УДК 517.55

О ФУНКЦИЯХ КЛАССА $\mathcal{L}^p$ СО СВОЙСТВОМ ОДНОМЕРНОГО ГОЛОМОРФНОГО ПРОДОЛЖЕНИЯ

Б.П.Отемуратов*

В работе показано, что функции класса $\mathcal{L}^p(\partial D)$, обладающие одномерным свойством голоморфного продолжения вдоль почти всех комплексных прямых, являются нормальными граничными значениями функций из $\mathcal{H}^p(D)$.

Эта статья содержит некоторые результаты, связанные с голоморфным продолжением интегрируемых функций, заданных на границе ограниченной области $D \subset \mathbb{C}^n$, $n > 1$, в эту область. Речь пойдет об интегрируемых функциях с одномерным свойством голоморфного продолжения вдоль семейств комплексных прямых.

На комплексной плоскости $\mathbb{C}$ результаты о функциях с одномерным свойством голоморфного продолжения тривиальны, поэтому результаты работы существенно многомерны.

Первый результат, относящийся к нашей теме, был получен в [1] М.Л.Аграновским и Р.Е.Вальским, изучившими функции с одномерным свойством голоморфного продолжения в шаре. Доказательство основывалось на свойствах группы автоморфизмов шара.

Е.Л.Стаутом в [8], использовавшим комплексное преобразование Радона, теорема Аграновского и Вальского была перенесена на произвольные ограниченные области с гладкой границей. Альтернативное доказательство теоремы Стаута получено А.М.Кытмановым в [2, 3], применившим интеграл Бохнера–Мартинелли. Идея использования интегральных представлений (Бохнера–Мартинелли, Коши–Фантаппье, логарифмического вычета) оказалась полезной при изучении функций с одномерным свойством голоморфного продолжения вдоль комплексных прямых и кривых [4, 5]. Обзор результатов, относящихся к данной теме, можно найти в [6].

Пусть D — ограниченная область в $\mathbb{C}^n$ $(n > 1)$ со связной гладкой границей ∂D (класса $\mathcal{C}^2$). Предположим, что область D задается с помощью определяющей вещественно значной функции $\rho \in \mathcal{C}^2(\mathbb{C}^n)$ следующим образом:

$$D = \{z : \rho(z) < 0\}, \quad \text{grad } \rho(z) \neq 0 \quad \text{для} \quad z \in \partial D.$$

Напомним определение класса функций $\mathcal{H}^p(D)$.

Голоморфная функция $f \in \mathcal{H}^p(D)$ $(p > 0)$, если

$$\sup_{\varepsilon>0} \int\limits_{\partial D} |f(\zeta - \varepsilon\nu(\zeta))|^p d\sigma < +\infty,$$

где $d\sigma$ — элемент поверхности ∂D, а $\nu(\zeta)$ — единичный вектор внешней нормали к поверхности ∂D в точке ζ. Хорошо известно, что нормальные граничные значения функции $f \in \mathcal{H}^p(D)$ принадлежат классу $\mathcal{L}^p(\partial D)$ (по мере $d\sigma$).

Рассмотрим одномерные комплексные прямые l вида

$$l = \{\zeta : \ \zeta_j = z_j + b_j t, \ j = 1, \ldots, n, \ t \in \mathbb{C}\}, \tag{1}$$

проходящие через точку $z \in \mathbb{C}^n$ в направлении вектора $b \in \mathbb{CP}^{n-1}$ (направление b определяется с точностью до умножения на комплексное число $\lambda \neq 0$).

По теореме Сарда для почти всех $z \in \mathbb{C}^n$ и почти всех $b \in \mathbb{CP}^{n-1}$ пересечение $l \cap \partial D$ представляет собой набор конечного числа гладких кривых (за исключением вырожденного случая, когда $\partial D \cap l = \varnothing$).

Лемма 1. *Если $f \in \mathcal{L}^p(\partial D)$, то для почти всех $z \in D$ и почти всех $b \in \mathbb{CP}^{n-1}$ функция $f \in \mathcal{L}^p(\partial D) \cap l$.*

Доказательство. Пусть функция $f \in \mathcal{L}^p(\partial D)$, l — одномерная комплексная прямая вида (1), проходящая через точку z. Рассмотрим открытое множество $W \subset \mathbb{CP}^{n-1}$ такое, что $\partial D \cap l$ — гладкие кривые для $b \in W$. Обозначим открытое множество $S = \bigcup\limits_{b\in W} \partial D \cap l$. Тогда по теореме Фубини (см., например, [9])

$$\int\limits_S |f(\zeta)|^p d\sigma(\zeta) = \int\limits_W d\sigma(b) \int\limits_{\partial D\cap l} |f(z+bt)|^p \left|\frac{d\sigma(\zeta)}{d\sigma(b)}\right| dt,$$

где $d\sigma(\zeta)$, $d\sigma(b)$ и dt — меры Лебега, соответственно, на S, W и $\partial D \cap l$, а $\left|\frac{d\sigma(\zeta)}{d\sigma(b)}\right|$ — модуль якобиана, возникающего при переходе к повторному интегралу. Внутренний интеграл сходится для почти всех $b \in W$. А так как

$$0 < c_1 \leqslant \left|\frac{d\sigma(\zeta)}{d\sigma(b)}\right| \leqslant c_2 < \infty,$$

то справедива оценка

$$0 < c_1 \int\limits_{\partial D\cap l} |f|^p dt \leqslant \int\limits_{\partial D\cap l} |f|^p \left|\frac{d\sigma(\zeta)}{d\sigma(b)}\right| dt \leqslant c_2 \int\limits_{\partial D\cap l} |f|^p dt < \infty.$$

Отсюда и следует лемма. □

Дадим следующее определение. Функция $f \in \mathcal{L}^p(\partial D)$ обладает *одномерным свойством голоморфного продолжения вдоль комплексной прямой* l ($l \cap \partial D \neq \varnothing$ и состоит из конечного числа гладких кривых), если существует функция f_l со следующими свойствами:

a) $f_l \in \mathcal{H}^p(D \cap l)$,

b) нормальные граничные значения функции f_l совпадают с f на множестве $\partial D \cap l$.

Основными результатами работы являются следующие утверждения.

Теорема 1. *Пусть функция $f \in \mathcal{L}^p(\partial D)$, $p \geqslant 2$, и обладает свойством одномерного голоморфного продолжения вдоль почти всех комплексных прямых, пересекающих D, тогда f является нормальным граничным значением функции $F \in \mathcal{H}^p(D)$.*

Теорема 2. *Пусть V — открытое множество в D и функция $f \in \mathcal{L}^p(\partial D)$, $p \geqslant 2$, и обладает свойством одномерного голоморфного продолжения вдоль почти всех комплексных прямых, пересекающих V, тогда f является нормальным граничным значением функции $F \in \mathcal{H}^p(D)$.*

При доказательстве используются свойства интеграла Бохнера-Мартинелли. Ядро интегрального представления Бохнера-Мартинелли имеет вид

$$U(\zeta, z) = \frac{(n-1)!}{(2\pi i)^n} \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \frac{\bar\zeta_k - \bar z_k}{|\zeta - z|^{2n}}\, d\bar\zeta[k] \wedge d\zeta,$$

где $d\zeta = d\zeta_1 \wedge \ldots \wedge d\zeta_n$, а $d\bar\zeta[k]$ получается вычеркиванием дифференциала $d\bar\zeta_k$ из $d\bar\zeta$.

Для функции $f \in \mathcal{L}^p(\partial D)$ обозначим через

$$F(z) = \int\limits_{\partial D} f(\zeta) U(\zeta, z), \qquad z \notin \partial D.$$

Эта функция является гармонической вне границы области.

Лемма 2. *Если для точки $z \in \mathbb{C}^n \setminus \overline{D}$ и для почти всех $b \in \mathbb{CP}^{n-1}$ функция $f \in \mathcal{L}^p(\partial D)$ обладает одномерным свойством голоморфного продолжения вдоль комплексных прямых вида (1), то $F(z) = 0$.*

Доказательство. Воспользуемся известным представлением ядра Бохнера-Мартинелли в переменных t и b (см., например, [3, гл.3])

$$U(\zeta, z) = \frac{dt}{t} \wedge \lambda(b),$$

где $\lambda(b)$ — некоторая дифференциальная форма типа $(n-1, n-1)$ в $\mathbb{CP}^{n-1}$, не зависящая от t. Тогда по теореме Фубини и по условию леммы

$$F(z) = \int\limits_{\partial D} f(\zeta) U(\zeta, z) = \int\limits_{\mathbb{CP}^{n-1}} \lambda(b) \int\limits_{\partial D\cap l} f(z+bt) \frac{dt}{t} = 0. \quad \square$$

Тем самым, если функция f обладает одномерным свойством голоморфного продолжения вдоль почти всех комплексных прямых, то интеграл $F(z)$ равен нулю вне замыкания области.

Теорема 3. *Если для функции $f \in \mathcal{L}^p(\partial D)$, $p \geqslant 2$, интеграл $F(z) = 0$ вне замыкания области D, то внутри области $F(z) \in \mathcal{H}^p(D)$ и его нормальные граничные значения совпадают с f на ∂D.*

Данное утверждение обобщает следствие 15.5 из [3] и следствие 1 из [7] и имеет тем самым самостоятельный интерес.

Доказательство. Из условия теоремы и из теоремы о скачке интеграла Бохнера-Мартинелли для функций класса $\mathcal{L}^p(\partial D)$, $p \geqslant 1$, (теорема 3.4 из [3]) получаем, что

$$\lim_{\varepsilon\to+0} \int\limits_{\partial D} |F(\zeta - \varepsilon\nu(\zeta)) - f(\zeta)|^p d\sigma = 0,$$

таким образом, нормальные граничные значения функции F совпадают почти всюду с f на ∂D. Кроме того,

$$\int\limits_{\partial D} |F(\zeta - \varepsilon\nu(\zeta)|^p d\sigma \leqslant \int\limits_{\partial D} |f(\zeta)|^p d\sigma. \tag{2}$$

Так что для доказательства теоремы нужно лишь доказать голоморфность функции $F(z)$ в области D. Введем понятие $\overline{\partial}$-нормальной производной $\overline{\partial}_n$ на ∂D:

$$\overline{\partial}_n F = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial F}{\partial \bar{z}_k} \rho_k,$$

где $\rho_k = \dfrac{\partial \rho}{\partial z_k} / |\operatorname{grad} \rho|$.

Как показано в [3, с. 155],

$$\overline{\partial}_n F = 2^{1-n} i^n \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \frac{\partial F}{\partial \bar{z}_k}\, dz[k] \wedge d\bar{z}\Bigg|_{\partial D}. \tag{3}$$

Для $\overline{\partial}$-нормальной производной справедлива следующая формула скачка (см. [7]): если $f \in \mathcal{L}^p(\partial D)$ и $p \geqslant 1$, то

$$\lim_{\varepsilon\to+0} \int\limits_{\partial D} |\overline{\partial}_n F(\zeta - \varepsilon\nu(\zeta)) - \overline{\partial}_n F(\zeta + \varepsilon\nu(\zeta))|^p d\sigma = 0. \tag{4}$$

Тогда из условия теоремы получаем, что

$$\lim_{\varepsilon\to+0} \int\limits_{\partial D} |\overline{\partial}_n F(\zeta - \varepsilon\nu(\zeta))|^p d\sigma = 0. \tag{5}$$

Рассмотрим интеграл и используем для его оценки неравенство Гельдера

$$\left| \int\limits_{\partial D} F(\zeta - \varepsilon\nu(\zeta)) \cdot \overline{\partial}_n F(\zeta - \varepsilon\nu(\zeta)) d\sigma \right| \leqslant$$

$$\leqslant \int\limits_{\partial D} |F(\zeta - \varepsilon\nu(\zeta))| \cdot \left|\overline{\partial}_n F(\zeta - \varepsilon\nu(\zeta))\right| d\sigma \leqslant$$

$$\leqslant \sqrt[q]{\int\limits_{\partial D} |F(\zeta - \varepsilon\nu(\zeta))|^q \, d\sigma} \cdot \sqrt[p]{\int\limits_{\partial D} \left|\overline{\partial}_n F(\zeta - \varepsilon\nu(\zeta))\right|^p d\sigma}.$$

Второй сомножитель в последней строчке стремится к нулю при $\varepsilon \to +0$ в силу равенства (5).

Поскольку $p \geqslant 2$ и $1/p + 1/q = 1$, то $p \geqslant q$. Поэтому

$$\sqrt[q]{\int\limits_{\partial D} |F(\zeta - \varepsilon\nu(\zeta))|^q \, d\sigma} \leqslant C \sqrt[p]{\int\limits_{\partial D} |F(\zeta - \varepsilon\nu(\zeta))|^p \, d\sigma}.$$

Из последнего неравенства и оценки (2) следует оценка

$$\sqrt[q]{\int\limits_{\partial D} |F(\zeta - \varepsilon\nu(\zeta))|^q \, d\sigma} \leqslant C \sqrt[p]{\int\limits_{\partial D} |f(\zeta)|^p d\sigma}.$$

Таким образом,

$$\lim_{\varepsilon\to+0} \int\limits_{\partial D} \overline{F}(\zeta - \varepsilon\nu(\zeta)) \cdot \overline{\partial}_n F(\zeta - \varepsilon\nu(\zeta)) d\sigma = 0. \tag{6}$$

С другой стороны, из формулы (3) получаем

$$\int\limits_{\partial D} \overline{F}(\zeta - \varepsilon\nu(\zeta)) \cdot \overline{\partial}_n F(\zeta - \varepsilon\nu(\zeta)) d\sigma =$$

$$= C_1 \int\limits_{\partial D} \overline{F} \cdot \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \frac{\partial F}{\partial \bar{\zeta}_k} d\zeta[k] \wedge d\bar{\zeta} =$$

$$= C_1 \int\limits_{D} d\left(\overline{F} \cdot \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \frac{\partial F}{\partial \bar{\zeta}_k} d\zeta[k] \wedge d\bar{\zeta} \right) =$$

$$= C_1 \int\limits_{D} \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial \overline{F}}{\partial \zeta_k} \cdot \frac{\partial F}{\partial \bar{\zeta}_k} d\zeta \wedge d\bar{\zeta} = C_1 \int\limits_{D} \sum_{k=1}^{n} \left| \frac{\partial F}{\partial \bar{\zeta}_k} \right|^2 d\zeta \wedge d\bar{\zeta}.$$

Отсюда и из равенства (6) следует, что

$$\lim_{\varepsilon\to+0} \int\limits_{D} \sum_{k=1}^{n} \left| \frac{\partial F}{\partial \bar{\zeta}_k} \right|^2 d\zeta \wedge d\bar{\zeta} = 0.$$

Поэтому функция F голоморфна в D. □

Из вышеприведенных утверждений очевидно следует теорема 1.

При доказательстве теоремы 2 используются следующие утверждения.

Лемма 3. *Если для точки $z \in V$ и для почти всех $b \in \mathbb{CP}^{n-1}$ функция $f \in \mathcal{L}^p(\partial D)$ обладает одномерным свойством голоморфного продолжения вдоль комплексных прямых вида (1), то*

$$\int\limits_{\partial D} (\zeta_k - z_k) f(\zeta) U(\zeta, z) = 0, \qquad k = 1, \ldots, n. \tag{7}$$

Доказательство. Воспользуемся снова представлением ядра Бохнера-Мартинелли в переменных t и b. Получим по теореме Фубини

$$\int\limits_{\partial D} (\zeta_k - z_k) f(\zeta) U(\zeta, z) = \int\limits_{\mathbb{CP}^{n-1}} b_k \lambda(b) \int\limits_{\partial D \cap l} f(z + bt) dt = 0$$

для всех $k = 1, \ldots, n$. □

Из леммы 3 следует, что условие (7) выполняется для всех $z \in V$. Применяя к левой части равенства (7) оператор Лапласа, получим, что

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}_k} F(z) = 0, \qquad z \in V, \quad k = 1, \ldots, n.$$

Поэтому функция $F(z)$ является голоморфной в области D. Теорема 2 будет теперь получаться из следующего утверждения.

Теорема 4. *Пусть функция $f \in \mathcal{L}^p(\partial D)$, $p \geqslant 2$ и $F(z)$ — голоморфна в D, тогда $F \in \mathcal{H}^p(D)$ и ее нормальные граничные значения совпадают с f на ∂D.*

Теорема 4 обобщает следствие 15.6 из [3].

Доказательство. Из условия теоремы и из равенства (4) получаем, что

$$\lim_{\varepsilon\to+0}\int\limits_{\partial D}|\overline{\partial}_n F(\zeta+\varepsilon\nu(\zeta))|^p d\sigma=0. \tag{8}$$

Так же, как при доказательстве теоремы 3, рассмотрим интеграл

$$\left|\int\limits_{\partial D}F(\zeta+\varepsilon\nu(\zeta))\cdot\overline{\partial}_n F(\zeta+\varepsilon\nu(\zeta))d\sigma\right|\leqslant$$

$$\leqslant\sqrt[q]{\int\limits_{\partial D}|F(\zeta+\varepsilon\nu(\zeta))|^q\,d\sigma}\cdot\sqrt[p]{\int\limits_{\partial D}\left|\overline{\partial}_n F(\zeta+\varepsilon\nu(\zeta))\right|^p d\sigma}.$$

Второй сомножитель в последней строчке стремится к нулю при $\varepsilon\to+0$ в силу формулы (8). Оценим первый множитель. Так как $p\geqslant 2$, то $p\geqslant q$, поэтому

$$\sqrt[q]{\int\limits_{\partial D}|F(\zeta+\varepsilon\nu(\zeta))|^q\,d\sigma}\leqslant C\sqrt[p]{\int\limits_{\partial D}|F(\zeta+\varepsilon\nu(\zeta))|^p\,d\sigma}.$$

По теореме 1.1 из [10] функция $F\in h^p(\mathbb{C}^n\setminus D)$, т.е. F — гармонична в $\mathbb{C}^n\setminus\overline{D}$ и

$$\sup_{\varepsilon>0}\int\limits_{\partial D}|F(\zeta+\varepsilon\nu(\zeta))|^p\,d\sigma<+\infty.$$

Поэтому так же, как в теореме 3, получаем равенство

$$\lim_{\varepsilon\to+0}\int\limits_{\partial D}\overline{F}(\zeta+\varepsilon\nu(\zeta))\cdot\overline{\partial}_n F(\zeta+\varepsilon\nu(\zeta))d\sigma=0.$$

К интегралу, стоящему в последнем выражении, можно применить формулу Стокса по дополнению $\mathbb{C}^n\setminus D$, поскольку $F(z)=O(|z|^{1-2n})$, а $\overline{\partial}_n F(z)=O(|z|^{-2n})$. Тогда

$$\int\limits_{\partial D}\overline{F}(\zeta+\varepsilon\nu(\zeta))\cdot\overline{\partial}_n F(\zeta+\varepsilon\nu(\zeta))d\sigma=$$

$$=C_3\int\limits_{\mathbb{C}^n\setminus D}\sum_{k=1}^n\left|\frac{\partial F}{\partial\bar\zeta_k}\right|^2 d\zeta\wedge d\bar\zeta.$$

Следовательно, функция F — голоморфна во внешности области. Так как граница области связна, то по теореме Гартогса F голоморфно продолжается в $\mathbb{C}^n$. А поскольку она стремится к нулю при $|z|\to\infty$, то данная функция тождественно равна нулю. Применение теоремы 3 заканчивает доказательство. □

Список литературы

[1] Аграновский М.Л. *Максимальность инвариантных алгебр функций* / М.Л.Аграновский, Р.Е.Вальский // Сиб. матем. журн. – 1971. – Т.12, №1. – С. 3–12.

[2] Айзенберг Л.А. *Интегральные представления и вычеты в многомерном комплексном анализе* / Л.А.Айзенберг, А.П.Южаков. – Новосибирск: Наука, 1979.

[3] Кытманов А.М. *Интеграл Бохнера–Мартинелли и его применения* / А.М.Кытманов. – Новосибирск: Наука, 1992.

[4] Кытманов А.М. *Об одном граничном аналоге теоремы Морера* / А.М.Кытманов, С.Г.Мысливец // Сиб. матем. журн. – 1995. – Т.36, №6. – С. 1350–1353.

[5] Kytmanov A.M. *On an application of the Bochner–Martinelli operator* / A.M.Kytmanov, S.G.Myslivets // Contemporary Math. – 1998. – V. 212. – P. 133–136.

[6] Kytmanov A.M. *Higher-dimensional boundary analogs of the Morera theorem in problems of analytic continuation of functions* / A.M.Kytmanov, S.G.Myslivets // J. Math. Sci. – 2004. – V. 120, №6. – P. 1842-1867.

[7] Мысливец М.С. *О скачке $\bar{\partial}$-нормальной производной интеграла Бохнера-Мартинелли* / М.С.Мысливец // Вестник КрасГУ. Сер. физ.-мат. науки. – 2004. – Вып. 1. – С. 129–132.

[8] Stout E.L. *The boundary values of holomorphic functions of several complex variables* / E.L.Stout // Duke Math. J. – 1977. – V.44, №1. – P. 105–108.

[9] Чирка Е.М. *Комплексные аналитические множества* / Е.М.Чирка. – М.: Наука, 1985.

[10] Шлапунов А.А. *К задаче Коши для голоморфных функций класса Лебега $\mathcal{L}^2$* / А.А.Шлапунов, Н.Н.Тарханов // Сиб. матем. журн. – 1992. – Т.33, №5. – С. 186–195.

ON $\mathcal{L}^p$ FUNCTIONS WITH ONE-DIMENSIONAL HOLOMORPHIC EXTENSION PROPERTY

B.P.Otemuratov

The paper is devoted to some results connecting with one-dimensional property of holomorphic continuations of integrable functions given on the boundary of bounded domain in $\mathbb{C}^n$.