

## РЕОЛОГИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ОДНООСНОГО ДЕФОРМИРОВАНИЯ ПОРИСТЫХ СРЕД<sup>1</sup>

О.В.Садовская, В.М.Садовский\*

*На основе реологического метода, дополненного новым элементом — жестким контактом, который служит для учета различного сопротивления материалов растяжению и сжатию, строятся определяющие соотношения одноосного деформированного состояния пористых сред, обладающих упругими, вязкими и пластическими свойствами. С помощью разработанной ранее компьютерной системы для анализа реологических схем исследуется процесс схлопывания пор при циклическом нагружении и циклическом деформировании пористых материалов.*

Математическому моделированию поведения пористых сред под действием статических и динамических нагрузок посвящено достаточно большое число работ (см. [1–4]). Однако единой теории к настоящему времени еще не создано. Основные трудности на этом пути связаны с тем, что пористые материалы обладают свойством разносопротивляемости: под действием сжимающих напряжений вплоть до момента схлопывания пор такие материалы оказываются более податливыми, чем при дальнейшем сжатии. Процесс разгрузки сжатой пористой среды может быть обратимым или необратимым. В первом случае поровое пространство полностью восстанавливается при нулевом напряжении, во втором — по мере завершения цикла “нагружение-разгрузка” поры меняются в размерах. Можно моделировать эффект схлопывания пор как результат потери устойчивости пористого скелета [5].

В настоящей работе предлагается универсальный способ построения определяющих уравнений пористых сред с помощью реологического метода. Наряду с упругим, вязким и пластическим элементами, которые имитируют соответствующие фундаментальные свойства, используется новый элемент — жесткий контакт [6], служащий для описания скачкообразного изменения сопротивления материала при смене состояния пор.

Реологическая схема общего вида для пористого материала приведена на рис. 1. На этой схеме блок 1, состоящий из элементов, расположенных параллельно предварительно растянутому жесткому контакту, характеризует механические свойства скелета с раскрытыми порами. Величина начальной деформации жесткого контакта  $\varepsilon_0$  определяется удельным объемом пор. Блок 2, состоящий из элементов, расположенных по отношению к жесткому контакту последовательно, описывает повышение прочности сжатого скелета. В более общем случае в данную схему последовательно может быть добавлен еще один блок реологических элементов, который моделирует деформацию среды, не зависящую от состояния пор.

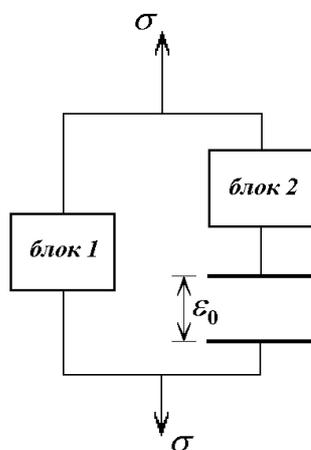


Рис. 1. Общая схема

Заменяя блоки 1 и 2 упругими пружинами, получим простейшую модель идеально упругой пористой среды, реологическая схема которой изображена на рис. 2-а. В соответствии с этой моделью при растяжении материала и при сжатии до критического значения деформации  $\varepsilon = -\varepsilon_0$  выполняется уравнение  $\sigma = \varepsilon/a$ , а при сжатии сверхкритического значения ( $\varepsilon < -\varepsilon_0$ ) — уравнение  $\sigma = \varepsilon(1/a + 1/b)$  ( $a$  и  $b$  — модули упругой податливости пружин). Процесс деформирования такой среды

является термодинамически обратимым. Диаграмма одноосного растяжения-сжатия изображается двухзвенной ломаной на рис. 3-а.

На рис. 2-б приведена реологическая схема упругопластической пористой среды, в которой процесс сжатия после схлопывания пор описывается с помощью модели линейного упрочнения. Если напряжение по модулю не превосходит предела текучести пластического шарнира  $\sigma_s$ , то деформирование среды в точности соответствует упругой модели. Растягивающее напряжение выше  $\sigma_s$  приложить невозможно: при  $\sigma = \sigma_s$  происходит течение материала за счет увеличения размера пор. При сжатии возникает эффект пластического упрочнения.

<sup>1</sup>Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (код проекта 04-01-00267), Комплексной Программы фундаментальных исследований Президиума РАН № 14 “Фундаментальные проблемы информатики и информационных технологий” и Фонда содействия отечественной науке.

\*© О.В. Садовская, В.М. Садовский, Институт вычислительного моделирования СО РАН, o\_sadov@icm.krasn.ru; sadov@icm.krasn.ru, 2006.

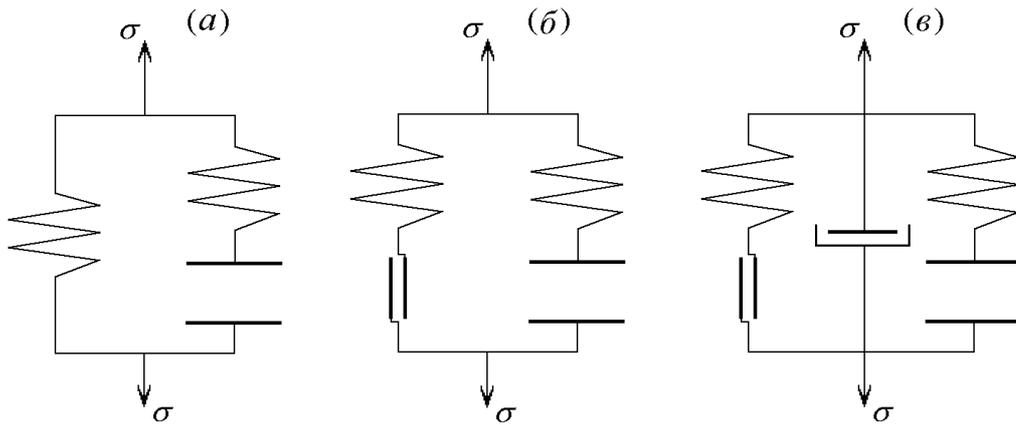


Рис. 2. Реологические схемы пористых сред

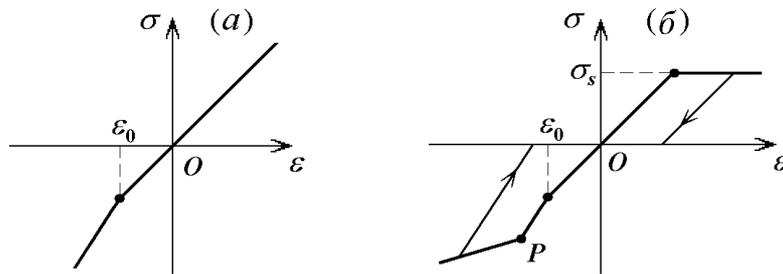


Рис. 3. Диаграммы одноосного растяжения-сжатия упругой и упругопластической пористых сред

Типичные диаграммы активного нагружения и разгрузки изображены на рис. 3-б и рис. 4-а. Рис. 3-б соответствует случаю, когда феноменологические параметры удовлетворяют условию  $a \varepsilon_0 < \sigma_s$ . Это условие выполняется для слабо пористых материалов с малым значением  $\varepsilon_0$  и означает, что процесс схлопывания пор происходит в диапазоне упругой деформации. Судя по приведенной схеме, в точке  $P$  перехода среды в пластическое состояние

$$\sigma = \varepsilon(1/a + 1/b), \quad \varepsilon/a = -\sigma_s.$$

Следовательно, напряжение в этой точке равно  $\sigma = -\sigma_s(1+a/b)$ . Эффект пластического упрочнения сжатого скелета описывается линейным уравнением

$$\sigma = -\sigma_s + \varepsilon/b.$$

На рис. 4-а рассмотрен случай  $a \varepsilon_0 > \sigma_s$ , когда сжатие пор сопровождается пластической диссипацией энергии. Следует заметить, что тангенс угла наклона звена, отвечающего разгрузке пластически сжатого материала, до момента схлопывания пор равен  $1/a$ , а после этого момента он увеличивается до  $1/a + 1/b$ .

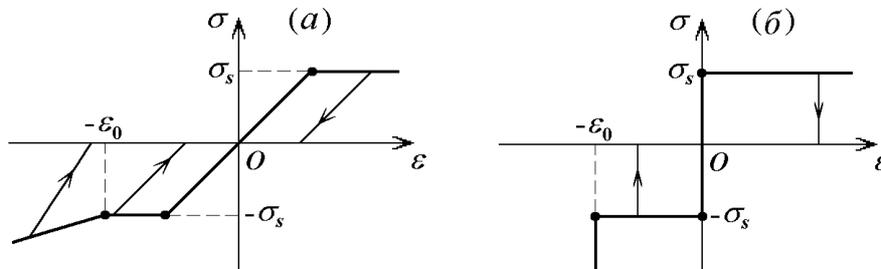


Рис. 4. Диаграммы одноосного растяжения-сжатия упруго- и жесткопластических пористых сред

Устремляя  $a$  к бесконечности, можно с помощью реологической схемы, изображенной на рис. 2-б, получить модель, в которой деформация пор полностью необратима, а деформация сжатого скелета подчиняется закону линейного упрочнения. При стремлении  $b$  к бесконечности получается модель упругопластической пористой среды с абсолютно твердым (недеформируемым) скелетом.

Если  $a \rightarrow \infty$  и  $b \rightarrow \infty$  одновременно, то отсюда следует модель жесткопластической пористой среды с недеформируемым сжатым скелетом, для которой диаграммы одноосного деформирования приведены на рис. 4–6.

Из рассмотрения диаграмм видно, что определяющие соотношения упругопластической пористой среды механически некорректны в той же степени, что и определяющие соотношения классической теории идеальной пластичности. Чтобы получить однозначное описание деформирования материала при заданной программе нагружения, добавим в схему регуляризующий вязкий элемент (см. рис. 2-б). Соответствующая такой схеме модель учитывает вязкие свойства скелета. При стремлении коэффициента вязкости  $\eta$  к нулю она превращается в модель упругопластической пористой среды.

Для расчета диаграмм нагружения и деформирования различных материалов разработан вычислительный алгоритм, основанный на использовании реологических схем произвольного уровня сложности [7]. В случае простых схем, составленных из упругих и вязких элементов, определяющие системы линейных обыкновенных дифференциальных уравнений решаются с помощью неявного метода. При наличии в схеме нелинейных элементов — пластических шарниров и жестких контактов — применяются переборные процедуры численного решения вариационных неравенств с простыми ограничениями. Алгоритм реализован в виде компьютерной системы, имеющей удобный графический интерфейс для ввода и вывода информации. Результаты некоторых численных расчетов, полученные с помощью этой компьютерной системы, приведены на рис. 5–10.

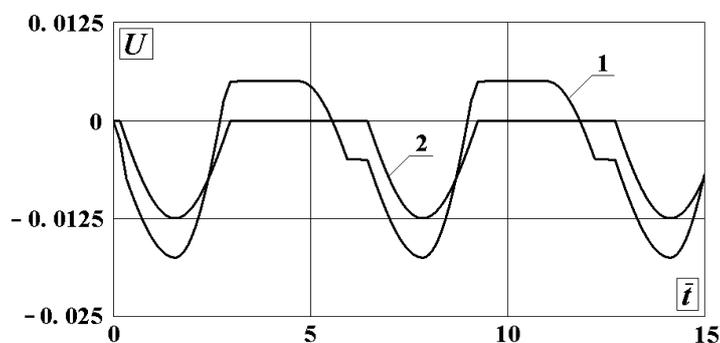


Рис. 5. Деформирование с  $\varepsilon(t) = -0.015 \sin t$  ( $\varepsilon_0 = 0.0025$ )

На рис. 5 представлены графики изменения результирующего напряжения (кривая 1) и напряжения в жестком контакте (кривая 2) при циклическом деформировании среды с нулевой вязкостью. Результаты получены при  $a = b = 1$ ,  $\sigma_s = 0.005$  и  $\varepsilon_0 = 0.0025$ . Такое задание параметров соответствует случаю упругого схлопывания пор. Однако, согласно расчетам, упругое схлопывание происходит только на первом цикле. На втором и последующих циклах в результате предварительной необратимой деформации материала на кривой 1 появляются характерные горизонтальные участки сжимающих напряжений, отвечающие значению предела текучести пластического шарнира. Судя по кривой 2, жесткий контакт при этом находится в разомкнутом состоянии, поскольку напряжение в нем оказывается равным нулю. Таким образом, сжатие пор уже на втором цикле сопровождается пластической деформацией материала.

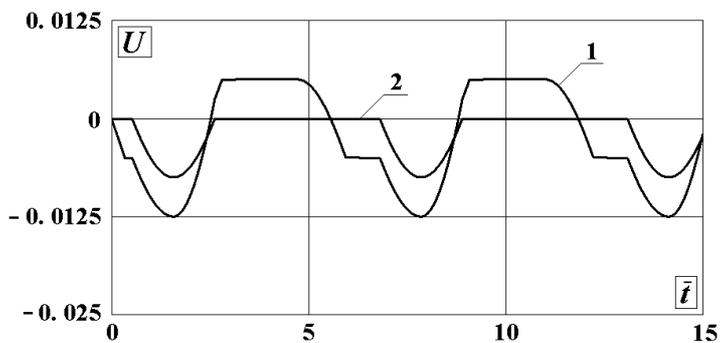


Рис. 6. Деформирование с  $\varepsilon(t) = -0.015 \sin t$  ( $\varepsilon_0 = 0.0075$ )

Аналогичные графики для  $\varepsilon_0 = 0.0075$  в случае пластического схлопывания на первом цикле

программы деформирования приведены на рис. 6. Сравнение рисунков показывает, что с увеличением пористости уровень сжимающих напряжений в среде значительно падает.

Графики изменения характеристик деформированного состояния вязкопластической пористой среды с безразмерным коэффициентом вязкости  $\eta = 1$  при циклическом нагружении изображены на рис. 7 и 8. Кривые 1 характеризуют полную деформацию  $\varepsilon(t)$ , кривые 2 — деформацию жесткого контакта, а кривые 3 — деформацию пластического элемента. Рис. 7 относится к случаю  $a\varepsilon_0 < \sigma_s$ , а рис. 8 — к случаю  $a\varepsilon_0 > \sigma_s$ . В первом случае пластическая деформация среды происходит после момента схлопывания пор, во втором — до этого момента. Однако, как и ранее, это касается только первого цикла нагружения, на всех последующих циклах сжатие раскрытых пор всегда сопровождается пластической диссипацией энергии. Судя по приведенным рисункам, деформация жесткого контакта отличается от полной деформации только когда контакт замкнут, причем интервал замкнутого состояния уменьшается в зависимости от номера цикла, а на достаточно больших временах соответствующие графики полностью совпадают. Следовательно,

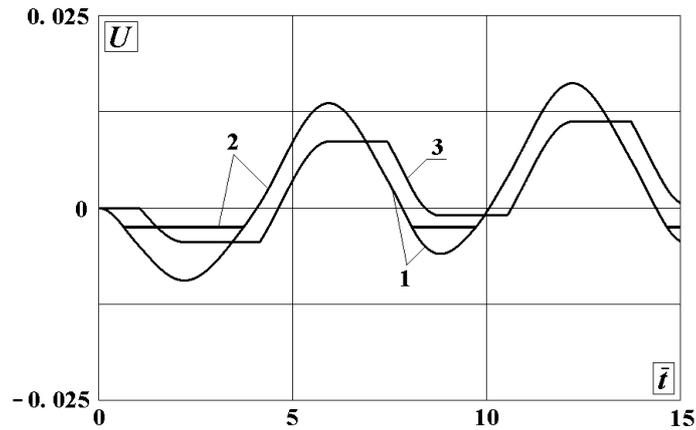


Рис. 7. Нагружение с  $\sigma(t) = -0.015 \sin t$  ( $\varepsilon_0 = 0.0025$ )

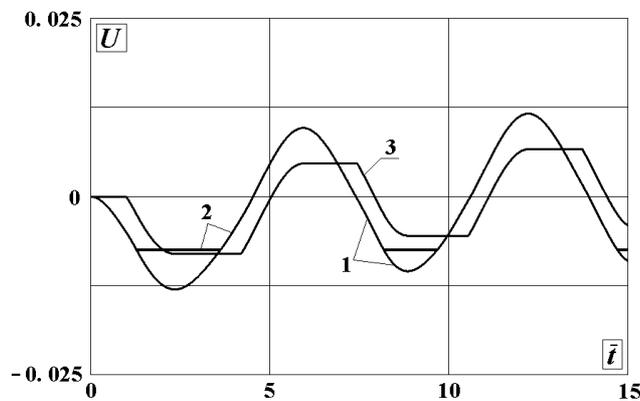


Рис. 8. Нагружение с  $\sigma(t) = -0.015 \sin t$  ( $\varepsilon_0 = 0.0075$ )

при многократном циклическом нагружении материал постепенно утрачивает свойство разносопротивляемости — поры в нем перестают схлопываться. Анализируя кривые, можно также отметить, что со временем в вязкой среде развивается ползучесть: максимальное значение деформации на протяжении одного цикла возрастает.

На рис. 9 и 10 приведены аналогичные графики для циклического нагружения с удвоенной частотой (по сравнению с графиками на рис. 7 и 8).

В заключение отметим, что большая серия методических расчетов, проведенных с помощью разработанной компьютерной системы, показала, что с увеличением частоты циклического нагружения уровень деформации среды существенно падает, заданная амплитуда напряжений оказывается недостаточной для схлопывания пор, пластическая деформация принимает отрицательное значение и остается постоянной в процессе всего нагружения, свойство ползучести полностью исчезает. Поведение пористой среды в этом случае достаточно хорошо описывается теорией упругости, учитывающей начальную (пластическую) деформацию.

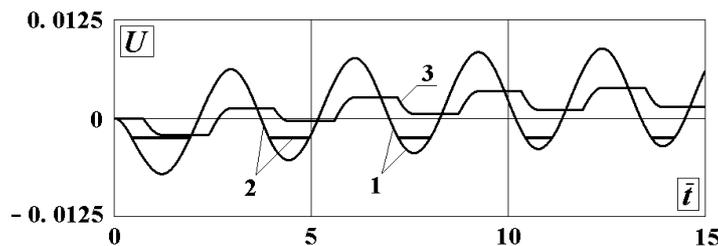


Рис. 9. Нагружение с  $\sigma(t) = -0.015 \sin 2t$  ( $\varepsilon_0 = 0.0025$ )

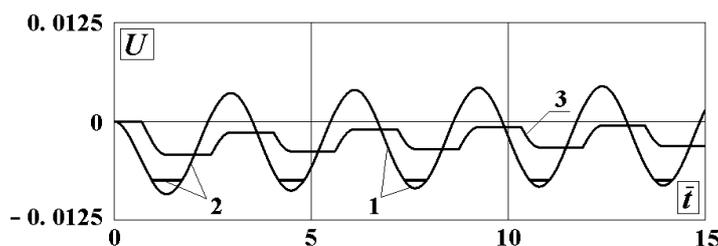


Рис. 10. Нагружение с  $\sigma(t) = -0.015 \sin 2t$  ( $\varepsilon_0 = 0.0075$ )

## Список литературы

- [1] БИОТ М.А. *Theory of Finite Deformations of Porous Solids* / М.А.Бiot // Indiana Univ. Math. J. – 1972. – V. 21. – P. 597–735.
- [2] DE BOER R. *Theory of Porous Media: Highlights in the historical development and current state* / R.de Boer. – Berlin – Heidelberg – New-York: Springer-Verlag, 1999.
- [3] НЕСТЕРЕНКО В.Ф. *Импульсное нагружение гетерогенных материалов* / В.Ф.Нестеренко. – Новосибирск: Наука, 1992. – 260 с.
- [4] *Theoretical and Numerical Methods in Continuum Mechanics of Porous Materials*. Ser.: Solid Mechanics and Its Applications, IUTAM Symposium (Edited by W. Ehlers). – Netherlands: Kluwer Academic Publishers, 2001.
- [5] BORJA R.I. *Multiscale Modeling of Pore Collapse Instability in High-Porosity Solids* / R.I.Borja // Computational Mechanics: Solids, Structures and Coupled Problems (Edited by C.A. Mota Soares et al.). – Netherlands: Springer, 2006. – P. 165–172.
- [6] САДОВСКИЙ В.М. *Численное моделирование в задачах динамики сыпучих сред* / В.М.Садовский // Тр. матем. центра им. Н.И. Лобачевского. – 2002. – Т. 15. – С. 183–198.
- [7] ЗИНЧЕНКО В.А. *Вычислительный алгоритм и компьютерная система для анализа реологических схем* / В.А.Зинченко, О.В.Садовская, В.М.Садовский // Вычислительные методы и программирование. – 2006. – Т. 7. – С. 125–132.

## RHEOLOGICAL MODELS OF UNIAXIAL DEFORMATION OF POROUS MATERIALS

O.V. Sadovskaya, V.M. Sadovskii

*On the basis of rheological approach, supplemented with a new element — rigid contact, which is necessary for the modelling of a behaviour of materials differently resistant to compression and tension, we construct the constitutive relationships of the uniaxial state of strain of porous media possessing elastic, viscous and plastic properties. With the help of computer system worked out for the analysis of rheological schemes we investigate the process of pores collapse under cyclic loading and cyclic deformation of porous materials.*