ТЕОРЕМА ОБ АНАЛИТИЧЕСКОМ ПРЕДСТАВЛЕНИИ CR-ФУНКЦИЙ НА ГИПЕРПОВЕРХНОСТЯХ С ОСОБЕННОСТЯМИ

С.Г.Мысливец*

Рассмотрена проблема выполнимости теоремы об аналитическом представлении для CR-функций на гиперповерхностях Г с особенностями. Показано, что при некоторых условиях на интегрируемую CR-функцию, теорема об аналитическом представлении остается верной.

1. Постановка задачи

Теорема об аналитическом представлении для CR-функций [3,22], заданных на гиперповерхности, играет важную роль в теории CR-функций (см., например, [21,23]). Ее следствием является, например, теорема Гартогса-Бохнера об устранении компактных особенностей голоморфных функций. Напомним формулировку теоремы об аналитическом представлении.

Пусть Ω есть область в C^n, n>1, для которой первая группа когомологий с коэффициентами в пучке ростков голоморфных функций тривиальна, т.е. $H^1(\Omega,O)=0$ (например, область Ω является областью голоморфности).

Предположим, что Γ есть гладкая (класса C^1) замкнутая ориентируемая гиперповерхность в Ω, разделяющая Ω на два открытых множества Ω^+ и Ω^-. Эту поверхность мы будем записывать в виде

$$\Gamma = \{z \in \Omega : \rho(z) = 0\},$$

где ρ есть гладкая (класса C^1) вещественнозначная в Ω функция, такая, что $d\rho\neq 0$ на Γ. Тогда $\Omega^+ = \{z \in \Omega : \rho(z) > 0\}$, а $\Omega^+ = \{z \in \Omega : \rho(z) > 0\}$. Ориентация Γ будет согласована с Ω^+. Так что, $\Omega^+\cup\Gamma$ есть гладкое многообразие с краем.

Как обычно, функция $f \in L^1_{loc}(\Gamma)$ является CR-функцией на Γ, если

$$\int_\Gamma f\, \bar\partial\mu = 0$$

для всех дифференциальных форм m бистепени (n,n-2) с коэффициентами класса $C^\infty(\Omega)$ и с компактными носителями в Ω.

На языке потоков де Рама предыдущее условие означает, что поток $f[\Gamma]^{0,1}$ является $\bar\partial$-замкнутым ($\bar\partial(f[\Gamma]^{0,1}) = 0$ в Ω).

Теорема 1 (Андреотти, Хилл, Чирка). *Для каждой CR-функции $f \in L^1_{loc}(\Gamma)$ существует обобщенная функция h на Ω, голоморфная в $\Omega\setminus\Gamma$ и такая, что $\bar\partial h = f[\Gamma]^{0,1}$. Кроме того, обозначив значения h в $\Omega^\pm$ через $h^\pm$, имеем, что*

$$f = h^+ - h^-.$$

Это равенство понимается в следующем смысле:

1) если $\Gamma \in C^{k+1}$, где k - целое неотрицательное число, и $f \in C^{k,\lambda}_{loc}(\Gamma), 0 < \lambda < 1$, то $h^\pm \in C^{k,\lambda}_{loc}(\Gamma\cup\Omega^\pm)$ и вышеприведенное равенство выполняется в каждой точке Γ;

2) если $\Gamma \in C^1$ и $f \in L^p_{loc}(\Gamma), p \geq 1$, тогда для каждой точки $z^0 \in \Gamma$ найдется окрестность U такая, что

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \int_{\Gamma\cap U} |(h^+(\zeta + \varepsilon\nu(\zeta)) - h^-(\zeta - \varepsilon\nu(\zeta))) - f(\zeta)|^p \, d\Lambda_{2n-1}(\zeta) = 0,$$

где Λ_{2n-1} - (2n-1)-мерная мера Лебега на Γ, а $\nu(\xi)$ - единичный нормальный вектор к Γ в точке ξ, направленный в сторону с Ω^+. Кроме того, равенство $f=h^+-h^-$ выполняется поточечно в точках Лебега функции f для нормальных граничных значений функций $h^\pm$.

Пространство $C^{k,\lambda}_{loc}(\Gamma)$ состоит из функций класса C^k, все производные которых порядка k (в локальных координатах) удовлетворяют локально условию Гельдера порядка λ.

Граничное поведение функций $h^{\pm}$ полностью определяется граничным поведением локального интеграла Бохнера-Мартинелли от функции *f* (см. [9, 23]).

Если функция $f \in L^1_{loc}(\Gamma)$ является CR-функцией на $\Gamma \backslash F$, где F - некоторое замкнутое множество, то теорема об аналитическом представлении, вообще говоря, становится несправедливой (см. примеры 1 и 2 далее). Основным препятствием здесь служит то обстоятельство, что группа когомологий $H^1(\Omega \backslash F, O)=0$ может стать нетривиальной. Если Γ есть граница ограниченной области D, то задача об аналитическом представлении превращается в задачу о голоморфном продолжении CR-функции *f* с $\Gamma \backslash F$ в область D. Данная проблема достаточно хорошо изучена, начиная с работы G.Lupacciolu [12] (см. обзоры [19, 25]).

Вопрос о выполнимости теоремы об аналитическом представлении изучен гораздо хуже. Случай, когда F - голоморфно выпуклый компакт в Ω и размерность n>2, рассмотрен в [8]. В этой статье показано, что $H^1(\Omega \backslash F, O)=0$ и, следовательно, теорема об аналитическом представлении справедлива. Это позволяет описать некоторые классы множеств, устранимых для CR-функций.

Устранимые особенности интегрируемых CR-функций на гладких CR-многообразиях Γ изучались в [2, 7, 10, 14].

Цель работы - получение условий на интегрируемую CR-функцию *f*, при которых для *f* остается справедливой теорема об аналитическом представлении в случае достаточно произвольных замкнутых множеств F. При этом само многообразие Γ может также иметь особенности из множества F.

Случай, когда многообразие Γ имеет одну особую точку определенного вида, рассмотрен в [11].

Начнем с двух примеров.

Пример 1 (см. [22]). Пусть Ω есть единичный бикруг, так что

$$\Omega = \{z = (z_1, z_2) \in C^2 : |z_1| < 1, |z_2| < 1\}.$$

Гиперповерхность $\Gamma = \{z \in \Omega : \operatorname{Im} z_2 = 0\}$ и $F = \{z \in \Omega : z_1 = \operatorname{Im} z_2 = 0\}$. Положим $\Omega^+ = \{z \in \Omega : \operatorname{Im} z_2 > 0\}$, а $\Omega^- = \{z \in \Omega : \operatorname{Im} z_2 < 0\}$. Рассмотрим функцию $f = \frac{1}{z_1}$. Нетрудно проверить, что $f \in L^1(\Gamma)$ и *f* есть гладкая CR-функция на $\Gamma \backslash F$.

Если для *f* справедлива теорема 1, то $f=h^+-h^-$ на $\Gamma \backslash F$, где $h^{\pm}$ - граничные значения голоморфных в $\Omega^{\pm}$ функций.

Тогда

$$\lim_{t\to 0} \int_{|z_1|=1/2} h^{\pm}(z_1, \pm t)\, dz_1 = 0$$

по теореме Коши (функции $h^{\pm}(z_1, \pm t)$ голоморфны по z_1 в единичном круге при фиксированном $t \neq 0$), а

$$\int_{|z_1|=1/2} \frac{1}{z_1}\, dz_1 = 2\pi i,$$

что противоречит предположению о выполнимости теоремы 1.

Этот пример показывает, что даже в простых ситуациях замкнутое множество F не является устранимым для интегрируемых CR-функций.

Пример 2 (см. [8]). Пусть Ω есть единичный бикруг (как в примере 1).

Множество Γ имеет вид

$$\Gamma = \{z \in \Omega : |z_1| = |z_2|\}.$$

Начало координат O является особой точкой для Γ. Действительно, если $\rho(z) = z_1\overline{z_1} - z_2\overline{z_2}$, то $\Gamma = \{z : \rho(z) = 0\}$ и $d\rho(z)=0$ только в точке O.

Рассмотрим открытые множества $\Omega^{\pm} = \{z \in \Omega : \pm\rho(z) > 0\}$ и функцию $f = \frac{1}{z_1 z_2}$. Эта функция является гладкой CR-функцией на $\Gamma \backslash O$. Кроме того, функция $f \in L^1(\Gamma)$.

Действительно, параметризуем Γ в виде

$$\operatorname{Re} z_1 = r\cos\varphi_1, \qquad \operatorname{Im} z_1 = r\sin\varphi_1,$$

$$\operatorname{Re} z_2 = r\cos\varphi_2, \qquad \operatorname{Im} z_2 = r\sin\varphi_2,$$

где $0 < r \le 1,\ \ 0 \le \varphi_1, \varphi_2 \le 2\pi$. Тогда матрица Грама G для Г примет вид

$$G = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 \end{pmatrix},$$

поэтому
$$d\Lambda_3 = \sqrt{\det G}\, dr d\varphi_1 d\varphi_2 = \sqrt{2} r^2 dr d\varphi_1 d\varphi_2.$$

Следовательно,
$$\int_\Gamma | f | d\Lambda_3 = \int_\Gamma \frac{1}{| z_1 z_2 |} d\Lambda_3 = \sqrt{2}(2\pi)^2.$$

Пусть для функции f выполнена теорема 1, тогда $f=h^+-h^-$ на $\Gamma\backslash O$. По одномерной теореме Коши

$$\int_{\substack{|z_1|=1/2\\ |z_2|=1/2}} h^{\pm}(z) dz_1 \wedge dz_2 = 0,$$

а
$$\int_{\substack{|z_1|=1/2\\ |z_2|=1/2}} \frac{1}{z_1 z_2} dz_1 \wedge dz_2 = (2\pi i)^2 \ne 0.$$

Что противоречит предположению.

Последний пример показывает, что если гиперповерхность Г имеет особые точки, то даже отдельные точки могут быть не устранимыми для интегрируемых CR-функций. Все остальные точки Г в примере 2 являются устранимыми для интегрируемых CR-функций, так как они лежат на комплексных многообразиях, на которые расслаивается $\Gamma\backslash O$ (см. [10. Prop. 1]). Вообще, как правило, отдельные точки на гладкой гиперповерхности являются устранимыми для интегрируемых CR-функций (см. [7]). Таким образом, наличие особых точек у гиперповерхности Г приводит к новым эффектам.

2. Теорема об аналитическом представлении

В дальнейшем будем рассматривать следующую ситуацию. Область Ω в $C^n (n>1)$ такова, что $H^1(\Omega, O)=0$. Замкнутое множество $\Gamma\subset\Omega$ делит Ω на два открытых множества Ω^+ и Ω^- и имеет вид $\Gamma=M\cup F$, где F замкнуто в Ω и $\Lambda_{2n-1}(F)=0$, а M - гладкое (класса C^{2n-1}) ориентируемое относительно замкнутое многообразие в $\Omega\backslash F$. Будем предполагать, что

$$M = \{z \in \Omega \setminus F : \rho(z) = 0\},$$

где ρ вещественнозначная функция класса C^{2n-1} в $\Omega\backslash F$, $d\rho\ne0$ на M, а множества $\Omega^{\pm} = \{z \in \Omega \setminus F : \pm\rho(z) > 0\}$.

Определим класс функций $L^1_{loc}(\Gamma)$ следующим образом: $f \in L^1_{loc}(\Gamma)$, если $f \in L^1_{loc}(M)$, и для любого компакта $K\subset\Omega$

$$\sup_{\varepsilon>0} \int_{M\cap K\setminus\{z: d(z,F)<\varepsilon\}} | f | d\Lambda_{2n-1} < +\infty,$$

где $d(z,F)$ - расстояние от точки z до множества F.

Если само Г является гладким многообразием, то данное пространство совпадает с обычным пространством $L^1_{loc}(\Gamma)$, поскольку $\Lambda_{2n-1}(F)=0$.

Если Г имеет локально конечную $(2n-1)$-мерную меру Лебега ($\Lambda_{2n-1}(\Gamma\cap K)<+\infty$ для любого компакта $K\subset\Omega$), то ограниченные функции f (т.е. $f \in L^\infty(\Gamma)$) принадлежат $L^1_{loc}(\Gamma)$.

Каждая функция $f \in L^1_{loc}(\Gamma)$ определяет поток $f[\Gamma]$ степени 1 в Ω следующим образом

$$f[\Gamma](\alpha) = \lim_{\varepsilon\to 0} \int_{M\setminus\{z:d(z,F)<\varepsilon\}} f\alpha,$$

где α дифференциальная форма типа ($2n$-1) с коэффициентами класса $C^\infty(\Omega)$ и с компактным носителем в Ω.

Рассмотрим вещественнозначную неотрицательную функцию φ класса $C^\infty(\Omega)$ такую, что $F = \{z \in \Omega : \varphi(z) = 0\}$. Такая функция существует (см., например, [15. Лемма 1.4.13]). Пусть

$$M_\varepsilon = \{z \in M : \varphi(z) > \varepsilon\}, \varepsilon > 0.$$

По теореме Сарда (см., например, [15. Теорема 1.4.6]) M_ε есть гладкое многообразие с гладким краем ∂M_ε почти для всех $\varepsilon>0$ (мы можем применить теорему Сарда для сужения функции φ на M).

Пусть K - произвольный компакт в Ω, тогда множество критических точек функции φ на $M\cap K$ компактно и, следовательно, образ этого множества при отображении φ также компактен. Поэтому множество положительных ε, для которых $\partial M_\varepsilon \cap K$ есть гладкое многообразие, открыто.

Если $f \in L^1_{loc}(M)$, то почти для всех $\varepsilon>0$ эта функция $f \in L^1_{loc}(\partial M_\varepsilon)$. Действительно, если $\varepsilon \in [a,b]$ где $0<a\le b$, и множество M_ε есть гладкое многообразие с гладким краем ∂M_ε, тогда для множества $M_{a,b} = \{z \in M : a \le \varphi(z) \le b\}$ по теореме Фубини (см., например, [24. С. 248])

$$\int_{M_{a,b}\cap K} |f|\, d\Lambda_{2n-1} = \int_a^b d\varepsilon \int_{\partial M_\varepsilon \cap K} |f| \psi d\Lambda_{2n-2},$$

где Λ_{2n-2} есть ($2n$-2)-мерная мера Лебега на ∂M_ε, а $\psi = |d\Lambda_{2n-1}/d\varepsilon|$. Так как $\psi\neq 0$ на $\partial M_\varepsilon \cap K$, то

$$\int_{\partial M_\varepsilon \cap K} |f|\, d\Lambda_{2n-2} < +\infty$$

почти для всех $\varepsilon \in [a,b]$.

Определим для данной функции $f \in L^1_{loc}(\Gamma)$ и данного компакта $K\subset\Gamma$ выражение

$$S_f(K,\varepsilon) = \int_{\partial M_\varepsilon \cap K} |f|\, d\Lambda_{2n-2}.$$

Теорема 2. *Пусть функция* $f \in L^1_{loc}(\Gamma)$, *есть CR-функция на M и удовлетворяет условию*

$$S_f(K,\varepsilon) = o(1) \;\; \text{ппри} \;\; \to 0$$

для любых компактов $K\subset\Omega$. Тогда теорема 1 выполняется для функции f. Это означает, что справедливо равенство

$$f = h^\pm - h^-,$$

где функции $h^\pm \in O(\Omega^\pm)$, *а граничное поведение функций $h^\pm$ вблизи точек гладкости* Γ *(т.е. вблизи M) такое же, как в теореме 1.*

Доказательство. Мы уже отмечали, что функция $f \in L^1_{loc}(\Gamma)$ определяет поток $f[\Gamma]$ степени 1 в Ω. Покажем, что

$$\partial f[\Gamma]^{0,1} = 0 \text{ в } \Omega.$$

Лемма 1. *Если функция* $f \in L^1_{loc}(M)$ *является CR-функцией на M, то почти для всех $\varepsilon>0$ справедливо равенство*

$$\int_{M_\varepsilon} f \bar{\partial}\mu = \int_{\partial M_\varepsilon} f\mu$$

для всех внешних дифференциальных форм μ типа (n,n-2) с коэффициентами класса $C^\infty(\Omega)$ и с компактным носителем в Ω.

Доказательство. Пусть $z\in M$. Рассмотрим замкнутый шар $B(z,r)$ с центром в точке z и радиусом r, не пересекающийся с F, в котором CR-функция f приближается голоморфными полиномами в метрике L^1, т.е. существует последовательность голоморфных полиномов P_k, для которой

$$\int\limits_{M\cap B(z,r)} | f - P_k \,|\, d\Lambda_{2n-1} \to 0 \ \text{ при } \ k\to\infty.$$

Существование такой последовательности полиномов есть, в общем, следствие теоремы Бауенди и Трева [4] о приближении. Для случая гиперповерхностей см. также [22, 9. Следствие 6.6].

Предположим, что $z\in M_{a,b}$, $\sup p\mu\subset B(z,r)$ и $B(z,r)\cap M\subset M_{a,b}$. По теореме Фубини

$$\int\limits_{M_{a,b}\cap B(z,r)} | f - P_k \,|\, d\Lambda_{2n-1} = \int\limits_a^b d\varepsilon \int\limits_{\partial M_\varepsilon \cap B(z,r)} | f - P_k \,|\, \psi d\Lambda_{2n-2} \to 0$$

при $k\to\infty$. Поэтому существует подпоследовательность k_s, для которой

$$\int\limits_{\partial M_\varepsilon \cap B(z,r)} | f - P_{k_s} \,|\, \psi d\Lambda_{2n-2} \to 0 \ \text{ при } \ s\to\infty$$

почти для всех $\varepsilon\in[a,b]$.

Следовательно, $$\lim_{s\to\infty} \int\limits_{\partial M_\varepsilon \cap B(z,r)} | f - P_{k_s} \,|\, d\Lambda_{2n-2} \to 0.$$

По формуле Стокса $$\int\limits_{M_\varepsilon} P_{k_s} \bar\partial\mu = \int\limits_{\partial M_\varepsilon} P_{k_s}\mu.$$

Переходя к пределу при $s\to\infty$, мы получим заключение леммы для множества $M_\varepsilon\cap B(z,r)$. Представляя любую форму m в виде суммы конечного числа форм с носителями в достаточно малых шарах $B(z,r)$, получаем утверждение леммы в общем случае.

Доказательство леммы 1 по сути дела повторяет доказательство леммы 8.2 из [9]. Продолжим доказательство теоремы 2. По лемме 1

$$\bar\partial f[\Gamma]^{0,1}(\mu) = f[\Gamma]^{0,1}(\bar\partial\mu) = \lim_{\varepsilon\to+0}\int\limits_{M_\varepsilon} f\bar\partial\mu = \lim_{\varepsilon\to+0}\int\limits_{\partial M_\varepsilon} f\mu.$$

Поскольку $$\left|\int\limits_{\partial M_\varepsilon} f\mu\right| \le c \int\limits_{\partial M_\varepsilon\cap K} | f \,|\, d\Lambda_{2n-2} = cS_f(K,\varepsilon) \to 0,$$

где $K=\sup p\mu$, то равенство $\bar\partial f[\Gamma]^{0,1}=0$ выполняется для потока $f[\Gamma]^{0,1}$.

Если Г- гладкое многообразие, то последнее равенство означает, что f является CR-функцией на Г, и тем самым особенность f является устранимой для интегрируемых CR-функций, удовлетворяющих условию теоремы.

В случае, когда F является особым множеством для Г, равенство $\bar\partial f[\Gamma]^{0,1}=0$ можно принять за *определение* CR-функции на многообразии с особенностями.

Покажем, что для функции f, удовлетворяющей данному равенству, справедлива теорема об аналитическом представлении. Доказательство, в основном, повторяет доказательство этой теоремы, данное в [23, 9. § 23]. Пусть

$$M = \sum_{k=1}^n M_k \frac{\partial}{\partial \bar z_k}$$

- векторное поле, коэффициенты которого M_k являются распределениями в C^n, и

$$\sum_{k=1}^n \frac{\partial M_k}{\partial \bar z_k} = \delta,$$

где δ есть δ-функция Дирака в точке 0, а поток $T \in E'^{p,q}(C^n)$ есть поток с компактным носителем вида

$$T = \sum_I \sum_J T_{I,J} dz_I \wedge d\bar{z}_J,$$

где $I=(i_1,\ldots,i_p)$ и $J=(j_1,\ldots,j_q)$ - возрастающие мультииндексы длины p и q, соответственно;

$$dz_I = dz_{i_1} \wedge \ldots \wedge dz_{i_p}, \quad dz_J = dz_{j_1} \wedge \ldots \wedge dz_{j_q},$$

а $T_{I,J}$ - распределения с компактным носителем в C^n.

В соответствии с [6] введем операцию *свертки-сокращения*

$$M \Diamond T = \sum_I \sum_J \sum_{j \in J} (M * T_{I,J}) \sigma_{I,J}(j) dz_I \wedge d\bar{z}_{J \setminus j},$$

где * - обычная свертка распределений, $J \setminus j$ есть мультииндекс длины q-1, получающийся из J удалением j, знак $\sigma_{I,J}(j)$ определяется из равенства

$$d\bar{z}_j \wedge dz_I \wedge d\bar{z}_{J \setminus j} = \sigma_{I,J}(j) dz_I \wedge d\bar{z}_J.$$

Если q=0, то по определению $M \Diamond T$=0, в противном случае $M \Diamond T \in D'^{p,q-1}(C^n)$. Справедлива формула $\bar{\partial}$-гомотопии (см. [6]):

$$T = \bar{\partial}(M \Diamond T) + M \Diamond \bar{\partial} T.$$

В качестве векторного поля M мы возьмем поле Бохнера-Мартинелли

$$M = \frac{(n-1)!}{2\pi^n} \sum_{k=1}^n \frac{\bar{\zeta}_k}{|\zeta|^{2n}} \frac{\partial}{\partial \bar{\zeta}_k},$$

тогда коэффициенты этого поля являются локально интегрируемыми функциями в C^n и

$$M \Diamond (\delta_z) d\Lambda_{2n} = U(\zeta, z),$$

где δ_z есть δ-функция в точке z (см., например, [9. § 6]). Форма $U(\xi,z)$ представляет собой ядро Бохнера-Мартинелли:

$$U(\zeta, z) = \frac{(n-1)!}{(2\pi i)^n} \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \frac{\bar{\zeta}_k - \bar{z}_k}{|\zeta - z|^{2n}} d\bar{\zeta}[k] \wedge d\zeta,$$

а $d\zeta = d\zeta_1 \wedge \ldots \wedge d\zeta_n$ и $d\bar{\zeta}[k]$ получается из $d\bar{\zeta}$ выбрасыванием дифференциала $d\bar{\zeta}_k$.

Кроме того, коэффициенты $M \Diamond T$ гармоничны вне носителя T.

Так как $H^{0,1}(\Omega, O) = 0$ и $\bar{\partial} f[\Gamma]^{0,1} = 0$, то по теореме Дольбо $f[\Gamma]^{0,1} = -\bar{\partial} h$, где h - распределение в Ω. Поскольку носитель потока $f[\Gamma]^{0,1}$ лежит в Γ, то по лемме Гротендика h голоморфна в $\Omega \setminus \Gamma$.

Пусть $a \in \Gamma$. Рассмотрим поликруг U с центром в точке a, достаточно малого радиуса и содержащийся в Ω, и поликруг U' с центром в точке а, компактно лежащий в U. Пусть ψ будет функция класса $C^\infty(U)$ с компактным носителем в U, равная 1 в окрестности замыкания U'. Тогда поток

$$T = \psi f[\Gamma]^{0,1}$$

принадлежит $E'^{0,1}(C^n)$ и $\bar{\partial} T = 0$ в U'. По формуле $\bar{\partial}$-гомотопии с полем Бохнера-Мартинелли M имеем

$$T = \bar{\partial}(M \Diamond T) + M \Diamond \bar{\partial} T.$$

Так как $\bar{\partial} T = \bar{\partial}(M \Diamond \bar{\partial} T) = 0$ в U' и вдобавок $M \Diamond \bar{\partial} T$ имеет гармонические коэффициенты в U', то по обычной лемме Гротендика

$$M \Diamond \bar{\partial} T = \bar{\partial} \varphi,$$

где φ есть функция класса C^∞ в U'. Тогда

$$T = \bar{\partial}(M\lozenge T + \varphi) \text{ в } U'$$

Функция φ не имеет скачка на Г. Так как $\bar{\partial}h = f[\Gamma]^{0,1} = T$ в U', то разность

$$h - (M\lozenge T + \varphi)$$

голоморфна в U' по лемме Гротендика. Следовательно, скачок (т.е. разность граничных значений h^+-h^-) на Г полностью определяется поведением функции $M\lozenge T$.

Как показано в [9. § 6]

$$M\lozenge T = \int_{\Gamma\cap U} \psi(\zeta) f(\zeta) U(\zeta, z), \quad \zeta \notin \Gamma.$$

Отсюда и из теорем о скачке интеграла Бохнера-Мартинелли (см., например, [9. Гл. 1]) следует доказательство теоремы.

Примеры 1 и 2 показывают, что условие теоремы 2 не может быть, вообще говоря, улучшено. В примере 2 $\partial\Gamma_\varepsilon = \{z \in \Gamma : |z_1| = |z_2| = \varepsilon\}$, поэтому для функции $f = \dfrac{1}{z_1 z_2}$

$$S_f(\varepsilon) = \sqrt{2}\varepsilon^2 \int_{\partial\Gamma_\varepsilon} \frac{1}{\varepsilon^2} d\varphi_1 d\varphi_2 = \sqrt{2}(2\pi)^2.$$

Аналогичные вычисления справедливы для функции из примера 1.

Следствие 1. *Пусть* Г *имеет локально конечную (2n-1)-мерную меру Лебега и* $\Lambda_{2n-2}(F)=0$. *Если функция* $f \in L^\infty_{loc}(\Gamma)$ *и является CR-функцией на M, то для f справедлива теорема 2.*

Доказательство. Для любого компакта $K \subset \Omega$ справедлива оценка

$$|\varphi(z)| = |\varphi(z) - \varphi(\zeta)| \le C|z - \zeta| \le Cd(z, F), z \in K, \zeta \in F.$$

Так как $\Lambda_{2n-2}(F)=0$, то для любого $\varepsilon>0$ существует покрытие $F\cap K$ шарами радиусов, не превосходящих некоторого $\delta>0$, такое, что сумма площадей поверхностей этих шаров меньше ε. Отсюда получаем, что $S_f(K, C\delta) \to 0$, при $\varepsilon\to 0$.

Для множеств F определенного вида теорема 2 может быть усилена. Пусть существует голоморфная в Ω функция g, для которой F есть множество нулей, т.е. $F = \{z \in \Omega : g(z) = 0\}$. Так как метрическая размерность аналитического множества не превосходит $2n$-2 (см., например, [24. С. 25]), то $\Lambda_{2n-1}(F)=0$.

Лемма 2. *Пусть функция* $f \in L^1_{loc}(M)$ *является CR-функцией на M, и существует такое число* $k\ge 0$, *что функция* $f(z)d^k(z, F) \in L^1_{loc}(\Gamma)$, *тогда существует такое число* $k_0\ge 0$, *для которого функция* $fg^{k_0} \in L^1_{loc}(\Gamma)$ *и* $\bar{\partial}(fg^{k_0}[\Gamma]^{0,1}) = 0$ *в* Ω *(т.е.* fg^{k_0} *есть CR-функция на* Г*).*

Доказательство. Пусть

$$F_\varepsilon = \{z \in \Omega : d(z, F) \le \varepsilon\}.$$

Тогда для любого компакта $K \subset \Omega$

$$|g(z)| = |g(z) - g(\zeta)| \le C(K)d(z, F) \le C(K)\varepsilon,$$

если $z\in K\cap F_\varepsilon$, а $\xi\in F\cap K$.

Поэтому для некоторого натурального числа $k_0>k+1$ функция $fg^{k_0} \in L^1_{loc}(\Gamma)$.

Пусть μ есть дифференциальная форма типа $(n,n$-2) с коэффициентами класса $C^\infty(\Omega)$ и с носителем, лежащим в K. Тогда

$$\bar{\partial}(fg^{k_0}[\Gamma]^{0,1}(\mu)) = \int_\Gamma fg^{k_0}\bar{\partial}\mu = \int_\Gamma fg^{k_0}\bar{\partial}[(1-\psi_\varepsilon)\mu] + \int_\Gamma fg^{k_0}\bar{\partial}(\psi_\varepsilon\mu),$$

где ψ_ε - функция класса $C^\infty(\Omega)$, равная 1 на $F_{\varepsilon/3}\cap K$ и равная нулю вне $F_{2\varepsilon/3}\cap K$ (мы можем взять в качестве ψ_ε свертку характеристической функции множества $F_{\varepsilon/3}\cap K$ со стандартным ядром). Тогда

$$\left|\frac{\partial}{\partial z_j}\psi_\varepsilon\right| \le \frac{C_1}{\varepsilon},\ j=1,...,n$$

(см., например, [5. § 4.5]). Поэтому

$$\left|\int_\Gamma fg^{k_0}\,\bar\partial(\psi_\varepsilon\mu)\right| \le C_2\varepsilon^{k_0-k-1}\int_{\Gamma\cap K}|\,fd^k(z,F)\,|\,d\Lambda_{2n-1}\to 0$$

при $\varepsilon\to+0$, а интеграл

$$\int_\Gamma fg^{k_0}\,\bar\partial[(1-\psi_\varepsilon)\mu]=\int_\Gamma f\,\bar\partial[g^{k_0}(1-\psi_\varepsilon)\mu]=0,$$

поскольку носитель формы $g^{k_0}(1-\psi_\varepsilon)\mu$ лежит в $\Omega\backslash F$.

Теорема 3. *Пусть F есть множество нулей голоморфной в* Ω *функции g. Предположим, что функция* $f\in L^1_{loc}(M)$ *является CR-функцией на M и существует такое число k≥0, что функция* $f(z)d^k(z,F)\in L^1_{loc}(\Gamma)$*, тогда для функции f справедлива теорема 2 об аналитическом представлении.*

Доказательство. Из леммы 2 и из доказательства второй части теоремы 2 мы получаем, что для функции fg^{k_0} справедлива теорема об аналитическом представлении, т.е. найдутся функции $h^\pm\in O(\Omega^\pm)$, для которых в точках гладкости Γ (т.е. на *M*) справедливо равенство $fg^{k_0}=h^+-h^-$. Тогда для функции *f* справедливо равенство

$$f=\frac{h^+}{g^{k_0}}-\frac{h^-}{g^{k_0}}\quad \text{на } M$$

с теми же свойствами вблизи *M*, что и в теореме 1.

Если Γ и *F* - гладкие многообразия, а функция $f\in L^1_{loc}(\Gamma)$, то теорема 3 превращается в предложение 1 из [10] для гиперповерхностей.

Пример 2 не противоречит теореме 3. Действительно, точка *O* лежит на множестве $F=\{z\in\Omega: z_1=z_2\}$. На множестве Γ*F* имеем, что

$$\frac{1}{z_1z_2}=h^+-h^-,$$

где $h^+=\frac{1}{z_1-z_2}\cdot\frac{1}{z_1}$, а $h^-=\frac{1}{z_2-z_1}\cdot\frac{1}{z_2}$. Таким образом, почти всюду на Γ*O* справедливо равенство $\frac{1}{z_1z_2}=h^+-h^-$, но это равенство не выполняется на Γ*O* в смысле теории обобщенных функций.

Следствие 2. *Пусть в условиях теоремы 3 множество* Γ *является многообразием в* Ω *класса* C^∞*, тогда CR-функция f продолжается на* Γ *до некоторого CR-распределения* $\hat g$*, тем самым F является устранимым множеством для CR-функций конечного порядка роста вблизи F.*

Доказательство. Рассмотрим функции $H^\pm=\frac{h^\pm}{g^{k_0}}$, голоморфные в $\Omega^\pm$. Используя неравенство Лоясевича (см., например, [13. Гл. 4]), получим, что для любого компакта $K\subset\Omega$ найдутся константы $C>0$, $\alpha>0$, для которых

$$|\,g(z)\,|\ge Cd^\alpha(z,F)\ge Cd^\alpha(z,\Gamma),\ z\in K.$$

тогда для некоторых констант $C_1>0$ и $\gamma>0$

$$|\,H^\pm(z)\,|\le\frac{C_1}{d^\gamma(z,\Gamma)},\ z\in K\cap\Omega^\pm,$$

поскольку интеграл Бохнера-Мартинелли от функции f имеет такого же типа оценку вблизи Г.

Поэтому граничные значения функций $H^{\pm}$ определяют некоторые CR-распределения $f'^{\pm}$ на Г (см., например, [20]). Остается положить $\hat{g} = f'^{+} - f'^{-}$.

Если Г - граница ограниченной области, то утверждение такого типа было доказано в [7].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Айзенберг Л.А., Южаков А.П. Интегральные представления и вычеты в многомерном комплексном анализе. Новосибирск: Наука, 1979.
2. Anderson J.T., Cima J.A. Removable singularities for CR functions// Michigan Math. J. 1994. V. 41. P. 111-119.
3. Andreotti A., Hill C.D. E.E.Levi convexity and the Hans Lewy problem. I// Ann. Scuola Norm. Super. Pisa. 1972. V. 26, N 2. P. 325-363.
4. Baouendi M.S., Treves F. A property of the functions and distributions annihilaited by a locally integrable system of complex vector fields// Ann. Math. 1981. V. 113. P. 387-421.
5. Бремерман Г. Распределения, комплексные переменные и преобразования Фурье. М.: Мир, 1968.
6. Harvey R., Lawson H.B. On boundaries of complex analytic varieties. I// Ann. Math. 1975. V. 102. P. 223-290.
7. Кытманов А.М. Об устранении особенностей интегрируемых CR-функций// Матем. сб. 1988. Т. 136, N 2. С. 178-186.
8. Кытманов А.М. Голоморфное продолжение CR-функций с особенностями на гиперповерхности// Изв. АН СССР. Сер. матем. 1990. Т. 54, N 6. С. 1320-1330.
9. Кытманов А.М. Интеграл Бохнера-Мартинелли и его применения. Новосибирск: Наука, 1992.
10. Kytmanov A.M., Rea C. Elimination of singularities of Holder peak sets for CR functions// Ann. Scuola Norm. Super. Pisa 1995. V. 22, N 2. P. 211-226.
11. Kytmanov A.M., Myslivets S.G., Tarkhanov N.N. Analytic representation of CR functions on hypersurfaces with singularities// Preprint 99/29, Institut fur Mathematik, Universitat Potsdam. 1999. 18 pp.
12. Lupacciolu G. A theorem on holomorphic extension of CR functions// Pacific J. Math. 1987. V. 124, N 1. P. 177-191.
13. Мальгранж Б. Идеалы дифференцируемых функций. М.: Мир, 1968.
14. Merker J., Porten E. Enveloppe d'holomorphie locale des varietes CR et elimination des singularities pour les functions CR integrables// C.R. Acad. Sci. Paris, Ser. 1. 1999. T. 328. P. 853-858.
15. Нарасимхан Р. Анализ на действительных и комплексных многообразиях. М.: Мир, 1971.
16. Rabinovich V.S., Schulze B.-W., Tarkhanov N.N. A calculus of boundary value problems in domains with non-Lipschitz singular points// Preprint 9, Univ. Potsdam, 1997. 57 pp.
17. Schulze B.-W. Pseudo-differential boundary problems, conical singularities, and asymptotics. Akademie Verlag, Berlin, 1994.
18. Schulze B.-W. Boundary value problems and singular pseudo-differential operators. J.Wiley, Chichester, 1998.
19. Stout E.L. Removable singularities for the boundary values of holomorphic functions// Proc. of the Mittag-Leffler Institute, 1987-1988. Princeton Univ. Press, Princeton, NJ, 1993. P. 600-629.
20. Straube E.J. Harmonic and analytic functions admitting a distrubution boundary value// Ann. Scuola Norm. Super. Pisa 1984. V. 11, N 4. P. 559-591.
21. Хенкин Г.М. Метод интегральных представлений в комплексном анализе// Итоги науки и техники. Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. М.: ВИНИТИ. 1985. Т. 7. С. 23-124.
22. Чирка Е.М. Аналитическое представление CR-функций// Матем. сб. 1975. Т. 98, N 4. С. 591-623.
23. Чирка Е.М. Потоки и некоторые их применения// Добавление к книге Харви Р. Голоморфные цепи и их границы. М.: Мир, 1979. С. 122-155.
24. Чирка Е.М. Комплексные аналитические множества. М.: Наука, 1985.
25. Chirka E.M., Stout E.L. Removable singularities in the boundary// Aspects of Mathematics. 1994. V. E26. P. 43-104.