КОМПЛЕКСНЫЙ АНАЛИЗ

УДК 517.55

ОБ ОДНОМ АНАЛОГЕ ТЕОРЕМЫ ОКАДА

Е.И. Яковлев *

В настоящей статье получен аналог теоремы Окада суммирования кратного степенного ряда в звезде Миттаг-Леффлера.

Как в одномерном, так и в многомерном анализе имеется большое количество работ, посвященных суммированию степенных рядов различными методами. Особый интерес представляет оценка скорости сходимости, эффективность методов суммирования и нахождение областей суммируемости (см., например, [1] - [10]). В одномерном случае классическая теорема Окада [1, с.239] позволяет оценить эффективность данного метода суммирования с помощью его апробации на геометрической прогрессии. Если метод суммирует (позволяет аналитически продолжить) геометрическую прогрессию всюду в комплексной плоскости с выброшенным лучом $[1, +\infty)$, то этот метод суммирует любой степенной ряд в его звезде Миттаг-Леффлера.

В связи с новой волной интереса к суммированию расходящихся рядов [3, 4] в настоящей работе приводится многомерный аналог теоремы Окада суммирования кратного степенного ряда в звезде Миттаг-Леффлера.

Перейдем к точным формулировкам.

Понятие звезды Миттаг-Леффлера или главной звезды степенного ряда используется в работах [1] - [10]. Область G в C^n называется *звездной*, если вместе с каждой точкой $z_0 = (z_1^0, \dots, z_n^0) \in G$ отрезок $[0, z_0] := \{(tz_1^0, \dots, tz_n^0); 0 \le t \le 1\}$ *содержится* в G. Пусть

$$f(z) = f(z_1, ..., z_n) = \sum_{\|k\| \ge 0} a_k z^k = \sum_{\|k\| \ge 0} a_{k_1 \dots k_n} z_1^{k_1} ... z_n^{k_n} \tag{1}$$

– n-кратный степенной ряд, который сходится в некоторой окрестности U начала координат в C^n.

Максимальная звездная область G, в которую голоморфно продолжается ряд (1), называется *звездой Миттаг-Леффлера* (или *главной звездой*) ряда (1) или функции $f(z)$.

Понятие матричного метода суммирования для одномерного случая и соответствующий обзор литературы приведен в монографиях [1] и [2], а для многомерного в [3] - [4], [7].

Пусть $P = \{\tau\}$ – множество на вещественной оси, имеющее предельную точку τ_0 такую, что $\tau_0 \overline{\in} P$, и пусть

$$T_\tau(z) = \sum_{\|k\| \ge 0} c_k(\tau) z^k = \sum_{\|k\| \ge 0} c_{k_1 \dots k_n}(\tau) z_1^{k_1} ... z_n^{k_n} \tag{2}$$

– формальный степенной ряд для произвольного $\tau \in P$.

Определение. Будем говорить, что матрица $T := \{c_k(\tau) = c_{k_1 \dots k_n}(\tau)\}$ или матричный метод T суммирует ряд (1) всюду в области $\Omega (f \in H(\Omega))$, если:

1. Композиция Адамара рядов (1) и (2)

$$T_\tau * f(z) = \sum_{\|k\| \ge 0} c_k(\tau) a_k z^k = \sum_{\|k\| \ge 0} c_{k_1 \dots k_n}(\tau) a_{k_1 \dots k_n} z_1^{k_1} ... z_n^{k_n}, \tag{3}$$

при фиксированном $\tau \in P$ абсолютно сходится всюду в Ω.

2. *Локально равномерно в* Ω (равномерно на любом компакте из Ω) выполняется равенство

$$f(z) = \lim_{\tau \to \tau_0} T_\tau * f(z), \forall z \in \Omega. \tag{4}$$

Замечание. Чтобы не ограничивать применение матричного метода T областью Ω в определении мы исключим условие **1**, предполагая, что (2) задает целую функцию. Тогда условие **1** выполняется автоматически.

Выбор многомерного аналога геометрической прогрессии тесно связан с интегральной формулой, используемой в доказательстве теоремы.

Вместо функции $g(\lambda) = (1-\lambda)^{-1}$ в многомерном случае рассмотрим функцию

$$\varphi(z) = (1- < z, I >)^{-n} = (1 - z_1 - \cdots - z_n)^{-n},$$

которая при $n = 1$ совпадает с g.

Нам также потребуется разложение функции $\varphi(z) = (1- < z, I >)^{-n}$ в кратный степенной ряд.

$$(1- < z, I >)^{-n} = \frac{1}{(n-1)!} \sum_{\|k\| \geq 0} \frac{(\|k\| + n - 1)! z_1^{k_1} \dots z_n^{k_n}}{k_1! \dots k_n!}.$$

Теперь мы можем сформулировать многомерный аналог теоремы Окада, который при $n = 1$ совпадает с теоремой из [1, с.239].

Теорема. *Пусть функция f, заданная кратным степенным рядом* (1)*, сходящимся в непустой окрестности начала координат, и G – звезда Миттаг-Леффлера функции f. Если многомерный матричный метод T вида* (2) *суммирует функцию $(1 - z_1 - \cdots - z_n)^{-n}$ всюду в ее главной звезде, тогда метод T суммирует ряд f в G.*

Доказательство. Область G – звездна, поэтому вместе с каждой точкой $z_0 \in G$ в G содержится отрезок, соединяющий точки 0 и z_0. В силу того, что отрезок $[0, z_0]$ компактно лежит в G, существет окрестность со строго выпуклой регулярной границей $U = \{\Phi(\zeta, \overline{\zeta}) < 0\}$ такая, что U содержит отрезок $[0, z_0]$, а сама компактно лежит в G. Для точек $z \in U$ справедливо интегральное представление для выпуклых областей с регулярной границей

$$f(z) = \frac{(n-1)!}{(2\pi i)^n} \int_{\partial U} f(\zeta) \frac{\delta(w) \wedge d\zeta}{(1- < z, w >)^n}, \tag{5}$$

где $U := \{\zeta \in C^n : \Phi(\zeta, \overline{\zeta}) < 0\}$ – выпуклая область, содержащая начало координат, компактно лежащая в главной звезде функции f, со строго выпуклой, регулярной границей

$$\nabla\Phi|_{\partial U} \neq 0; w_j = \Phi'_{\zeta_j}(< \zeta, \nabla\Phi >)^{-1};\ \delta(w) = \textstyle\sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} w_k dw[k];\ d\zeta = d\zeta_1 \wedge ... \wedge d\zeta_n.$$

Так как $\widetilde{\widetilde{U}} = U$, здесь $\widetilde{U} = \{w :< w, z > \neq\ 1, \forall z \in U\}$, когда $\zeta \in \partial U$ и $w = w(\zeta)$. Поэтому $w = w(\zeta)$ принадлежит границе компакта $\widetilde{U}$ при $\zeta \in \partial U, z \in U$. Рассмотрим множество $M := \{\zeta \in C^n : \zeta_j = w_j z_j, \forall z \in U^{(\varepsilon)}, w \in \partial\widetilde{U}\}$, где

$$U^{(\varepsilon)} = \{z \in U : \sup_{\zeta \in \partial U} |z - \zeta| > \varepsilon\}$$

– ε -сжатие окрестности U, компактно лежащее в главной звезде функции φ, поэтому для $\zeta \in \partial U$ и $z \in U^{(\varepsilon)}, w = w(\zeta)$ выполняется $< z, w > \neq 1$, следовательно, по условию, метод T суммирует функцию φ в ее главной звезде, т.е.

$$\frac{1}{(1- < z, w >)^n} = \lim_{\tau \to \tau_0} T_\tau * \varphi(z_1 w_1, \dots, z_n w_n),$$

причем сходимость локально равномерна в главной звезде функции φ. Отсюда и из формулы (5) получаем:

$$f(z) = \frac{(n-1)!}{(2\pi i)^n} \int_{\partial U} f(\zeta) \lim_{\tau \to \tau_0} T_\tau * \varphi(z_1 w_1, \dots, z_n w_n) \delta(w) \wedge d\zeta =$$

$$\lim_{\tau \to \tau_0} \frac{(n-1)!}{(2\pi i)^n} \int_{\partial U} f(\zeta) T_\tau * \varphi(z_1 w_1, \dots, z_n w_n) \tau(w) \wedge d\zeta$$

Функция $T_\tau * \varphi$ – целая, следовательно, интеграл не изменится, если перейти к интегрированию по границе такой же области $0 \in U_1 \Subset U$. Поэтому можно интегрировать по границе шара $B(0, \gamma)$ достаточно малого радиуса γ , а там f и $T_\delta * \varphi$ можно представить абсолютно сходящимися рядами и почленно проинтегрировать. Учитывая известное соотношение

$$\frac{(n-1)!}{(2\pi i)^n} \int_{\partial B(0,\gamma)} \overline{\zeta}^\beta \zeta^\alpha d\overline{\zeta} \wedge d\zeta = \begin{cases} \frac{(n-1)! \alpha_1! \dots \alpha_n! \gamma^{2||\alpha|| + 2n}}{(||\alpha|| + n - 1)!}, \alpha_j = \beta_j; \forall j = \overline{1, n} \\ 0, \exists j : \alpha_j \neq \beta_j \end{cases}$$

и коэффициенты разложения φ в степенной ряд, получаем для $z \in U$, что

$$f(z) = \lim_{\tau \to \tau_0} T_\tau * f(z).$$

Доказательство последнего равенства для z, принадлежащих произвольному компакту $K \Subset G$, получаем, воспользовавшись леммой Бореля-Лебега, что и доказывает теорему.

Приведем пример матричного метода суммирования, который строится с помощью одномерного метода и суммирует кратные ряды в звезде Миттаг-Леффлера.

Пример. Аналог метода Миттаг-Леффлера. $P = (0, 1]; \tau_0 = 0$.

$T(\tau) = \{c_k(\tau) = c_{k_1 \dots k_n}(\tau)\} = \{(\Gamma(\|k\|\tau + 1))^{-1}\}$, здесь Γ – гамма-функция Эйлера.

Опираясь на доказанную выше теорему, достаточно заметить, что метод $T(\tau)$ суммирует прогрессию $(1- < z, I >)^{-n}$ в ее главной звезде.

Список литературы

[1] Харди, Г. *Расходящиеся ряды* / Г.Харди. – М.: ИЛ, 1951.

[2] Кук, Р. *Бесконечные матрицы и пространства последовательностей.* / Р.Кук. – М.: Физматгиз, 1960.-474 с.

[3] Balser W. *Formal power series and linear systems of meromorphic ordinary differential equations* / W.Balser. – W.Springer-Verlag New York, 2000.

[4] Рамис Ж.-П. *Расходящиеся ряды и асиптотические теории. М.-Ижевск: Инст.комп. иссл.* /Ж.-П.Рамис. – , 2002.– 80с.

[5] Маергойз, Л.С. *Асимптотичекие характеристики целых функций и их приложения в математике и биофизике* / Л.С.Маергойз. – Н.: Наука, 1991.

[6] Иванов, В.К. *Характеристики роста целой функции двух переменных и ее приложение к суммированию двойных степенных рядов* / В.К. Иванов. // Матем.сб. – 1959. – т.47. – №1. – С.131-140.

[7] Меленцов, А.А. *К теории суммирования двойных рядов методами Бореля* / А.А.Меленцов, Э.Б.Мураев. // Докл. АН СССР. – 1960. – т.130. – №6. – С.1193-1195.

[8] Айзенберг, Л.А. *Об одном методе суммирования Бореля кратных степенных рядов* / Л.А.Айзенберг , В.М.Трутнев. // Сиб.матем. журнал.– 1971. – т.12. – №6.– С.1398-1404.

[9] Трутнев, В.М. *Радиальный индикатор в теории суммирования и некоторые применения* / В.М.Трутнев. // Сиб.матем. журнал. – 1972. – т.13.– №3. – С.659-664.

[10] Яковлев Е.И. *О суммировании в параболической звезде Миттаг-Леффлера кратного степенного ряда.* /Е.И. Яковлев . // Вестник КрасГУ – 2006. № 1, С.112-118.

ABOUT ONE ANALOG OF THEOREM OKADA

E.I.Yakovlev

In this artical is received analog of theorem Okada summation multiple power series at Mittag-Leffler's star.