

УДК 530.12: 531.51

## СВЕТОПОДОБНЫЕ ИСТОЧНИКИ В ОБЩЕЙ ТЕОРИИ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ

А.М.Баранов\*

*Внешние гравитационные поля массивных шварцшильдовских, керровских и НУТ частиц принадлежат к алгебраическому типу **D**. Показано, что когда скорость быстро движущейся частицы вдоль оси  $z$  стремится к скорости света и полная энергия каждой частицы постоянна (т.е. масса покоя частицы устремляется к нулю) вместе с керровским угловым моментом, направленным вдоль оси  $z$  и параметром НУТ, которые также стремятся к постоянным величинам, тогда гравитационные поля этих быстро движущихся частиц имеют своим пределом волновые поля, принадлежащие алгебраическим типам **N** и **III**. Найден светоподобный предел массивной частицы, который может быть описан катастрофой сборки на уровне матрицы Вейля с изменением симметрии гравитационного поля такого источника. В рассмотренных случаях это представляет собой фазовый переход гравитационного поля от типа **D** к типу **N** или типу **III** (переход одной «фазы» в другую). Алгебраические типы по Петрову суть различные «фазы» гравитационного поля. Как результат процедуры светоподобного предела можно получить светоподобную частицу как скалярную безмассовую частицу – лайтон (*lighton*), либо векторную безмассовую частицу со спиральностью – геликсон (*helixon*). Показано, что светоподобные источники в общей теории относительности «не имеют волос».*

Задача классической электродинамики о нахождении предельного поля равномерно движущегося электрического заряда хорошо известна (см., например, [1]). Если устремить скорость заряда к скорости света с точки зрения покоящегося инерциального наблюдателя, то электромагнитное поле заряда в пределе приобретает свойства плоской монохроматической электромагнитной волны (т.е. все собственные значения тензора электромагнитного поля вырождаются в нулевые).

Подобная задача в общей теории относительности рассматривалась Пирани [2] для гравитационного поля быстро движущейся частицы на уровне  $6 \times 6$ -симметричной матрицы Петрова ( $6 \times 6$  матрицы кривизны) [3], отвечающей полю Шварцшильда в собственной системе отсчета.

В обоих случаях собственные значения как тензора электромагнитного поля, так и матрицы Петрова стремятся к бесконечности в направлении, перпендикулярном к направлению движения, когда скорость частицы  $V$  приближается к скорости света, принятой здесь наряду с гравитационной ньютоновской постоянной  $G_N$  за единицу,  $V \rightarrow c = 1$ .

Однако корректное решение двух упомянутых выше проблем связано с использованием обобщенных функций ( $\delta$ -функций Дирака) [4] в предельном переходе, суть которого состоит в том, что величина скорости  $V$  частицы устремляется к скорости света  $c$ , а масса покоя частицы устремляется к нулю ( $m_0 \rightarrow 0$ ) так,

\* © А.М.Баранов, Красноярский государственный университет, 2005; E-mail: bam@lan.krasu.ru

чтобы полная релятивистская энергия частицы оставалась постоянной,  $E = const$ . В дальнейшем будем называть процедуру такого предельного перехода *светоподобным пределом*.

Распространяя такую предельную процедуру на ряд частицеподобных источников в общей теории относительности (ОТО), можно получить решения уравнений тяготения, описывающие классические *светоподобные* сингулярные безмассовые источники как скалярного, так и векторного типов: *лайтоны* (*lightons*) и *геликсоны* (*helixons*). При этом в результате применения вышеупомянутой процедуры к частицеподобным источникам не все физические параметры, присущие этим частицам, сохраняются в предельном случае.

В дальнейшем будем использовать понятие матрицы Вейля как симметричной бесследовой  $3 \times 3$  матрицы комплексной Петрова в евклидовом 3D пространстве [3].

Аналогичную предельную процедуру на уровне собственных значений матрицы Вейля будем называть далее как *светоподобный предел на уровне матрицы Вейля*. Такой светоподобный предел может быть описан как катастрофа сборки.

Цель данной работы состоит в том, чтобы суммировать результаты светоподобных пределов частицеподобных источников Шварцшильда, Керра и НУТ на уровне матриц Вейля, а также исследовать связь с теорией катастроф (фазовые переходы между алгебраическими типами гравитационных полей), так как объем настоящей статьи не позволяет то же самое проделать в отношении предельных метрик. В связи с этим следует только отметить, что светоподобные пределы для внешней метрики Шварцшильда были исследованы в разных координатных системах в работах [4-7].

В связи с этим можно выделить следующие проблемы, на которые здесь будет обращено внимание.

- Светоподобные пределы матриц Вейля, соответствующих решениям Шварцшильда, Керра (решение для частицы с собственным моментом импульса), НУТ (решение с дуальным к массе параметром).
- Светоподобные пределы матриц Вейля как катастрофы для массивной шварцшильдовской частицы, керровской частицы и частицы с параметром НУТ.
- Светоподобные источники не имеют «волос» (все параметры при светоподобном переходе сбрасываются, кроме энергии и спиральности).

### 1. Светоподобный предел массивной частицы на уровне матрицы Вейля

Внешнее гравитационное поле покоящейся массивной частицы описывается решением Шварцшильда [7], которое принадлежит к алгебраическому типу  $D$  по классификации Петрова-Пенроуза [3] с матрицей Вейля

$$\hat{W}_D = \frac{m_0}{r_0^3} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (1.1)$$

Здесь  $\hat{W}_D$  – каноническая бесследовая матрица Вейля типа  $D$  по алгебраической классификации Петрова [3],  $m_0$  – масса покоя частицы,  $r_0$  – радиальная переменная:  $r_0^2 = x^2 + y^2 + z^2$ , переменные  $x, y, z$  суть декартовы координаты в 3-пространстве.

Заставим теперь эту частицу двигаться с некоторой скоростью  $V$  вдоль оси  $z$ . Для этого применим к матрице Вейля (1.1) преобразования Лоренца, которые в данном случае описываются ортогональной  $3 \times 3$  матрицей

$$\hat{T} = \begin{pmatrix} \cosh \psi & -i \sinh \psi & 0 \\ i \sinh \psi & \cosh \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (1.2)$$

удовлетворяющей условиям:  $\hat{T}^{-1} \hat{T} = \tilde{\hat{T}} \hat{T} = \hat{T} \tilde{\hat{T}}^{-1} = \tilde{\hat{T}} \tilde{\hat{T}}^{-1} = 1$ ,  $\det \hat{T} = +1$ , транспонированная матрица  $\tilde{\hat{T}} = \hat{T}^{-1}$ ,  $i^2 = -1$ ;  $\cosh \psi = (1 - V^2)^{-1/2}$ ,  $\sinh \psi = V(1 - V^2)^{-1/2}$  (значком «волна» обозначена операция транспонирования матрицы). Переход  $V \rightarrow 1$  соответствует пределу  $\psi \rightarrow \infty$ .

Тогда в покоящейся системе отсчета для гравитационного поля массивной частицы на уровне матрицы Вейля можно записать

$$\hat{W} = \hat{T} \hat{W}_D \hat{T}^{-1} = \frac{E \varepsilon^2}{R^3} \hat{W}(\varepsilon), \quad (1.3)$$

где  $\varepsilon = (1 - V^2)^{1/2}$ ;  $E = \frac{m_0}{\varepsilon}$  – полная энергия частицы,  $E = const$ ;  $R^2 = \rho^2 \varepsilon^2 + (z + Vt)^2$ ;  $\rho^2 = x^2 + y^2$ .

Матрица Вейля  $\widehat{W}(\varepsilon)$  имеет следующий вид:

$$\widehat{W}(\varepsilon) = \varepsilon^2 \widehat{C}_D + 3(\widehat{W}_N^{(E)} + iV \cdot \widehat{W}_N^{(B)}), \quad (1.4)$$

где  $\widehat{C}_D$  – матрица Вейля алгебраического типа  $D$ ,

$$\widehat{C}_D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}; \quad (1.5)$$

матрица «электрического» типа  $\widehat{W}_N^{(E)}$  и матрица «магнитного типа»  $\widehat{W}_N^{(B)}$  суть две части матрицы Вейля алгебраического типа  $N$

$$\widehat{W}_N = \widehat{W}_N^{(E)} + i\widehat{W}_N^{(B)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (1.6)$$

которая отвечает поперечно-поперечной плоской гравитационной волне, распространяющейся вдоль оси  $z$ .

В электродинамике в подобной ситуации при переходе от лабораторной инерциальной системы отсчета, где присутствовало только электрическое поле, в произвольную инерциальную систему отсчета, движущуюся с некоторой постоянной скоростью относительно исходной, напряженность электромагнитного поля может быть представлена комплексным вектором  $\vec{F} = \vec{E} + i\vec{B}$  с вектором напряженности электрического поля  $\vec{E}$  и вектором индукции магнитного поля  $\vec{B}$ .

Здесь необходимо отметить, что матрица Вейля  $N$  типа (волнового типа) может быть переписана в «скелетной» форме

$$\widehat{W}_N = l\vec{l} = \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ 0 \end{pmatrix} (1, i, 0) = \begin{pmatrix} 1 & i & 0 \\ i & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (1.7)$$

где  $\vec{l} = (1, i, 0)$  – светоподобный вектор с нулевой длиной,  $\vec{l}\vec{l} = 0$ .

Перейдем к нахождению предельного вида матрицы Вейля (1.3), введя обозначения  $\xi = z + Vt$  для «текущей переменной» и  $\eta = z + t$  для опережающего времени, хотя это чисто условно, так как знак в  $z \pm t$  связан с выбором направления движения частицы относительно покоящегося наблюдателя и смена знака – с изменением знака у скорости  $V$  в матрице (1.2), т.е. со сменой направления движения.

Физическая суть рассматриваемого предельного перехода заключается в том, что скорость  $V$  в каждый момент времени остается постоянной, хотя и меняется как параметр. Другими словами, имеется бесконечная последовательность инерциальных систем отсчета, движущихся относительно друг друга с постоянными скоростями так, что каждая последующая система отсчета движется относительно предыдущей с большей по величине скоростью. Меняя параметр  $V$ , мы просто меняем систему отсчета, в которой находится частица.

Наша задача заключается в том, чтобы выяснить, что произойдет, когда скорость частицы совпадет со скоростью света. При этом следует иметь в виду, что увеличение скорости может приводить к изменению (в том числе и в сторону возрастания) физических характеристик частицы. Это означает, что наряду с пределом  $V \rightarrow 1$  требуется ввести дополнительные предельные ограничения на эти физические характеристики. В частности, при рассмотрении предельного перехода в (1.3) наряду с пределом  $\varepsilon \rightarrow 0$  ( $V \rightarrow 1$ ) потребуем, чтобы масса покоя частицы стремилась к нулю,  $m_0 \rightarrow 0$  так, чтобы полная энергия  $E = m_0 / \varepsilon$  при таком светоподобном предельном переходе оставалась постоянной.

Другой особенностью такого предельного перехода является то, что необходимо исследовать не только наличие обычного предела при  $V \rightarrow 1$ , но и предела в смысле обобщенных функций, т.е. выяснить, существует ли отличный от нуля предел интеграла от исследуемой функции на всем бесконечном интервале изменения переменной  $\xi$ . Тогда можно говорить, что подынтегральная функция имеет своим пределом обобщенную функцию, частным случаем которой является известная  $\delta$  – функция Дирака.

Прежде всего, рассмотрим предел интеграла при  $\varepsilon \rightarrow 0$ ,

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} \varepsilon^2 (\xi^2 + \varepsilon^2 \rho^2)^{-3/2} d\xi, \quad (1.8)$$

который оказывается равным  $2/\rho^2$ . Обычный предел подынтегральной функции равен нулю.

Следовательно, полный предел подынтегральной функции может быть записан как

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} [\varepsilon^2 (\xi^2 + \varepsilon^2 \rho^2)^{-3/2}] = \frac{2}{\rho^2} \delta(\eta) = \frac{2}{x^2 + y^2} \delta(z+t). \quad (1.9)$$

Учитывая этот результат и факт постоянства полной энергии при светоподобном пределе, получаем в (1.3)

$$\frac{E\varepsilon^2}{R^3} \rightarrow \frac{2E}{\rho^2} \delta(z+t). \quad (1.10)$$

Тогда светоподобный предел матрицы Вейля (1.4) будет равен

$$\widehat{W}(\varepsilon) \rightarrow 3\widehat{W}_N, \quad (1.11)$$

т.е. получаем в пределе матрицу Вейля плоской гравитационной волны.

В итоге светоподобный предел матрицы Вейля (1.3) движущейся массивной частицы может быть представлен как [4]

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \widehat{W} = \frac{6}{\rho^2} \delta(z+t) \widehat{W}_N, \quad (1.12)$$

а скалярную светоподобную безмассовую частицу, гравитационное поле которой описывается такой сингулярной матрицей Вейля, будем называть *лайтоном (lighton)*.

## 2. Светоподобный предел в электродинамике

Полезно сравнить полученное выражение (1.12) с предельным полем быстро движущегося электрического заряда. Как известно, электромагнитное поле движущегося электрического заряда имеет вид (например, [1])

$$\vec{E} = e \frac{1-V^2}{R^3} \vec{R}; \quad \vec{B} = [\vec{V} \vec{E}], \quad (2.1)$$

где  $e$  – электрический заряд частицы;  $\vec{E}$ ,  $\vec{B}$  суть векторы напряженности электрического поля и индукции магнитного поля соответственно,  $\vec{R} = (x, y, z + Vt)$ .

Переходя к светоподобному пределу и воспользовавшись результатом (1.9), получим, что продольные компоненты электромагнитного поля исчезают и остаются лишь поперечные [4]:

$$E_z = 0; \quad E_x = e \frac{2x}{x^2 + y^2} \delta(z+t); \quad E_y = e \frac{2y}{x^2 + y^2} \delta(z+t); \quad (2.2)$$

$$B_z = 0; \quad B_x = -E_y; \quad B_y = E_x. \quad (2.3)$$

Для того чтобы найти предел для электрического потенциала такого поля, необходимо найти предел выражения  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (\xi^2 + \varepsilon^2 \rho^2)^{-1/2}$ . Обычный предел оказывается равным  $1/|\eta|$ , а предел в смысле обобщенных функций находится следующим образом. Возьмем предел интеграла

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\xi}{(\xi^2 + \varepsilon^2 \rho^2)^{1/2}} \rightarrow - \int_{-\infty}^{\infty} d\rho \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varepsilon^2 \rho d\xi}{(\xi^2 + \varepsilon^2 \rho^2)^{3/2}} \rightarrow 2 \ln \rho. \quad (2.4)$$

В итоге для подынтегральной функции получаем полный предел

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (\xi^2 + \varepsilon^2 \rho^2)^{-1/2} = \frac{1}{|\eta|} - 2 \ln \rho \delta(\eta). \quad (2.5)$$

Вычисляя дивергенцию от вектора напряженности электрического поля  $\vec{E}$ , приходим к волновому уравнению с сингулярным источником, движущимся со скоростью света,

$$\operatorname{div} \vec{E} = \square \Phi = 4\pi e \delta(x) \delta(y) \delta(z+t), \quad (2.6)$$

где  $\square$  – оператор Д’Аламбера в пространстве-времени Минковского,  $\Phi$  – функция, равный выражению (2.5), умноженному на заряд  $e$ , т.е. это потенциал электрического поля заряда, движущегося со скоростью света,

$$\Phi = e \left( \frac{1}{|z+t|} - 2 \ln \rho \delta(z+t) \right). \quad (2.7)$$

Присутствие в конечных выражениях электрического заряда указывает на нефизичность полученного волнового предела.

### 2. Светоподобный предел массивной частицы на уровне матрицы Вейля как катастрофа

С точки зрения теории катастроф [8] введенный выше светоподобный предел на уровне матрицы Вейля представляет собой одну из семи элементарных катастроф. Чтобы убедиться в этом, рассмотрим известную задачу на собственные значения матрицы Вейля

$$\widehat{W} X = \lambda X, \quad (2.8)$$

где вектор  $X$  есть вектор-столбец, а  $\lambda$  – собственное значение.

Характеристическое уравнение записывается как

$$\det(\widehat{W} - \lambda \widehat{I}) \propto \lambda^3 + p\lambda + q = 0, \quad (2.9)$$

где  $\widehat{I} = \operatorname{diag}(1, 1, 1)$  – единичная матрица;  $p = -3\varepsilon^4$  и  $q = -2\varepsilon^6$  для исследуемого случая.

Уравнение (2.9) может рассматриваться как уравнение на экстремум «потенциальной функции» (критические точки)

$$U(\lambda, p, q) = \frac{\lambda^4}{4} + \frac{p\lambda^2}{2} + q\lambda, \quad (2.10)$$

которая описывает катастрофу сборки.

На рис.1 изображена поверхность катастрофы сборки и ее проекция на плоскость управляющих параметров  $p$  и  $q$ . Точка сборки ( $p = q = 0$ ) – это точка фазового перехода второго рода. В нашем случае это фазовый переход гравитационного поля из  $D$  алгебраического типа в  $N$  алгебраический тип (переход из одной «фазы» в другую).

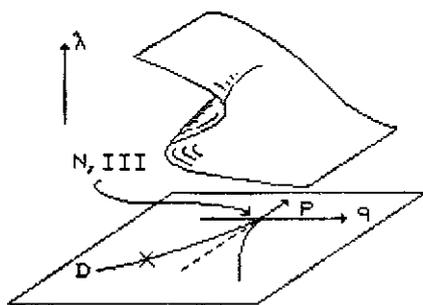


Рис.1 Поверхность катастрофы сборки и ее проекция на плоскость управляющих параметров  $p$  и  $q$

Алгебраические типы по Петрову суть различные «фазы» гравитационного поля (см., например, [9,10]). Параметр  $p$  играет здесь роль температуры, производная  $\partial U / \partial p$  – аналог энтропии, а  $\partial^2 U / \partial p^2$  соответствует теплоемкости в твердом теле [7,9,10].

Дискриминант кубического уравнения (2.9) имеет вид  $Q = (p/3)^3 + (q/2)^2$ . Когда  $Q = 0$ , мы получаем уравнение полукубической параболы  $p = -3(q/2)^{2/3}$ , отвечающей матрице Вейля типа  $D$ . Рассматриваемый здесь случай отмечен на рис.1 крестиком ( $q < 0$ ).

Уравнение (2.9) имеет три корня:  $\lambda_1 = \lambda_3 = -\lambda_2 / 2 = -\varepsilon^2$ . Для этих корней потенциальная функция (2.10) принимает следующие значения:  $U(\lambda_1) = U(\lambda_3) = p^2 / 12$  и  $U(\lambda_2) = -2p^2 / 3$ . В точке

сборки можно наблюдать скачки вторых производных  $\Delta(\partial^2 U / \partial p^2) = 1/6$  и  $\Delta(\partial^2 U / \partial p^2) = -4/3$ , которые соответствуют скачку ранга матрицы Вейля с  $r = 3$  ( $D$  тип) до  $r = 1$  ( $N$  тип), где через  $\Delta$  обозначен скачок значения второй производной потенциальной функции  $U$ .

При применении процедуры светоподобного предела ( $\varepsilon \rightarrow 0, V \rightarrow 1$ ) собственные значения стремятся к нулю:  $\lambda_i \rightarrow 0, i = 1, 2, 3$ . Матрица Вейля (1.3) имеет два собственных вектора  $X_1$  и  $X_2$ . Первый собственный вектор  $X_1$  отвечает собственному значению  $\lambda_2$  и стремится к светоподобному собственному вектору

$L = iI$  матрицы типа  $N$   $\tilde{X}_1 = (-i/(1 - \varepsilon^2)^{-1/2}, 1, 0) \rightarrow \tilde{L}$ , так что выполняется предельное уравнение на собственные значения

$$\hat{W}_N L = 0. \quad (2.11)$$

Второй собственный вектор  $\tilde{X}_2 = (0, 0, 1)$  также является собственным вектором матрицы Вейля  $N$  типа:  $\hat{W}_N X_2 = 0$  [9].

С другой стороны, шварцшильдopodobная предельная метрика в данном случае может быть представлена в форме Керра-Шилда [3,5,6,9]

$$g_{\mu\nu} = \delta_{\mu\nu} - 8H l_\mu l_\nu, \quad (2.12)$$

где  $\mu, \nu = 0, 1, 2, 3$ ,  $\delta_{\mu\nu} = \text{diag}(1, -1, -1, -1)$  – метрический тензор пространства-времени Минковского;  $H = -2E\delta(z+t)\ln(x^2 + y^2)$ ;  $l_\mu = \delta_\mu^0 + \delta_\mu^3$ ;  $l_\mu l^\mu = 0$ .

Такая метрика (2.12) описывает точечный сингулярный источник и есть точное решение точных волновых уравнений Эйнштейна [3,6,9]

$$\square g_{\mu\nu} = -8\pi T_{\mu\nu}, \quad (2.13)$$

где

$$T_{\mu\nu} = 2E\delta(z+t)\delta(x)\delta(y)l_\mu l_\nu \quad (2.14)$$

есть тензор энергии-импульса сингулярного светоподобного источника.

Метрика (2.12) имеет два вектора Киллинга: *светоподобный вектор*  $\xi_L = (\partial/\partial t + \partial/\partial z)$  и *пространственноподобный вектор*  $\xi_Z = (x\partial/\partial y - y\partial/\partial x)$ , который задает аксиальную симметрию и в полярных координатах равен  $\partial/\partial\phi$ .

Шварцшильдopodobное решение обладает четырьмя векторами Киллинга: *временноподобный вектор*  $\xi_T = \partial/\partial t$  и три *пространственноподобных вектора*:  $\xi_X = (y\partial/\partial z - z\partial/\partial y)$ ,  $\xi_Y = (z\partial/\partial x - x\partial/\partial z)$ ,  $\xi_Z = (x\partial/\partial y - y\partial/\partial x)$ . Применяя далее преобразования Лоренца к этим векторам и затем процедуру светоподобного предела, получаем, что вектор  $\xi_Z$  оказывается инвариантным, а векторы  $\tilde{L}\xi_T$ ,  $\tilde{L}\xi_X$ ,  $\tilde{L}\xi_Y$  вырождаются в светоподобный вектор  $\xi_L = (\partial/\partial t + \partial/\partial z)$  [6,9].

Следовательно, светоподобный предел массивной частицы может быть описан как катастрофа сборки на уровне матрицы Вейля (рис.1), что соответствует фазовому переходу второго рода (смена алгебраического типа пространства-времени) и изменению пространственной симметрии гравитационного поля такого источника: от сферической к аксиальной.

С другой стороны, наличие  $\delta$ -образной сингулярности матрицы Вейля  $N$  типа и анализ предельной метрики указывают на то, что гравитационное поле точечной шварцшильдopodobной частицы трансформируется в поле точечного безмассового источника, движущегося со скоростью света, а уравнения тяготения для такого поля преобразуются в волновое уравнение с сингулярным источником (тензором энергии-импульса) светоподобного излучения, позволяет утверждать, что мы имеем дело со скалярной светоподобной безмассовой частицей, которую назовем *лайтоном (lighton)*.

### 3. Светоподобный предел массивной НУТ частицы на уровне матрицы Вейля как катастрофа

Другим известным решением является решение Ньюмена, Унти и Тамбурино (НУТ) [11-12], описывающее внешнее статическое сферически симметричное гравитационное поле типа  $D$  островного источника, обладающего наряду с обычной *массой движения* еще и *дуальной массой*, представляющей собой гравитационный аналог магнитного монополя.

Метрика НУТ может быть записана двумя способами: сначала как это сделано в работе [11]

$$ds^2 = F(dt + 4b \sin^2 \frac{\theta}{2} d\varphi)^2 - \frac{dr^2}{F} - (r^2 + b^2)(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2), \quad (3.1)$$

а затем как в [12]

$$ds^2 = F(d\tau - 2b \cos \theta d\varphi)^2 - \frac{dr^2}{F} - (r^2 + b^2)(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2), \quad (3.2)$$

где  $F + 1 - 2(mr + b^2)/(r^2 + b^2)$ ;  $m_0$  – масса покоя источника,  $b$  – параметр НУТ (дуальная масса),  $r$  – радиальная,  $\theta, \varphi$  – угловые переменные,  $t$  и  $\tau$  связаны координатным преобразованием

$$\tau = t + 2b\varphi. \quad (3.3)$$

При  $b = 0$  решение НУТ переходит в известное решение Шварцшильда.

В данном случае светоподобная процедура состоит в том, что скорость частицы, движущейся вдоль оси  $z$ , устремляется к скорости света, полная энергия остается постоянной, т.е. масса покоя частицы исчезает ( $m_0 \rightarrow 0$ ), новый параметр  $B = b/\varepsilon$  также остается постоянным ( $b \rightarrow B = const$ ). Для НУТ параметра такое преобразование выбрано по двум причинам. Во-первых, из-за интерпретации его как дуальной массы и, во-вторых, чтобы полученная метрика при  $B = 0$  переходила в метрику светоподобной скалярной безмассовой частицы (*лайтона*), соответствующей предельному случаю шварцшильдовского источника.

В итоге предельная метрика будет описывать гравитационное поле волнового алгебраического типа  $N$ , но без параметра НУТ [14].

Пользуясь записью метрик (3.1) и (3.2) для произвольного НУТ параметра, несложно записать все отличные от нуля компоненты тензора кривизны  $R_{\mu\nu\lambda\rho}$ , используя отображение Петрова на 6-мерное евклидово пространство с помощью следующего правила для индексов [3]:

$$10 \rightarrow 1, \quad 20 \rightarrow 2, \quad 30 \rightarrow 3, \quad 23 \rightarrow 4, \quad 31 \rightarrow 5, \quad 12 \rightarrow 6, \quad (3.4)$$

$$R_{11} = -2R_{22} = -2R_{33} = -R_{44} = 2R_{55} = 2R_{66} = -2\alpha(r); \quad (3.5)$$

$$R_{14} = -2R_{25} = -2R_{36} = -2\beta(r), \quad (3.6)$$

где

$$\alpha(r) = \frac{b^4 + 3b^2 m_0 r - 3b^2 r^2 - m_0 r^3}{(b^2 + r^2)^3}; \quad (3.7)$$

$$\beta(r) = \frac{b(b^2 m_0 - 3b^2 r - 3m_0 r^2 + r^3)}{(b^2 + r^2)^3}. \quad (3.8)$$

Матрица Вейля согласно [3] конструируется по правилу

$$\hat{W} = \hat{N} + i\hat{M}, \quad (3.9)$$

матрица  $\hat{N}$  (матрица «электрического» типа) строится из компонент тензора кривизны с индексами, состоящих из цифр от 1 до 3, а матрица  $\hat{M}$  (матрица «магнитного» типа) – из компонент тензора кривизны с индексами, состоящих из цифр от 4 до 6.

Тогда в нашем случае

$$\hat{W}_{NUT} = (\alpha + i\beta)\hat{W}_D = -\frac{m_0 - ib}{(r - ib)^3}\hat{W}_D \quad (3.10)$$

с канонической матрицей Вейля  $D$  типа

$$\hat{W}_D = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (3.11)$$

В покоящейся системе отсчета наблюдателя для гравитационного поля НУТ частицы на уровне матрицы Вейля аналогично преобразованию (1.3) можно записать

$$\hat{W} = \hat{T}\hat{W}_{NUT}\hat{T}^{-1}. \quad (3.12)$$

Применение процедуры светоподобного предела к этой матрице приводит к сингулярной матрице волнового типа  $N$  [13-15]

$$\widehat{W} \rightarrow \frac{6(E-iB)}{\rho^2} \delta(z+t) \begin{pmatrix} 1 & i & 0 \\ i & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \frac{6(E-iB)}{\rho^2} \delta(z+t) \widehat{W}_N. \quad (3.13)$$

Путем поворота в комплексной плоскости параметров  $E$  и  $B$  на угол  $\varphi = -\arctan(B/E)$  можно исключить параметр НУТ и перейти к новому вещественному параметру  $E$  согласно  $\sqrt{E^2 + B^2} \rightarrow E$  [14].

Как и в случае со шварцшильдовской частицей, здесь мы имеем светоподобный предел матрицы Вейля как катастрофу с точки зрения задачи на собственные значения. Точка сборки ( $p = q = 0$ ) есть точка фазового перехода гравитационного поля решения НУТ от алгебраического типа  $D$  к вырожденному типу  $N$  (рис.1). Во время процедуры светового предела также наблюдается изменение симметрии гравитационного поля, а векторы Киллинга решения НУТ вырождаются в светоподобные векторы Киллинга [15].

Таким образом, светоподобный предел массивной НУТ частицы может быть описан как катастрофа сборки на уровне матрицы Вейля с изменением симметрии гравитационного поля такого источника и потерей НУТ параметра. Следовательно, и в этом случае мы получаем скалярную светоподобную безмассовую частицу – *лайтон* (*lighton*).

#### 4. Светоподобный предел массивной частицы Керра на уровне матрицы Вейля как катастрофа

Внешнее гравитационное поле массивной частицы со спином (т.е. частицы, вращающейся вокруг собственной оси и имеющей собственный момент импульса) описывается известным решением Керра [16], принадлежащим к алгебраическому типу  $D$ .

В этом случае процедура светоподобного предела кроме требований на сохранение полной релятивистской энергии при исчезновении собственной массы покоя ( $m_0 \rightarrow 0$ ), когда скорость частицы устремляется к скорости света вдоль оси  $z$ , дополняется требованием, чтобы  $z$ -компонента керровского момента импульса  $L_z$  в результате такого предельного перехода преобразовывалась по правилу

$$L_z = a m_0 \rightarrow J \cdot E, \quad (4.1)$$

где  $a = L_z / m_0$  - керровский приведенный момент импульса (собственный момент импульса на единицу массы покоя),  $J$  – предел приведенного момента импульса в результате применения светоподобного предела,  $J = const$ .

Для метрики Керра, записанной в координатах Бойера-Линдквиста [17],

$$ds^2 = \frac{\Delta}{\rho^2} [dt - a \sin^2 \theta d\varphi]^2 - \frac{\sin^2 \theta}{\rho^2} [(r^2 + a^2) d\varphi - a dt]^2 - \frac{\rho^2}{\Delta} dr^2 - \rho^2 d\theta^2, \quad (4.2)$$

где  $\Delta \equiv r^2 - 2m_0 + a^2$ ;  $\rho^2 \equiv r^2 + a^2 \cos^2 \theta$ , в приближении медленно вращающегося тела (т.е. параметр  $a = L_z / m_0$  мал) нетрудно записать компоненты тензора кривизны, используя отображение Петрова:

$$R_{11} = -2R_{22} = -2R_{33} = 2m_0 / r^3; \quad R_{15} = R_{24} = 2R_{26} = 2R_{35} = (6am_0 / r^4) \sin \theta;$$

$$R_{14} = -2R_{25} = -2R_{36} = (6am_0 / r^4) \cos \theta.$$

Матрица Вейля в этом случае принимает вид

$$\widehat{W}_{Kerr} = \begin{pmatrix} R_{11} + iR_{14} & iR & 0 \\ iR_{15} & -\frac{1}{2}(R_{11} + iR_{14}) & \frac{1}{2}iR_{15} \\ 0 & \frac{1}{2}iR_{15} & -\frac{1}{2}(R_{11} + iR_{14}) \end{pmatrix}. \quad (4.3)$$

Применение лоренцевского буста как и в (1.3) позволяет для гравитационного поля керровской быстро движущейся частицы в покоящейся системе отсчета записать матрицу Вейля:

$$\widehat{W} = \widehat{T} \widehat{W}_{Kerr} \widehat{T}^{-1}. \quad (4.4)$$

Процедура светоподобного предельного перехода, примененная к матрице Вейля решения Керра, приводит предельному выражению

$$\bar{W} \rightarrow \frac{3}{\rho^2} \delta(z+t) \left( 2E \begin{pmatrix} 1 & -i & 0 \\ -i & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \frac{\pi J}{2\rho} \sin \theta \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & i \\ -1 & i & 0 \end{pmatrix} \right). \quad (4.5)$$

Получившаяся матрица элементарными преобразованиями может быть приведена к матрице Вейля **III** алгебраического типа по Петрову (волнового типа) [15]. С другой стороны, матрица (4.5) представляет собой суперпозицию двух матриц: **N** и **III** алгебраических типов, поэтому согласно утверждениям, доказанным в [18], результирующая матрица относится к **III** типу.

Как и для случаев со шварцшильдовской и НУТ частицами, светоподобный предел матрицы Вейля есть катастрофа с точки зрения проблемы на собственные значения. В рассматриваемом случае точка сборки ( $\rho = q = 0$ ) представляет собой точку фазового перехода гравитационного поля из типа **D** в тип **III** (рис. 1).

Светоподобный предел метрики, которому отвечает предельная матрица (4.5), имеет только два вектора Киллинга: светоподобный вектор  $\xi_L = (\partial/\partial t + \partial/\partial z)$  и пространственноподобный аксиальный вектор  $\xi_Z = \partial/\partial \varphi$  в полярных координатах. Решение же Керра имеет следующие два вектора Киллинга: временно-подобный  $\xi_T = \partial/\partial t$  и пространственноподобный аксиальный вектор  $\xi_Z = \partial/\partial \varphi$ .

Применение лоренцевского буста к векторам Киллинга решения Керра вместе с процедурой светоподобного предела приводит к  $\xi_Z \rightarrow \xi_Z; \xi_T \rightarrow \xi_L$ . В итоге светоподобный предельный переход для керровской частицы может быть описан как катастрофа сборки с изменением симметрии гравитационного поля такого источника.

Что касается собственного момента импульса керровской частицы, движущейся вдоль оси  $z$ , то при упомянутом светоподобном предельном переходе остается только  $z$ -компонента спина частицы (положительная или отрицательная компоненты относительно направления движения) или спиральность  $L_Z = \pm J E$  [6, 19]. Соответствующую векторную светоподобную безмассовую частицу со спиральностью назовем *геликсоном (helixon)*.

Если керровский приведенный момент импульса  $a = L_Z / m_0$  строго перпендикулярен направлению движения частицы (оси  $z$ ), то при светоподобном предельном переходе предельный приведенный момент импульса  $J$  исчезает и получаем результат, совпадающий с предельным переходом для шварцшильдоподобной частицы [6, 19], т.е. в пределе имеем скалярную светоподобную безмассовую частицу – *лайтон (lighton)*.

### Заключение

Рассмотренная в настоящей работе процедура светоподобного предельного перехода на классическом уровне (без учета квантовых явлений) в применении к островным источникам, описываемым известными решениями Шварцшильда, Керра и НУТ, позволяет по-иному взглянуть и на сами светоподобные источники, с которыми мы сталкиваемся в природе. В частности, уже на уровне метрики для решения Керра, записанного в координатах Керра-Шилда, результирующая метрика [4, 6], полученная после предельного светоподобного перехода, описывает волновое гравитационное поле, принадлежащее **III** типу по Петрову со спинурующим сингулярным безмассовым источником, который обладает спиральностью [4, 6, 15, 19] и который можно рассматривать как светоподобную безмассовую частицу – *геликсон (helixon)*.

Найденное в работе предельное сингулярное электромагнитное поле, обладающее свойствами плоской электромагнитной волны и создаваемое электрически заряженной частицей, двигающейся со скоростью света в вакууме, не может быть физически проинтерпретировано из-за отсутствия таких частиц в природе (в вакууме).

Однако последние исследования графитовых пленок толщиной в один атомный слой (графены) [20] показали, что в такой невакуумной среде носители электрических зарядов имитируют релятивистские частицы с нулевой массой покоя и имеют эффективную «скорость света»  $c_* \approx 10^6$  м/с = 1/300 скорости света в вакууме. При этом электронный транспорт описывается уравнением Дирака (релятивистским), а циклотронная масса  $m_c$  безмассовых носителей в графене описывается уравнением  $E = m_c c_*^2$ .

В отношении полученных в настоящей работе на классическом уровне результатов по светоподобным безмассовым частицам, как скалярным, так и векторным, следует упомянуть, что проекция момента импульса фотона на направление движения может иметь лишь два значения (положительное и отрицательное) [21], т.е. фотон обладает спиральностью.

Таким образом, применение процедуры светоподобного предела к решениям Шварцшильда, НУТ и Керра позволяет получить новые светоподобные частицы, имеющие только два свободных физических параметра: полную энергию и спиральность. Поэтому можно утверждать, что светоподобные безмассовые источники в общей теории относительности *не имеют «волос»* [22].

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ландау Л.Д. Теория поля / Л.Д.Ландау, Е.М.Лифшиц. – М.: Наука, 1988.
2. Pirani F.A.E. Gravitational Waves in General Relativity. 1V. The Gravitational Field of a Fast-moving Particle / F.A.E.Pirani // Proc. Roy. Soc. (London). – 1959. – V. A252. – P.96-101.
3. Петров А.З. Новые методы в общей теории относительности / А.З.Петров. – М.: Наука, 1966.
4. Баранов А.М. Гравитационные поля «светоподобных» источников / А.М.Баранов; Ун-т дружбы народов им.П.Лумумбы.–М., 1976, деп ВИНТИ СССР. –№ 2631-76.
5. Aichelburg P.C., The Gravitational Fields of Massless Particle / P.C.Aichelburg, R.U.Sexl //Lett. Nuovo Cimento. –1970.–V.4. –P.1316-1318.
6. Баранов А.М. Светоподобный предел решения Керра и конструирование светоподобной нити / А.М.Баранов // Изв.вуз.Физика. – 1994. – № 10. – С.64-69.
7. Synge J.L. Relativity: the General Relativity / J.L.Synge – Amsterdam: North-Holland Publishing Company, 1960.
8. Poston T., Stewart I. Catastrophe Theory and Its applications / T.Poston, I.Stewart – London - San Francisco – Melbourne: Pitman, 1978.
9. Баранов А.М. Светоподобный предел шварцшильдподобного источника как катастрофа / А.М.Баранов // Гравитация и электромагнетизм. – Минск: Университетское, 1992. – Вып. 5. – С.27-31.
10. Баранов А.М. Теория катастроф и алгебраическая классификация Петрова / А.М.Баранов //Сб. тезисов юбилейн. научн. конфер. физического фак-та КГУ (200 лет Казанскому университету, Казань, ноябрь 2004). – Казань: КГУ, 2004. – С.107.
11. Newman E. Empty-Space Generalization of the Schwarzschild Metric / E.Newman L.Tamburino, T.Unti // J. Math. Phys. – 1963. – V.40. – No.7. – P.915.
12. Misner S.W. The Flatter Regions of Newman, Unti and Tamburino’s Generalized Schwarzschild Space / S.W.Misner // J. Math. Phys. –1963.–V.40.– No.7.– P.924.
13. Baranov A.M. On Lightlike NUT Source / A.M.Baranov // Abstracts of Contrib. Papers of 10th Inter. Conf.on GRG – Padova (Italy). –1983.– V.1. – P.176-177 .
14. Баранов А.М. Светоподобный предел источника НУТ / А.М.Баранов //Гравитация и теория относительности. – Казань: КГУ, 1987. – Вып. 24. – С.11-19.
15. Baranov A.M. Lightlike Limits of NUT and Kerr Solutions as catastrophes/ А.М.Баранов // Тезисы доклад. Международн. конфер. «Геометризация физики III» (Казань-97). – Казань: Хэтер, 1997. – С.4-5.
16. Kerr R.P. Gravitational Field of a Spinning Mass as an Example of Algebraically Special Metric / R.P.Kerr// Phys. Rev. Letters. – 1963. – V.11. –No.5. – P. 237-238.
17. Мизнер Ч. Гравитация / Ч.Мизнер, К.Торн, Дж.Уилер – М.: Мир, 1977. – Т.3. –С.84.
18. Баранов А.М. О композиции пространств в общей теории относительности / А.М.Баранов, Н.В.Мицкевич; Ун-т дружбы народов им.П.Лумумбы.–М., 1976, деп. ВИНТИ СССР. – № 2628-76.
19. Baranov A.M. Lightlike Spinning Source / A.M.Baranov //Abstracts of Contrib. Papers of 9th Intern. Conf. on GRG. – Jena (GDR). 1980. V.1. – P.310.
20. K.S.Novoselov Two-dimensional gas of massless Dirac fermions in graphene /K. S. Novoselov, A. K. Geim, S. V. Morozov, D. Jiang, M. I. Katsnelson, I. V. Grigorieva, S. V. Dubonos, A. A. Firsov //Two-dimensional gas of massless Dirac fermions in graphene // Nature. – 2005. –V.438. – P.197–200 (10 November 2005).
21. Берестецкий В.Б. Квантовая электродинамика / В.Б. Берестецкий, Е.М,Лифшиц, Л.П.Питаевский. – М.: Наука, 1989. – С.42.
22. Baranov A.M. Lightlike sources have no “hairs”/ A.M.Baranov// Abstracts of Contrib. Papers of 5th M.Grossmann Meeting.–Perth (Australia). – 1988. – P.4.