О ГРУППАХ ГОМОЛОГИЙ НЕКОТОРЫХ ПОВЕРХНОСТЕЙ С САМОПЕРЕСЕЧЕНИЕМ

К.В. Кузвесов, Р.В.Ульверт*

Введен класс двумерных поверхностей (вообще говоря, с самопересечением), обобщающих проективную плоскость и лист Мебиуса. Показано, что для таких поверхностей реализуются кручения произвольного порядка в гомологиях. Ранее подобный факт отмечался на многообразиях более высокой размерности, например, на трехмерных линзовых многообразиях.

Хорошо известны результаты о гомологиях двумерных компактных многообразий M_p (сферы с p ручками) и N_q (сферы с q листами Мебиуса). Их одномерные группы гомологий $-H_1(M_p) \cong \mathbb{Z}^{2p}$ и $H_1(N_q) \cong \mathbb{Z}^{q-1} \oplus \mathbb{Z}_2$.

Таким образом, на двумерных компактных многообразиях в гомологиях реализуются кручения лишь второго порядка. Среди хорошо изученных многообразий, кручения любого наперед заданного порядка реализуются на трехмерных линзовых многообразиях [1, стр.54].

Цель статьи – показать, что кручения произвольного порядка можно реализовать на двумерных многообразиях с самопересечениями. Мы введем класс поверхностей, обобщающих проективную плоскость и лист Мебиуса.

В поисках примера поверхности, одномерная группа гомологий которой имела бы кручение любого наперед заданного порядка n, рассмотрим следующий класс поверхностей.

В правильном n-угольнике соединим отрезками каждую из вершин $B_1, \ldots, B_n$ с его центром A; множество точек, состоящее из n отрезков $AB_1, \ldots, AB_n$, обозначим через S и рассмотрим топологическое произведение $S\times[0,1]$ (рис. 1). Склеим ребро $AB_1\times\{1\}$ с ребром $AB_2\times\{0\}$, ребро $AB_2\times\{1\}$ с ребром $AB_3\times\{0\}$, …, ребро $AB_n\times\{1\}$ с ребром $AB_1\times\{0\}$. Полученную таким образом поверхность будем называть поверхностью типа W_n или *скрученным n-листником* (рис. 2).

К единственному краю поверхности W_n подклеим диск D^2. Полученную поверхность обозначим через P_n, и именно такие поверхности будут нас здесь интересовать.

При $n = 2$ получим соответственно W_2 – лист Мебиуса и P_2 – проективная плоскость $\mathbb{R}\mathbb{P}^2$. Для $n > 2$ поверхности W_n и P_n являются самопересекающимися.

Известно, что $H_1(P_2) = H_1(\mathbb{R}\mathbb{P}^2, \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}_2$. Обобщением этого факта является следующий факт.

Теорема. $H_1(P_n) \cong \mathbb{Z}_n$ при $n = 2$.

Прежде чем приступить к непосредственному доказательству, приведем развертку поверхности P_n. Для этого разрежем n-листник W_n по краю a – получим кольцо, внешняя окружность которого факторизуется отношением эквивалентности $z \sim ze^{2\pi i/n}$ (рис. 3). Приклеивая к краю c диск, приходим к развертке поверхности P_n.

Теперь легко произвести триангуляцию поверхности P_n (в соответствии с рис. 4). Все 2-симплексы в триангуляции ориентируем обходом против часовой стрелки, радиальные 1-симплексы ориентируем порядком (O, c_i), (c_i, a_j), а круговые 1-симплексы (a_i, a_j), (c_k, c_{k+1}) – обходом против часовой стрелки.

Перейдем к непосредственному доказательству теоремы, т.е. к описанию фактор группы

$$H_1(K) = {Z_1(K)}\big/{B_1(K)}$$

– группы всех 1-циклов с точностью до границ 2-цепей.

Произвольная цепь $\sigma\in C_1(K)$ есть линейная комбинация

$$\sigma = \sum_i t_i(O,c_i) + \sum_i r_i(c_i,c_{i+1}) + \sum_i s_i^0(a_0,c_{2i}) + \sum_i s_i^1(a_1,c_i) +$$

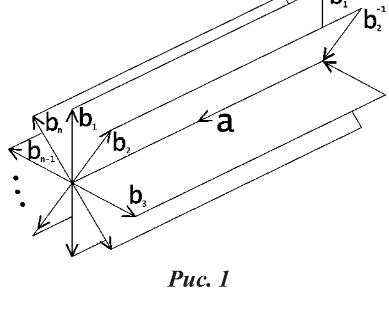

Рис. 1

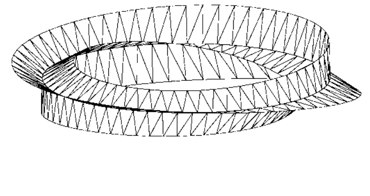

Рис. 2. Поверхность W_3

$$\sum_i s_i^2(a_2, c_i) + k(a_0, a_1) + l(a_1, a_2) + m(a_2, a_0), \qquad i \in \mathbb{Z}_{2n}.$$

Симплексы вида (O, c_j), (a_i, c_j) очевидным образом линейно выражаются с точностью до границ 2-цепей через симплексы вида (c_i, c_{i+1}) и симплексы (O, c_0), (c_0, a_0), (a_0, a_1), (a_1, a_2), (a_2, a_0), поэтому цепь σ имеет вид

$$\sigma = \sum_i m_i(c_i, c_{i+1}) + t(O, c_0) + s(c_0, a_0) + k(a_0, a_1) + l(a_1, a_2) + m(a_2, a_0) + \partial\sigma^2, \quad \sigma^2 \in C_2(K). \quad (*)$$

Нас интересуют только циклы, т.е. цепи $\sigma = z$, для которых $\partial\sigma = 0$. Так что если в (*) $\sigma = z$ – цикл, то

$$z = t(O, c_0) + \ldots \Rightarrow \partial z = -t(O) + t(c_0) + \ldots = 0 \Rightarrow t = 0,$$

поскольку вершина (O) входит в записи $(_*)$ только в состав симплекса (O, c_0).

Далее, вершина (c_1) входит в записи $(_*)$ только в составе симплексов (c_0, c_1) и (c_1, c_2), поэтому

$$z = m_0(c_0, c_1) + m_1(c_1, c_2) + \ldots \Rightarrow \partial z = (m_0 - m_1)(c_1) + \ldots = 0 \Rightarrow m_0 = m_1.$$

Аналогично получаем $m_1 = m_2, \ldots, m_{2n-1} = m_0$, т.е. $m_0 = m_1 = \ldots = m_{2n-1}$.

Вершина (c_0) входит в $(_*)$ как грань симлексов (c_0, a_0), $(c_0\, c_1)$ и (c_{2n-1}, c_0), следовательно

$$z = s(c_0, a_0) + m_0(c_0, c_1) + m_{2n-1}(c_{2n-1}, c_0) + \ldots \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \partial z = (\mathrm{m}_{2n-1} - m_0 - s)(c_0) + \ldots = 0 \Rightarrow s = \mathrm{m}_{2n-1} - m_0,$$

$$\text{но } \mathrm{m}_{2n-1} = m_0 \Rightarrow s = 0.$$

Из сказанного следует, что разложение (∗) в случае, когда $\sigma = z$ – цикл, можно переписать в виде

$$z = m_0 \sum_i (c_i, c_{i+1}) + k(a_0, a_1) + l(a_1, a_2) + m(a_2, a_0) + \partial\sigma^2. (**)$$

Теперь заметим, что слагаемое $m_0 \sum_i (c_i, c_{i+1})$ в (∗∗) есть граница цепи

$$m_0[(O, c_1, c_0) + (O, c_2, c_1) + \ldots + (O, c_{2n-1}, c_0)],$$

и поэтому может не учитываться (входит в состав $\partial\sigma^2$).

Симплекс (a_0) входит в (∗∗) только в составе симплексов (a_0, a_1) и (a_2, a_0), поэтому $k=m$; аналогично получаем $l=k$. Таким образом, $k=l=m$.

Окончательно, произвольный цикл z имеет вид

$$z = k[(a_0, a_1) + (a_1, a_2) + (a_2, a_0)] = k \bullet \gamma,$$

т.е. одномерная группа гомологий порождается циклом $\gamma = (a_0, a_1) + (a_1, a_2) + (a_2, a_0)$: $H_1(K) = <\gamma>$.

Остается заметить, что $n \bullet \gamma$ есть граница суммы всех 2-симплексов из K и потому $n \bullet \gamma \sim 0$ ($n \bullet \gamma$ – граница и ноль группы < г >). Понятно, что n – наименьшее положительное число с таким свойством. Это означает, что группа $<\gamma>$ – циклическая порядка n.

Замечания. Конструкцию введенного скрученного n-листника можно обобщить, совершая скрутку не на $1/n$, а на k/n оборота ($k < n$), т.е. склеивая ребра $AB_i \times \{1\}$ с $AB_j \times \{0\}$ при $|i-j| = k$. Это можно записать в виде подстановки

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & k & k+1 & \ldots & n-1 & n \\ k+1 & k+2 & \ldots & n & 1 & \ldots & k-1 & k \end{pmatrix},$$

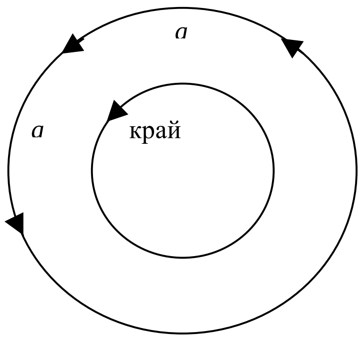

Рис. 3. Развертка поверхности

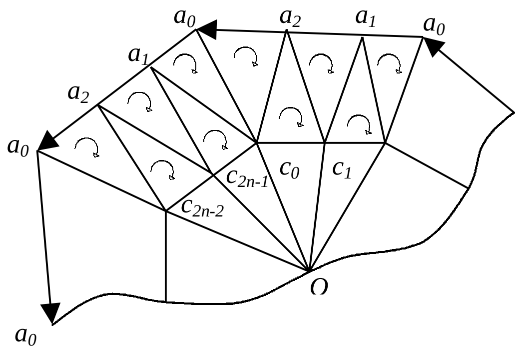

Рис. 4. Триангуляция поверхности

Рис. 5. Поверхность $W_{4,2}$

разлагающейся в произведение m независимых циклов.

Соответственно, край таких поверхностей $W_{n,k}$ будет состоять из m окружностей, к каждой из которых можно подклеить диски, листы Мебиуса, такие же поверхности, либо сферы с m дырками.

Идея введенных поверхностей с самопересечением была высказана на лекции А.К.Циха, предложившего рассмотреть случай $W_{4,2}$ (рис. 5).

Можно также ввести понятие обобщенного листа Мебиуса, получающегося скручиванием произвольной связной плоской фигуры, переходящей в себя при повороте на определенный угол.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Дубровин Б.А., Новиков С.П., Фоменко А.Т. Современная геометрия. Методы теории гомологий. – М.: Наука, 1984. – 343 с.