УДК 517.55

О РЕКУРРЕНТНЫХ ФОРМУЛАХ НЬЮТОНА ДЛЯ ЦЕЛЫХ И МЕРОМОРФНЫХ ФУНКЦИЙ КОНЕЧНОГО ПОРЯДКА

Т.И.Качаева *

Найдены аналоги рекуррентных формул Ньютона, связывающие степенные суммы отрицательной степени корней (или полюсов) целых (или мероморфных) функций конечного порядка с коэффициентами разложения Тейлора таких функций.

Пусть $f(z)$— целая функция на комплексной плоскости $\mathbb{C}$ *конечного порядка роста* ρ [illegible] 0. Предположим, что $f(0) \neq 0$ и что a_n (n =1,2,...) — нули этой функции и их число бесконечно. Хорошо известна следующая теорема Адамара (см., например, [1, с. 259]).

Теорема 1. *Справедливо разложение*

$$f(z) = e^{Q(z)}h(z) = e^{Q(z)}\prod E\left(\frac{z}{a_n}, p\right), \text{Equation Section 1} \tag{1.1}$$

которое сходится равномерно и абсолютно на плоскости C, где

$$E(w,p)=(1-w)e^{w+\frac{w^2}{2}+\ldots+\frac{w^p}{p}}$$

— первичный множитель, $p \leq \rho$ *и степень многочлена Q не превосходит ρ.*

Если число нулей функции *f* конечно, то фактически это представление сводится к произведению множителя $e^{Q(z)}$ на полином. Для полиномов формулы Ньютона хорошо известны. Наша цель — рассмотреть более сложные случаи.

Функция *h*(*z*) является *каноническим произведением* первичных множителей $E\left(\frac{z}{a_n},p\right)$, и целое число *p* называется *родом* этого произведения.

Числовой ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a_n^k} \tag{1.2}$$

абсолютно сходится при *k*>*p*, а значит и при *k*>*ρ* (см, например, [1, с. 258]). На самом деле $p \leq \rho_1 \leq \rho,$ где ρ_1 — показатель сходимости целой функции *f* (см. [1, с. 258]). Если *ρ* не целое, то $\rho_1=\rho$ и p=[*ρ*]=[ρ_1] (см. [1, с. 258-260]), где [*ρ*]— целая часть числа *ρ*. Если ρ_1 — целое, то *p* равно либо ρ_1, либо ρ_1-1.

Числа σ_k являются *степенными суммами* нулей функции *f* отрицательной степени.

В дальнейшем сумму ряда (1.2) будем обозначать через σ_k.

Если *f*(*z*) — мероморфная функция порядка *ρ* и $f(0)\neq 0,\infty,$ то справедлива аналогичная теорема Адамара (см., например, [1, с. 292]). А именно,

Теорема 2. *Справедливо разложение*

$$f(z)=e^{Q(z)}\frac{h(z)}{u(z)}, \tag{1.3}$$

где

$$h(z)=\prod_{n=1}^{\infty}E\left(\frac{z}{a_n},p\right),\quad u(z)=\prod_{n=1}^{\infty}\left(\frac{z}{b_n},q\right).$$

Данные разложения сходятся абсолютно и равномерно в C, целые числа p,q $\leq$ *ρ, степень многочлена Q не превосходит ρ, а числа* b_n *являются полюсами мероморфной функции f.*

Для мероморфной функции *f* обозначим через *σk* сумму ряда

$$\sigma_k=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a_n^k}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{b_n^k}.$$

Как известно, данный ряд сходится, если *k*>max(*p,q*) и, следовательно, если *k*>*ρ*. Заметим, что если $p\neq q$, то ряд из степеней обратных величин нулей может сходиться, а ряд из степеней обратных величин полюсов может расходиться для одной и той же степени.

Цель работы – получение рекуррентных формул Ньютона, связывающих степенные суммы корней (и полюсов) σ_k с коэффициентами Тейлора разложения функции *f* в точке 0, т.е. с коэффициентами разложения вида

$$f(z)=\sum_{k=1}^{\infty}c_k z^k. \tag{1.4}$$

В случае, когда мероморфная функция *f* имеет разложение без экспонент, т.е. вида

$$f(z)=f(0)\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{z}{a_n}\right)\Big/\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{z}{b_n}\right),$$

такие формулы отмечались в [2, гл. 1].

Итак, пусть *f* — мероморфная функция порядка *ρ*, для которой справедливо разложение (1.3). Рассмотрим интеграл

$$J_k=\int_{\gamma_\varepsilon}\frac{df(z)}{z^k f(z)},$$

где $k \in \mathbf{Z}$, цикл $\gamma_\varepsilon = \{z : |z| = \varepsilon\}$, положительное число ε настолько мало, что в замыкании круга $B_\varepsilon = \{z : |z| < \varepsilon\}$ нет ни нулей ни полюсов функции *f*.

Ясно, что при $k \le 0$ интеграл $J_k = 0$ по теореме Коши (подынтегральная функция – голоморфна в круге B_ε).

Нетрудно проверить (используя разложение (1.3)), что

$$\frac{df(z)}{f(z)} = dQ(z) + \frac{dh(z)}{h(z)} - \frac{du(z)}{u(z)}.$$

Если обозначить

$$Q(z) = \sum_{n=0}^{[\rho]} q_n z^n,$$

то интеграл

$$\int_{\gamma_\varepsilon} \frac{dQ(z)}{z^k} = (2\pi i) k q_k \tag{1.5}$$

при $k = 1, \ldots, [\rho]$. Для других k данный интеграл равен 0.

Лемма 1. *Интеграл*

$$\int_{\gamma_\varepsilon} \frac{dh(z)}{z^k h(z)} = -(2\pi i) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n^k}$$

при $k > p$*, а при* $k \le p$ *данный интеграл равен 0.*

Доказательство. Из теоремы 2 имеем разложение

$$\frac{dh(z)}{h(z)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{dE(z/a_n, p)}{E(z/a_n, p)},$$

которое сходится абсолютно и равномерно в замыкании круга B_ε. Тогда

$$\int_{\gamma_\varepsilon} \frac{dh(z)}{z^k h(z)} = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\gamma_\varepsilon} \frac{dE(z/a_n, p)}{z^k E(z/a_n, p)}.$$

А интеграл

$$\int_{\gamma_\varepsilon} \frac{dE(z/a_n, p)}{z^k E(z/a_n, p)} = \int_{\gamma_\varepsilon} \frac{d\left[(1 - z/a_n) e^{\frac{z}{a_n} + \frac{z^2}{2a_n^2} + \ldots + \frac{z^p}{p a_n^p}}\right]}{z^k (1 - z/a_n) e^{\frac{z}{a_n} + \frac{z^2}{2a_n^2} + \ldots + \frac{z^p}{p a_n^p}}} =$$

$$= -\int_{\gamma_\varepsilon} \frac{d\, z/a_n}{z^k (1 - z/a_n)} + \int_{\gamma_\varepsilon} \frac{dz}{z^k} \left(\frac{1}{a_n} + \frac{z}{a_n^2} + \ldots + \frac{z^{p-1}}{a_n^p} \right) =$$

$$= \int_{\gamma_\varepsilon} \frac{dz}{z^k (z - a_n)} + \int_{\gamma_\varepsilon} \left(\frac{1}{a_n z^k} + \frac{1}{a_n^2 z^{k-1}} + \ldots + \frac{1}{a_n^p z^{k+1-p}} \right) dz.$$

По теореме о полной сумме вычетов

$$\int_{\gamma_\varepsilon} \frac{dz}{z^k (z - a_n)} = -(2\pi i) \frac{1}{a_n^k},$$

и

$$\int_{\gamma_\varepsilon} \left(\frac{1}{a_n z^k} + \frac{1}{a_n^2 z^{k-1}} + \ldots + \frac{1}{a_n^p z^{k+1-p}} \right) dz = (2\pi i) \frac{1}{a_n^k}$$

при $k \le p$, а в остальных случаях данный интеграл равен 0. Отсюда и следует лемма. Аналогичное утверждение справедливо и для функции $u(z)$.

Лемма 2. *Интеграл*

$$\int_{\gamma_\varepsilon} \frac{du(z)}{z^k u(z)} = -(2\pi i)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{b_n^k}$$

при $k > q$, *а при* $k \le q$ *данный интеграл равен 0.*

Рассмотрим теперь случай, когда f — целая функция вида (1.1) и $p = [\rho]$.

Теорема 3. *Пусть f — целая функция конечного порядка ρ вида (1.1), которая имеет разложение Тейлора (1.4) и для которой p =[ρ], тогда справедливы следующие рекуррентные формулы при k > p*:

$$\sum_{j=0}^{k-p-1} c_j \sigma_{k-j} + kc_k = \sum_{j=k-p}^{k-1} c_j (k-j) q_{k-j}. \tag{1.6}$$

Теорема, в частности, справедлива, когда ρ не целое число.

Доказательство. Рассмотрим интеграл

$$\int_{\gamma_\varepsilon} \frac{df}{z^k}, \qquad k > p.$$

С одной стороны (из представления (1.4)), он равен

$$\int_{\gamma_\varepsilon} \frac{df}{z^k} = \int_{\gamma_\varepsilon} \frac{f'dz}{z^k} = \begin{cases} 0, & если \quad k \le 0, \\ (2\pi i)kc_k, & если \quad k > 0. \end{cases}$$

С другой стороны (используя лемму 1, представление (1.4) и формулу (1.5)), имеем

$$\int_{\gamma_\varepsilon} \frac{df}{z^k} = \int_{\gamma_\varepsilon} \frac{f(z)df(z)}{z^k f(z)} = \sum_{j=0}^{\infty} c_j \int_{\gamma_\varepsilon} \frac{df(z)}{z^{k-j} f(z)} =$$

$$= -(2\pi i)\sum_{j=0}^{k-p-1} c_j \sigma_{k-j} + (2\pi i)\sum_{j=k-p}^{k-1} c_j (k-j) q_{k-j}.$$

Из сравнения этих двух равенств следует теорема 3.

Для мероморфных функций справедливо аналогичное утверждение.

Теорема 4. *Пусть f(z) — мероморфная функция конечного порядка ρ вида (1.3), которая имеет разложение Тейлора (1.4) и для которой* $p < \nu = [p]$, *тогда справедливы рекуррентные формулы (1.6) при* $k > \nu$.

Доказательство полностью повторяет доказательство теоремы 3, нужно только использовать обе леммы.

Если для целой функции f порядок является целым числом, но $p<[\rho]$, то формула (1.6) нуждается в уточнении. Пусть $[\rho]=\nu$.

Теорема 5. *Пусть f — целая функция конечного порядка ρ вида (1.1), которая имеет разложение Тейлора (1.4) и для которой p<ν=[ρ], тогда справедливы следующие рекуррентные формулы при k>ν*:

$$\sum_{j=0}^{k-p-1} c_j \sigma_{k-j} + kc_k = \sum_{j=k-\nu}^{k-1} c_j (k-j) q_{k-j}. \tag{1.7}$$

Доказательство данного утверждения проходит так же, как и доказательство теоремы 3. Заметим, что в равенстве (1.7) слева и справа коэффициенты c_k могут повторяться. Рассмотрим пример. Известно (см., например, [1, с. 158]), что для Г-функции Эйлера справедливо разложение

$$\frac{1}{\Gamma(z)} = ze^{\gamma z}\prod_{k=1}^{\infty}\left(1+\frac{z}{k}\right)e^{-z/k},$$

где γ — постоянная Эйлера. Отсюда, используя свойства Г-функции, получаем

$$\frac{1}{z\Gamma(z)} = \frac{1}{\Gamma(1+z)} = e^{\gamma z}\prod_{k=1}^{\infty}\left(1+\frac{z}{k}\right)e^{-z/k}$$

или

$$\frac{1}{\Gamma(1-z)} = e^{-\gamma z}\prod_{k=1}^{\infty}\left(1-\frac{z}{k}\right)e^{z/k}.$$

Так что $\dfrac{1}{\Gamma(1-z)}$ является целой функцией порядка 1, для которой $p=\rho=1$. Поэтому для нее применима теорема 3. Обозначая (как обычно) коэффициенты разложения в нуле данной функции по формуле Тейлора через c_k (причем $c_0=1$), получим следующие рекуррентные формулы:

$$\varsigma(k)+\sum_{j=1}^{k-2} c_j \varsigma(k-j)+\gamma c_{k-1}+k c_k=0, \qquad k\geq 2,$$

где

$$\varsigma(k)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^k}$$

— ζ-функция Римана.

Например, при $k=2$ коэффициент $c_1=-\gamma$ (см., например, [3]), и получается известное соотношение

$$\varsigma(2)-\gamma^2+2c_2=0.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Титчмарш Е. Теория функций / Е.Титчмарш.- М.: Наука, 1980.
2. Быков В.И. Методы исключения в компьютерной алгебре многочленов / В.И.Быков, А.М.Кытманов, М.З.Лазман.- Новосибирск: Наука, 1989.
3. Прудников А.П. Интегралы и ряды. Элементарные функции / А.П.Прудников, Ю.А.Брычков, О.И.Маричев. - М.: Наука, 1981.

ON THE RECURSIVE NEWTON FORMULAS FOR ENTIRE AND MEROMORPHIC FUNCTIONS OF FINITE ORDER

T.I.Kachaeva

It were found the analogues of recursive Newton formulas connecting power sums of negative exponent of roots (or poles) for entire and meromorphic functions of finite order with Taylor coefficients.