) и (5) с подстановкой значений F_1 и q из (8) и (9). Таким образом, каждому значению внешней силы P и номеру моды n будет соответствовать своя форма прогиба стержня, задаваемая одним параметром –

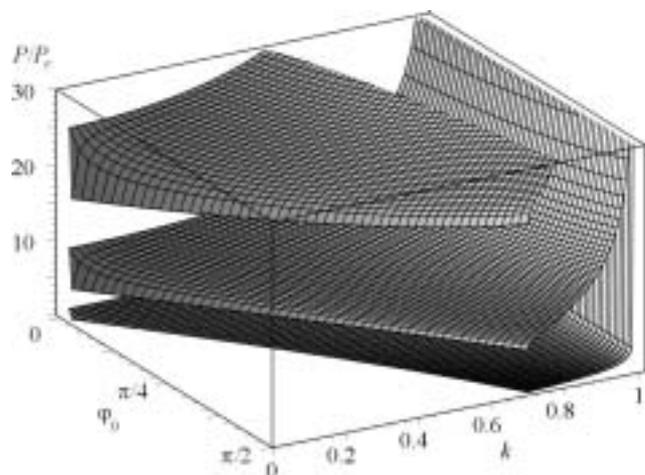


Рис. 2. Спектр собственных значений нелинейного уравнения равновесия при действии силы постоянного направления

модулем k , который определяется из выражения (10) по известной силе P . Минимальному значению $k = \sin\varphi / 2$ соответствует минимальное значение силы при каждом пороге. Когда сила $P \rightarrow \infty$, то модуль $k \rightarrow 1$.

Статический порог нагрузки при $n = 1$ равен эйлеровой силе. Пороги при $n > 1$ были названы М.А. Лаврентьевым и А.Ю. Ишлинским *динамическими* порогами потери устойчивости, которые могут быть достигнуты при ударном приложении нагрузки, когда время нарастания импульса меньше времени релаксации системы [7].

3. Изгиб стержня с защемленным и свободным концами под действием следящей силы при произвольном угле слежения. Граничные условия рассматриваемого закрепления концов стержня имеют вид:

$$\theta(0) = 0, \quad d\theta(L) / dl = 0. \quad (11)$$

Введем угол слежения α – угол между линией действия силы и касательной к линии изгиба стержня в конце стержня (см. рис. 1). Исходя из определения следящей силы, запишем дополнительное условие постоянства угла α на конце стержня:

$$\theta(1) = \alpha - \varphi. \quad (12)$$

Будем считать величины P и α параметрами состояния, заданными условиями задачи.

С учетом первого условия в (11), используя решение (2) уравнения (1), получим $\operatorname{sn} F_1 = \sin(\varphi/2) / k$, откуда

$$F_1 = F[\operatorname{arcsin}(\sin(\varphi/2)/k), k], \quad (13)$$

где $F(\varphi, k)$ – неполный эллиптический интеграл первого рода.

Из второго условия в (11) имеем $\operatorname{sn}(q + F_1) = 0$, откуда

$$q = (2n - 1) K(k) - F_1, \quad n = 1, 2, 3, \dots, \quad (14)$$

где $K(k)$ – полный эллиптический интеграл первого рода.

Используя условие для следящей силы (12), получим из (2) и (14), что $\sin(\alpha / 2) = k \operatorname{sn}(K(k), k)$ и

$$k = \sin(\alpha / 2). \quad (15)$$

Выражение (15) определяет значение модуля эллиптических функций и интегралов k по известному значению угла α . В задаче со следящей силой нагрузка при заданном угле α определяет угол φ , в отличие от задачи изгиба стержня при нагружении силой постоянного направления [4], в которой нагрузка при заданном угле φ определяла модуль k .

Из выражений (13) – (15) находим спектр собственных значений $q_n(k)$, который, в свою очередь, определяет критические нагрузки:

$$P/P_c = (2/\pi)^2 \{(2n - 1)K(\sin(\alpha/2)) - F[\operatorname{arcsin}(\sin(\varphi/2)/\sin(\alpha/2)), \sin(\alpha/2)]\}^2. \quad (16)$$

Здесь n – номер моды решения. Выражение (16) показывает связь между величиной внешней следящей силы P и φ – углом наклона силы к оси OX для каждой моды n при заданном угле слежения α . Из соотношения (15) видно, что при изменении величины внешней силы для каждой моды параметр φ изменяется в пределах

$$-\alpha \leq \varphi \leq \alpha. \quad (17)$$

При $\varphi = \pm\alpha$ имеем пороговые значения внешней силы

$$\frac{P_n}{P_c} = (n - 1)^2 \left(\frac{4}{\pi}\right)^2 K^2\left(\sin \frac{\alpha}{2}\right), \quad n = 1, 2, \dots, \quad (18)$$

при превышении которых происходит смена моды решения. Первая мода ($n = 1$) начинается с нулевого порога, $P_1 = 0$.

На первой моде внешняя сила P/P_c плавно, непрерывно увеличивается от 0 до второго порогового значения P_2 , а параметр φ , угол наклона силы к оси OX при этом плавно изменяется от α до $-\alpha$. Вторая мода решения появляется при превышении нагрузкой P порогового значения P_2 , при этом угол $\varphi = -\alpha$. На второй моде ($n = 2$) внешняя сила P/P_c увеличивается дальше от P_2 до P_3 , а параметр φ при этом изменяется в обратном направлении от $-\alpha$ до α , и т.д.

Таким образом, основная особенность решения задачи изгиба стержня при следящем нагружении – плавный переход между модами (смена мод) решения при увеличении внешней нагрузки. Можно говорить о мягкой потере устойчивости при изгибе. Это является существенным отличием от задачи с нагружением стержня силой постоянного направления [4], где нет плавного перехода между модами, и реализуется только одна из возможных мод решения. Реализация старших мод под действием силы постоянного направления

возможна при условии импульсного, скачкообразного нагружения, и можно говорить о жесткой потере устойчивости.

Зависимость нагрузки P/P_c от углов α и φ в соответствии с выражением (16) приведена на рис. 3. Координаты точек стержня определяются выражениями (4), (5) при подстановке значений q , F_1 , k из (13) – (15). Тогда в общем случае заданных произвольного угла слежения α и величины силы P получим выражения для формы прогиба стержня:

$$\begin{aligned} \frac{x}{L} &= \left[-t + 2 \frac{(E(am u) - E_1)}{pK(k) - F_1} \right] \cos \varphi + 2k \frac{(cn F_1 - cn u)}{pK(k) - F_1} \sin \varphi, \\ \frac{y}{L} &= 2k \frac{(cn F_1 - cn u)}{pK(k) - F_1} \cos \varphi - \left[-t + 2 \frac{(E(am u) - E_1)}{pK(k) - F_1} \right] \sin \varphi, \end{aligned} \quad (19)$$

где обозначено:

$$F_1 = F[\arcsin(\sin(\varphi/2)/k), k], \quad E_1 = E[\arcsin(\sin(\varphi/2)/k), k], \\ u = (pK(k) - F_1)t + F_1, \quad p = 2n - 1, \quad k = \sin(\alpha/2),$$

а величина силы P будет связана с параметром φ выражением (16).

Таким образом, каждому значению внешней силы P и номеру моды n при заданном угле слежения α соответствует своя форма прогиба стержня, задаваемая одним параметром – углом φ , который определяется из соотношения (16) по известной силе P . Формы прогиба приведены на рис. 4.

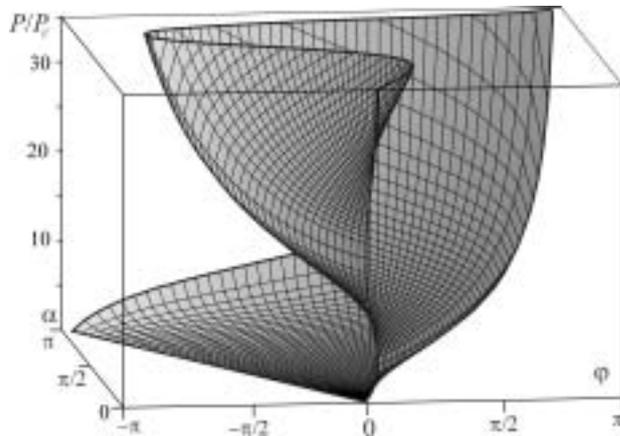


Рис. 3. Спектр собственных значений нелинейного уравнения равновесия при действии следящей силы

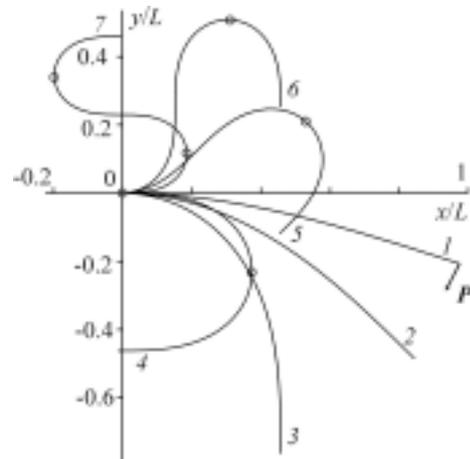


Рис. 4. Формы прогиба стержня при различных значениях поперечной следящей силы. Первая мода ($n = 1$): кривые 1 – $\varphi = 2\pi/5$; 2 – $\varphi = \pi/4$; 3 – $\varphi = 0$; 4 – $\varphi = -\pi/2$. Вторая мода ($n = 2$): кривые 5 – $\varphi = -\pi/4$; 6 – $\varphi = 0$; 7 – $\varphi = \pi/2$. На кривых кружками отмечены точки сжатия

При нагружении следящей силой переход от одной моды к другой происходит плавно, в отличие от нагружения силой постоянного направления.

4. Изгиб тонкой круговой пластины под действием радиального сжатия. При решении такой задачи обычно исходят из геометрически линейного уравнения равновесия [1]. В работах [5, 6] нами было показано, как с помощью введения системы новых функций можно решить эту задачу в геометрически нелинейной постановке. Нелинейные уравнения равновесия тонких оболочек приведены, например, в работах [8, 9].

В этом случае уравнение равновесия тонкой пластины типа Фёппля-Кармана [10-12] в цилиндрических координатах имеет вид

$$D\Delta_r(\kappa_r + \kappa_\varphi) + h(\sigma_r \kappa_r + \sigma_\varphi \kappa_\varphi) = 0, \quad (20)$$

где σ – тензор напряжений, κ_r и κ_φ – кривизны поверхности, h – толщина, R – радиус пластины, D – цилиндрическая жесткость. Искомая функция изгиба поверхности (отклонения от равновесия) $w(r)$ входит в это уравнение через кривизны поверхности. Радиальная нагрузка выражается через напряжения σ . В общем случае к этому уравнению надо добавлять уравнение для функции напряжения – уравнение неразрывности деформаций срединной поверхности пластины. В нашем случае имеем осесимметричное выпучивание, когда срединная плоскость пластины переходит в поверхность вращения (рис. 5). Точки контура свободно пере-

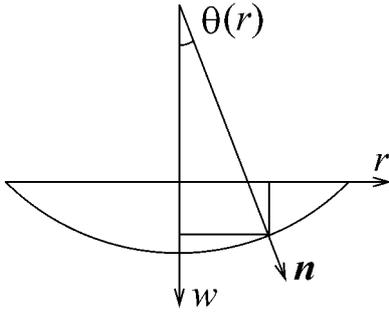


Рис. 5. Система координат

мещаются в радиальном направлении. Исследуем случай, когда изгиб пластины еще подчиняется линейному закону Гука.

Введем в качестве искомой функции угол наклона касательной в радиальном направлении в текущей точке $\theta(r)$ (рис. 5). Оператор Лапласа в поверхностных криволинейных координатах

$$\Delta_r = \frac{\cos \theta_r}{r} \frac{d}{dr} \left(r \cos \theta_r \frac{d}{dr} \right). \quad (21)$$

Функция $\theta(r)$ входит в уравнение (21) через кривизны, которые даются выражениями

$$\kappa_r = \cos \theta \frac{d\theta}{dr}, \quad \kappa_\varphi = \frac{\sin \theta}{r}, \quad \kappa_\varphi + \kappa_r = \frac{1}{r} \frac{d}{dr} (r \sin \theta).$$

Для уравнения (1) получаем

$$D \frac{\cos \theta}{r} \frac{d}{dr} \left(r \cos \theta \frac{d}{dr} \left(\frac{1}{r} \frac{d}{dr} (r \sin \theta) \right) \right) + h \left(\sigma_r \cos \theta \frac{d\theta}{dr} + \sigma_\varphi \frac{\sin \theta}{r} \right) = 0. \quad (22)$$

Поставим граничные условия для круговой пластины с жестко зашпеленными по контуру краями:

$$\theta(R) = 0, \quad \theta(0) = 0, \quad \theta(r) < \infty. \quad (23)$$

Кроме того, в центре пластины из условия симметрии должно выполняться условие

$$\frac{dw}{dr} = 0, \quad r = 0.$$

В нашем геометрически нелинейном случае радиальные σ_r и дуговые σ_φ напряжения для круговой пластины связаны между собой исходя из условий равновесия

$$\sigma_\varphi = \cos \theta \frac{d}{dr} \left(\frac{r \sigma_r}{\cos \theta} \right). \quad (24)$$

Второе слагаемое уравнения (3) преобразуется к виду

$$\left(\sigma_r \cos \theta \frac{d\theta}{dr} + \sigma_\varphi \frac{\sin \theta}{r} \right) = \frac{\cos \theta}{r} \frac{d}{dr} (r \sigma_r \operatorname{tg} \theta),$$

что совпадает с аналогичной частью нелинейных уравнений равновесия, приведенных в [9]. Подставив это выражение в (22), имеем

$$D \frac{\cos \theta}{r} \frac{d}{dr} \left(r \cos \theta \frac{d}{dr} \left(\frac{1}{r} \frac{d}{dr} (r \sin \theta) \right) \right) + h \frac{\cos \theta}{r} \frac{d}{dr} (r \sigma_r \operatorname{tg} \theta) = 0.$$

Используя в случае нелинейного прогиба некоторое модельное представление для радиального напряжения $\sigma_r = P \cos^2 \theta$, проведем интегрирование:

$$\begin{aligned} D \left(r \cos \theta \frac{d}{dr} \left(\frac{1}{r} \frac{d}{dr} (r \sin \theta) \right) \right) + h (r P \sin \theta \cos \theta) &= c_0, \quad c_0 = \text{Const}, \\ \frac{d}{dr} \left(\frac{1}{r} \frac{d}{dr} (r \sin \theta) \right) + \frac{h P}{D} \sin \theta &= \frac{c_0}{r \cos \theta}. \end{aligned}$$

Из условия ограниченности $\theta(r)$ следует, что константа интегрирования c_0 равна нулю. Получаем нелинейное уравнение второго порядка для $\theta(r)$:

$$\frac{d}{dr} \left(\frac{1}{r} \frac{d}{dr} (r \sin \theta) \right) + \frac{h P}{D} \sin \theta = 0. \quad (25)$$

Решением уравнения (25) являются функции Бесселя первого рода со значком 1, поскольку функции Бесселя второго рода Y_1 не ограничены в нуле. Имеем

$$\sin \theta(r) = k J_1(\lambda r), \quad (26)$$

где k – константа интегрирования, $\lambda = \sqrt{hP/D}$ – собственное число. Условие $\theta(R) = 0$ дает $J_1(\lambda R) = 0$, откуда $\lambda_n = \tau_n/R$, где τ_n – n -й нуль функции Бесселя $J_1(r)$. Функции угла наклона касательной для защемленной пластины имеют окончательный вид

$$\sin \theta(r) = k_n J_1(\tau_n r/R), \quad \cos \theta(r) = \sqrt{1 - k_n^2 J_1^2(\tau_n r/R)}. \quad (27)$$

Зная зависимость $\theta(r)$, выразим профиль пластины $w(r)$ и криволинейную длину $l(r)$ в явном виде через квадратуры

$$w(r) = \int_R^r \operatorname{tg} \theta(r) dr, \quad l(r) = \int_0^r \sec \theta(r) dr, \quad (28)$$

где учтены начальные условия $w(R) = 0$ и $l(0) = 0$. Используя (27), имеем

$$w(r) = - \int_R^r \frac{k_n J_1(\tau_n r/R) dr}{r \sqrt{1 - k_n^2 J_1^2(\tau_n r/R)}}, \quad l(r) = \int_0^r \frac{dr}{\sqrt{1 - k_n^2 J_1^2(\tau_n r/R)}}. \quad (29)$$

Вид полученных выражений (29) аналогичен структуре эллиптических интегралов в нормальной форме Лежандра. Поэтому целесообразно ввести новую систему специальных функций – интегралов и их обращений по аналогии с эллиптическими интегралами и функциями Якоби.

Введем новую специальную функцию – «эллиптический интеграл Бесселя»:

$$\operatorname{Fb}(k, \varphi) = \int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 J_1^2(\varphi)}}. \quad (30)$$

Здесь главное отличие от эллиптического интеграла I рода заключается в замене синуса в подынтегральном выражении на функцию Бесселя со значком 1. Значения модуля k должны лежать в пределах от 0 до $1/\operatorname{Max} J_1 = 1/0,58186\dots = 1,7186\dots$, где $\operatorname{Max} J_1$ – максимальное значение функции Бесселя. В противном случае функция $\operatorname{Fb}(k, \varphi)$ принимает комплексные значения для действительного аргумента. Нелинейные свойства начинают проявляться при значениях k , близких к k_{\max} .

Обращением «эллиптического интеграла Бесселя» как функции верхнего предела φ служит функция «эллиптическая амплитуда Бесселя»:

$$u = \operatorname{Fb}(k, \varphi), \quad \varphi = \operatorname{amb}(u, k).$$

Эта функция также будет зависеть от модуля k . Аналог этой функции – эллиптическая амплитуда Якоби. Графики функции $\operatorname{amb}(u, k)$ при разных значениях модуля k представлены на рис. 6. Штриховой линией показана биссектриса прямого угла и функция $\operatorname{amb}(u, k)$ при $k = 0$.

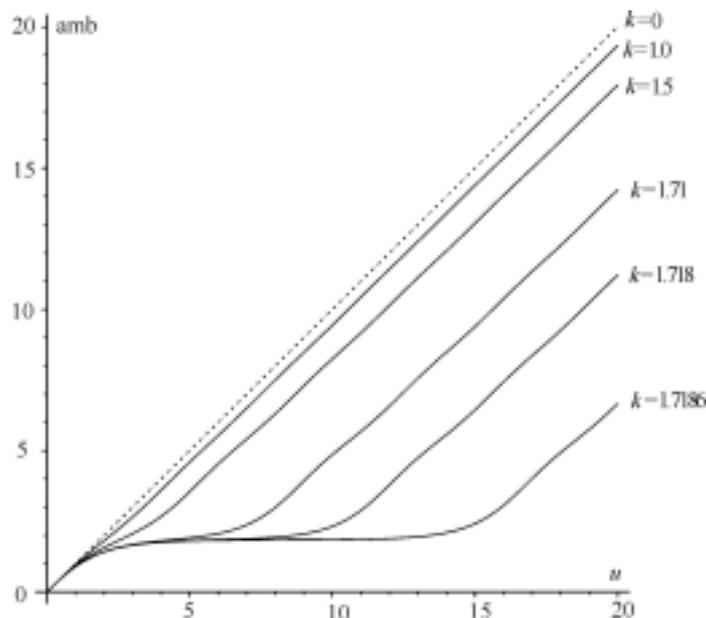


Рис. 6. «Эллиптическая амплитуда Бесселя» при разных k

По аналогии с эллиптическим синусом Якоби введем «эллиптический синус Бесселя» – $\text{snb}(u, k) = J_1(\text{amb}(u, k))$. Эта функция имеет нули в точках

$$\text{Fb}(k, \tau_n) = \int_0^{\tau_n} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 J_1^2(\varphi)}}, \quad (31)$$

где τ_n – множество нулей функции Бесселя J_1 . Интеграл $\text{Fb}(k, \tau_n)$ – аналог полного эллиптического интеграла $K(k) = F(k, \pi/2)$ и играет роль *неравномерного* «полупериода», как функция $2K(k)$ в теории эллиптических функций Якоби играет роль равномерного полупериода. График функции показан при разных k на рис. 7. Из графика функции видно, что при стремлении $k \rightarrow k_{\max}$ первый «период» функции стремится к бесконечности, при этом следующие периоды практически не изменяются. Это свойство функции $\text{snb}(u, k)$ позволяет моделировать одной функцией одновременно и линейные, и сильно нелинейные в ограниченной области свойства различных систем с цилиндрической симметрией.

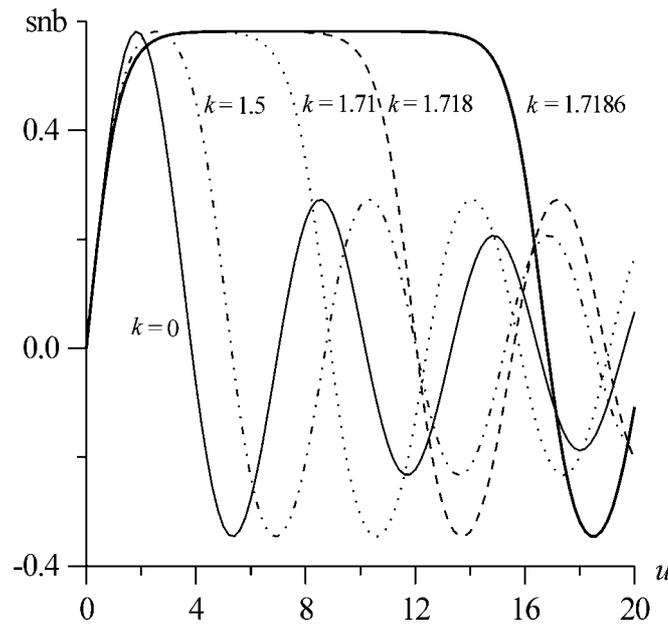


Рис. 7. «Эллиптический синус Бесселя»

Можно ввести также дополнительную функцию – $\text{dnb}(u, k) = \sqrt{1 - k^2 \text{snb}^2(u, k)}$.

Введенные нами функции $\text{amb}(u, k)$ и $\text{snb}(u, k)$ – непериодические мероморфные функции. Производные этих функций:

$$\frac{d \text{amb}(u, k)}{du} = \text{dnb}(u, k), \quad \frac{d \text{snb}(u, k)}{du} = \left(J_0(\text{amb}(u, k)) - \frac{\text{snb}(u, k)}{\text{amb}(u, k)} \right) \text{dnb}(u, k).$$

Найденные выше решения задачи представим с помощью введенных функций. Выражения (28) для криволинейной дуги и полярного радиуса примут вид

$$l(r) = \frac{1}{\lambda} \text{Fb}(k, \lambda r), \quad r(l) = \frac{1}{\lambda} \text{amb}(\lambda l, k). \quad (32)$$

Выражения для углов наклона касательной (27) перейдут в

$$\sin \theta(l) = k J_1(\text{amb}(\lambda l, k)) = k \text{snb}(\lambda l, k), \quad \cos \theta(l) = \sqrt{1 - \sin^2 \theta(l)} = \text{dnb}(\lambda l, k), \\ \theta(l) = \arcsin[k \text{snb}(\lambda l, k)]. \quad (33)$$

Выражения (33) по своей структуре аналогичны выражениям (2) в задаче о геометрически нелинейном изгибе тонкого стержня.

Граничное условие для защемленной по краю пластины $\theta(L) = 0$ дает $\sin \theta(L) = k \text{snb}(\lambda L, k) = 0$, где L – половина «криволинейного диаметра». Отсюда по свойствам функции $\text{snb}(u, k)$ получаем спектр собственных значений

$$\lambda = \frac{1}{L} \text{Fb}(k, \tau_n), \quad (34)$$

где τ_n – множество нулей функции Бесселя J_1 . По известному значению λ можно найти координату конца пластины $R = \tau_n/\lambda$. Из соотношения (34) находим пороги нагрузки $P = \lambda^2 D/h = D \text{Fb}^2(k, \tau_n)/hL^2$, или, если ввести первую критическую нагрузку, т.е. аналог эйлеровой силы для стержня, $P_1 = D \text{Fb}^2(0, \tau_1)/hL^2 = D\tau_1^2/hL^2$, то

$$P/P_1 = [\text{Fb}(k, \tau_n)/\tau_1]^2. \quad (35)$$

Выражение (35) неявно задает зависимость модуля от внешней нагрузки $k(P)$. Выражение для прогиба пластины (29) можно записать в параметрическом виде через квадратуры, где параметром будет выступать криволинейная дуга:

$$w(l) = k \int_l^L \text{snb}[\text{Fb}(k, \tau_n)l/L, k] dl, \quad r(l) = \frac{L}{\text{Fb}(k, \tau_n)} \text{amb}[\text{Fb}(k, \tau_n)l/L, k]. \quad (36)$$

Эти уравнения описывают форму сильно изогнутой пластины ($0 \leq l \leq L$). Модуль k изменяется в пределах $0 \leq k \leq 1,7186\dots$, задает общую кривизну профиля пластины и определяется величиной действующей внешней силы P и номера моды n .

Из полученных выражений видно, что у «эллиптических интегралов Бесселя» аргумент всегда полярный радиус r , а у «эллиптических функций Бесселя» – «криволинейный диаметр», т.е. длина дуги поверхности l . Уравнение (25), написанное в переменных $\theta(r)$, можно переписать в переменных $\theta(l)$; используя соотношение (33), получим

$$\frac{\text{amb}^2(\lambda l)}{\lambda^2 \text{dnb}(\lambda l)} \frac{d^2\theta}{dl^2} + \frac{\text{amb}(\lambda l)}{\lambda} \frac{d\theta}{dl} + (\text{amb}^2(\lambda l) - 1) \sin \theta = 0.$$

Здесь роль полярного радиуса играет эллиптическая функция: $\text{amb}(\lambda l) = \lambda r$, а линейный и криволинейный дифференциалы связаны соотношением $dr = \text{dnb}(\lambda l) dl$. Если сделать тождественную замену λl на «обобщенную длину» l , то получим

$$\frac{\text{amb}^2(l)}{\text{dnb}(l)} \frac{d^2\theta}{dl^2} + \text{amb}(l) \frac{d\theta}{dl} + (\text{amb}^2(l) - 1) \sin \theta = 0. \quad (37)$$

Это нелинейное уравнение Бесселя (37) возникает при решении геометрически нелинейных задач с круговой симметрией. Уравнение (37) служит аналогом уравнения типа нелинейного маятника (1) для случая цилиндрической симметрии задачи и переходит в него в предельном случае $r \rightarrow \infty$. В предельном случае малых прогибов – геометрически линейном случае ($k = 0$) – уравнение (37) переходит в обычное уравнение Бесселя.

Заключение. При последовательном применении аппарата эллиптических функций Якоби получены точные решения задачи о геометрически нелинейном изгибе тонкого стержня под действием силы постоянного направления и следящей силы. Эти решения имеют удобный для алгоритмических вычислений вид и позволяют подробно анализировать формы решений и пороги потери устойчивости для различных мод изгиба стержня. Этот анализ позволил показать существенную разницу между жесткой потерей устойчивости при нагружении силой постоянного направления и мягкой потерей устойчивости при нагружении следящей силой.

Получено геометрически нелинейное уравнение равновесия тонкой гибкой пластины при радиальном сжатии. Для формы изгиба пластины было получено нелинейное уравнение Бесселя. По аналогии с эллиптическими интегралами и эллиптическими функциями Якоби были введены «эллиптические интегралы Бесселя» и их обращения – «эллиптические функции Бесселя». С помощью новых функций решения, описывающие форму профиля изогнутой пластины, были выражены в параметрическом виде. Новые функции имеют осциллирующий характер и резко изменяют свои нелинейные свойства только в области первого максимума, что может позволить моделировать одной функцией одновременно и сильно нелинейные свойства, и линейные свойства различных систем с осевой симметрией.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Вольмир А.С. Устойчивость деформируемых систем / А.С. Вольмир. – М.: Наука, 1967. – 984 с.
2. Попов Е.П. Теория и расчет гибких упругих стержней / Е.П. Попов. – М.: Наука, 1986. – 296 с.
3. Работнов Ю.Н. Механика деформируемого твердого тела / Ю.Н. Работнов. – М.: Наука, 1979. – 744 с.

4. Захаров Ю.В. Нелинейный изгиб тонких упругих стержней / Ю.В. Захаров, К.Г. Охоткин // ПМТФ. – 2002. – Т.43. – № 5. – С. 124-131.
5. Захаров Ю.В. Устойчивость тонкой круговой пластины при радиальном сжатии / Ю.В. Захаров, К.Г. Охоткин // ДАН. – 2001. – Т.377. – № 6. – С. 764-768.
6. Захаров Ю.В. Интегрирование нелинейных уравнений изгиба осесимметричной пластины с помощью введения новой системы специальных функций / Ю.В. Захаров, К.Г. Охоткин // Труды III международной конференции «Симметрия и дифференциальные уравнения». – Красноярск: ИВМ СО РАН, 2002. – С. 106-110.
7. Лаврентьев М.А. Динамические формы потери устойчивости упругих систем / М.А. Лаврентьев, А.Ю. Ишлинский // ДАН СССР. – 1949. – Т. 64. – № 6. – С. 779-782.
8. Власов В.З. Общая теория оболочек и ее приложение в технике / В.З. Власов. – М.: Гостехиздат, 1949. – 781 с.
9. Рекач В.Г. Расчет оболочек сложной геометрии / В.Г. Рекач, С.Н. Кривошапко. – М.: Изд-во УДН, 1988. – 176 с.
10. Föppl A. Vorlesungen über technische Mechanik / A. Föppl. Bd 5. Die wichtigsten Lehren der höheren Elastizitätstheorie. – Leipzig: B.G. Teubner, 1907. – P. 391.
11. Karman Th. Festigkeitsprobleme in Maschinenbau / Th. Karman. Enzyklopädie der Mathematischen Wissenschaften. Bd IV. Mechanik, Teilband 4, Hft 3, Art 27, Punkt 8. Ebene Platten. Leipzig: B.G. Teubner, 1910. – P. 311-385.
12. Сьярле Ф. Уравнения Кармана / Ф. Сьярле, П. Рабье. – М.: Мир, 1983. – 172 с.

**ELLIPTIC FUNCTIONS AND PROBLEMS
OF THIN RODS AND PLATES BENDING**

Yu.V. Zakharov, K.G. Okhotkin

Jacobian elliptic functions application to the solutions of some nonlinear problems on strong bending of thin elastic rods and plates is considered. The new class of special functions, generalizing of the elliptic functions, is introduced for the round plate bending description.