

НЕКЛАССИЧЕСКИЕ ТЕОРИИ ГРАВИТАЦИИ, КОСМОЛОГИИ И ПРОСТРАНСТВА; КВАНТОВЫЕ ТЕОРИИ, МНОГОМЕРНЫЕ ТЕОРИИ, АЛЬТЕРНАТИВНЫЕ ТЕОРИИ



УДК 530.12: 531.51

ТИПЫ КРУЧЕНИЯ И КВАТЕРНИОННАЯ НЕМЕТРИЧНОСТЬ

А.П.Ефремов*

Помимо известных примеров кручения – тензора картанова кручения в аффинном пространстве и объекта неголономности в касательном слое дифференцируемого многообразия, – рассматриваются аналогичные характеристики кватернионных пространств: тензор гамильтонова кручения и кватернионная неметричность. Детально анализируются различия между этими геометрическими объектами.

Термин «кручение» (torsion, торсионная характеристика дифференцируемых многообразий) введен Эли Картаном [1] с чисто математических позиций для описания дефекта замыкания параллелограмма при параллельном переносе векторов в аффинном пространстве – в рамках формализма подвижного репера. С другой стороны, в более ранних работах других авторов (Вайнгартен [2], Вольтерра [3]) появляется представление о геометрическом объекте, который ассоциируется с так называемыми дислокациями упругой сплошной макросреды, моделируемой искривленным многообразием. Позднее в работах Кондо [4], Билби и др. [5] была установлена идентичность картанова кручения и плотности дислокаций среды (см. также работу Кадича и др. [6]). Мощный импульс развитию физических теорий с торсионной переменной дали работы Траутмана [7] и Копчинского [8], где нераспространяющееся кручение четырехмерного аффинного пространства-времени полагалось геометрическим аналогом плотности классически описываемого спина (собственного момента импульса) распределенных источников гравитационного поля. В таком простом обобщении ОТО на случай аффинного пространства с кручением и метрической связностью – теории Эйнштейна-Картана (см. подробную работу Хеля [9]) – модели вселенной оказались свободны от космологической сингулярности. Это вызвало волну интереса к новому для теории поля геометрическому объекту, которая имела своим результатом многие серии публикаций, где кручение рассматривалось и как геометрическая реплика различных физических источников, и как независимое динамическое поле, в том числе вакуумное (см. обзор [10]). В то же время при введении в ту или иную теорию торсионной переменной возникли некоторые разночтения в ее определении, например, при использовании удобных аппаратов вычислений в касательных пространствах, где можно определить объекты, приводящие к дефекту замыкания векторного параллелограмма, однако имеющие математическую природу, отличную от картанова кручения. Ситуация с определением кручения еще более усложнилась с развитием теории расслоенных пространств и введением многих калибровочных степеней свободы. Одним из простых, хотя и специфических пространств такого типа являются векторные кватернионные пространства [11], в касательном слое трехмерной базы которого (дифференцируемое многообразие общего вида) действует группа $SO(3C)$ и определена несимметричная кватернионная метрика. На примерах касательного и кватернионного пространств в данной работе анализируется природа возможного появления различных торсионных и им подобных геометрических объектов. В разделе 1 кратко рассматривается классическое определение картанова кручения. Раздел 2 посвящен определению кручения в касательном слое стандартного аффинного пространства. В разделе 3 в тезисной форме воспроизводятся характеристики кватернионного пространства, дается определение гамильтонова кручения и приводятся сведения о кватернионной неметричности, присутствие которой также может сводиться к дефекту параллелограмма. В заключительном разделе 4 кратко обсуждаются перспективы использования кватернионных пространств как гипотетических трехмерных сечений пространства-времени. В тексте

* © А.П.Ефремов, Институт гравитации и космологии Российского университета дружбы народов, 2005; E-mail: A.Yefremov@rudn.ru

онных пространств как гипотетических трехмерных сечений пространства-времени. В тексте трехмерные индексы голономных координат обозначаются строчными греческими буквами, индексы трехмерных величин в касательных пространствах – строчными латинскими буквами; по повторяющимся индексам предполагается суммирование.

1. Картаново кручение

Для простоты и наглядности везде в данной работе рассматриваются трехмерные модели многообразий и пространств. Геометрия дифференцируемого (как минимум класса C_2) аффинного многообразия U , наделенного голономным координатным атласом $\{y^j\}$, в значительной степени определяется правилом малого переноса вектора A^k из точки в точку

$$\delta A^\alpha = -A^\beta \Gamma_{\gamma\beta}^\alpha dy^\gamma, \quad (1)$$

или компонентами связности $\Gamma_{\gamma\beta}^\alpha$. Для ко-векторов знак результата переноса обычно противоположен. Связность по определению задает соотношение между координатными картами в соседних точках, иначе говоря, поведение направляющих векторов системы координат при их переносе, что отражает особенности геометрии, свойственные выбранной координатной сетке. Действительно, перенос вектора (1) стандартно представляется как разность

$$\delta A^\alpha = dA^\alpha - DA^\alpha \quad (2)$$

полного изменения вектора dA^k , включающего как изменение его компонент, так и изменение самих координат, и абсолютного дифференциала DA^α , учитывающего лишь изменение функциональную зависимость компонент. Из соотношений (1) и (2) обычно получается выражение для абсолютной (ковариантной) производной вектора в данном многообразии

$$D_\gamma A^\alpha = \partial_\gamma A^\alpha + A^\beta \Gamma_{\gamma\beta}^\alpha. \quad (3)$$

Следует заметить, что на коэффициенты связности пока не накладывается никаких условий; наличие метрики не обязательно.

Пусть в рассматриваемом многообразии осуществляется перенос каждого из малых векторов u^α , v^α по направлению другого

$$\delta_v u^\alpha = -\Gamma_{\gamma\beta}^\alpha v^\gamma u^\beta, \quad \delta_u dv^\alpha = -\Gamma_{\gamma\beta}^\alpha u^\gamma v^\beta.$$

Разность результатов переноса

$$\delta_v u^\alpha - \delta_u v^\alpha = (\Gamma_{\gamma\beta}^\alpha - \Gamma_{\beta\gamma}^\alpha) u^\gamma v^\beta$$

исчезает, если объект связности симметричен по нижним индексам; это означает, что параллелограмм, составленный малыми векторами, замыкается. В противном случае наблюдается дефект замыкания, пропорциональный величине

$$\Delta_U \sim C_{\gamma\beta}^\alpha \equiv \Gamma_{\gamma\beta}^\alpha - \Gamma_{\beta\gamma}^\alpha, \quad (4)$$

которую Картан назвал кручением. Зная трансформационный закон объекта связности (вообще, как известно, нетензорный), несложно установить, что кручение при допустимом преобразовании координат является настоящим тензором. Если в многообразии помимо связности задана метрика, то в общем случае¹ связность можно представить как сумму символов Кристоффеля $\tilde{\Gamma}_{\gamma\beta}^\alpha$ (риманова связность) и произвольной аффинной деформации, состоящей из торсионной части $Q_{\gamma\beta}^\alpha$ и некоторого симметричного по нижним индексам тензора $S_{\gamma\beta}^\alpha$

$$\Gamma_{\gamma\beta}^\alpha \equiv \tilde{\Gamma}_{\gamma\beta}^\alpha + Q_{\gamma\beta}^\alpha + S_{\gamma\beta}^\alpha. \quad (5)$$

Тензор $S_{\gamma\beta}^\alpha$ определяет ненулевое значение ковариантной производной от метрического тензора относительно связности (5) и носит название неметричности аффинной связности; этот объект приводит к ло-

¹ Случай переноса векторов и ко-векторов с различной связностью не рассматривается.

кальному искривлению автопараллельных линий в евклидовом пространстве и иногда называется тензором сегментарной кривизны. Столь «плохие» свойства вынуждают, как правило, отказываться от аффинной неметричности и рассматривать метрические пространства с метрикой, ковариантно постоянной относительно связности $\Gamma_{\gamma\beta}^{\alpha} = \tilde{\Gamma}_{\gamma\beta}^{\alpha} + Q_{\gamma\beta}^{\alpha}$

$$D_{\gamma} g_{\alpha\beta} = \partial_{\gamma} g_{\alpha\beta} + g_{\epsilon\beta} \Gamma_{\gamma\alpha}^{\epsilon} + g_{\alpha\epsilon} \Gamma_{\gamma\beta}^{\epsilon} = 0. \quad (6)$$

В силу известной связи символов Кристоффеля с частными производными метрики из уравнения (6) следует условие метричности аффинной связности²

$$Q_{\gamma\beta\alpha} + Q_{\gamma\alpha\beta} = 0, \quad (7)$$

которое определяет алгебраическую эквивалентность³ тензора торсионной деформации и тензора кручения

$$C_{\gamma\alpha\beta} = Q_{\alpha\beta\gamma} - Q_{\beta\alpha\gamma}, \quad 2Q_{\alpha\beta\gamma} = C_{\gamma\alpha\beta} + C_{\beta\gamma\alpha} - C_{\alpha\beta\gamma}.$$

Зная свойства симметрии по индексам, несложно подсчитать число N компонент кручения (и тензора торсионной деформации связности)

$$N = P^2(P-1)/2,$$

где P – число размерностей пространства; для трехмерного пространства $P = 3$, $N = 9$.

Небезынтересен характер влияния различных компонент кручения на поведение векторов, перенос которых задан связностью, состоящей лишь из торсионной части. Поскольку при этом метрика является декартовой, различия между верхними и нижними индексами нет. Для анализа достаточно рассмотреть перенос малого вектора u_{α} , исходно имеющего одну компоненту u_1 , вдоль вектора v_n

$$\delta_{\nu} u_1 = -(u_2 Q_{121} + u_3 Q_{131}) v_1 - u_2 Q_{321} v_3 - u_3 Q_{231} v_2; \quad (8)$$

компоненты, симметричные по первым индексам Q_{221} , Q_{331} , в силу определения (4) вклада в кручение не дают, компоненты, симметричные по последним индексам Q_{n11} , по условию метричности (7) исчезают. Соотношение (8) описывает следующие варианты поведения переносимого вектора. Если перенос u_{α} осуществляется вдоль направления, совпадающего с его исходным направлением, (здесь – вдоль v_1), то компоненты кручения с двумя одинаковыми индексами $C_{121} = Q_{121}$, $C_{131} = Q_{131}$ приводят к повороту u_{α} в соответствующих плоскостях движения (1-2) и (1-3). Если же направление переноса не совпадает с исходным направлением u_{α} , то компонента кручения со всеми различными индексами $C_{231} = Q_{231} - Q_{321}$ вращает вектор u_{α} в плоскости, ортогональной линии переноса. Аналогично определяется смысл остальных шести компонент кручения в пространстве трех измерений. Таким же образом можно проанализировать воздействие различных компонент кручения на поведение векторов и в пространствах с другим числом измерений.

2. Кручение в касательном пространстве искривленного многообразия

Структура искривленных пространств (в том числе аффинных) адекватно и достаточно просто описывается в терминах локальных декартовых карт, каждая из которых может трактоваться как малое плоское касательное пространство TU , наделенное собственной координатной сеткой X_k (см., например, Родичев [12]). «Подъем» геометрии базового аффинного пространства в касательное осуществляют коэффициенты Ламе $g_k^{\alpha}(y)$, дающие при свертке по индексам аффинного базиса декартову метрику (символ Кронекера)

$$g_k^{\alpha} g_{n\alpha} = \delta_{kn},$$

а при свертке по «тангенциальным» индексам – метрический тензор аффинного пространства

$$g_{n\alpha} g_{n\beta} = g_{\alpha\beta}.$$

Анализ геометрических объектов при этом весьма удобно проводить с применением формализма дифференциальных форм (см., например, книги Фландерса [13], Мицкевича и др. [14]). Первое уравнение структуры аффинного пространства

$$d\theta_k = -\omega_{kn} \wedge \theta_n + \Theta_k \quad (9)$$

² При опускании вниз бывший верхний индекс в тензоре кручения становится первым, в тензоре торсионной деформации – последним.

³ Под алгебраической эквивалентностью здесь понимается обратимая линейная зависимость компонент одной величины от другой.

устанавливает связь между производной (внешним дифференциалом) заданной базисной 1-формы

$$\theta_k \equiv g_{k\alpha} dy^\alpha, \quad d\theta_k = \partial_\beta g_{k\alpha} dy^\beta \wedge dy^\alpha, \quad (10)$$

заданной 2-формой картанова кручения

$$\Theta_k \equiv \frac{1}{2} g_{k\lambda} C_{\beta\alpha}^\lambda dy^\beta \wedge dy^\alpha \quad (11)$$

и вычисляемой 1-формой аффинной связности ω_{kn} . Подстановка соотношений (10) и (11) в уравнение (9) с учетом определения (4) после перемещения слагаемого с кручением в левую часть дает

$$g_m^\beta g_n^\alpha (\partial_\beta g_{k\alpha} - g_{k\lambda} \Gamma_{\beta\alpha}^\lambda) \theta_m \wedge \theta_n = -\omega_{kn} \wedge \theta_n,$$

откуда

$$\omega_{kn} = -g_m^\beta g_n^\alpha \nabla_\beta g_{k\alpha} \theta_m, \quad (12)$$

где ковариантная производная ∇_β , кроме символов Кристоффеля, содержит торсионную деформацию и, вообще говоря, аффинную неметричность. Геометрический объект

$$\Phi_{mkn} = -\Phi_{mnk} \equiv -g_m^\beta g_n^\alpha \nabla_\beta g_{k\alpha} = -g_m^\beta g_n^\alpha (\partial_\beta g_{k\alpha} - g_{k\lambda} \Gamma_{\beta\alpha}^\lambda) \quad (13)$$

представляет обобщение коэффициентов вращения Риччи (стандартно определенных для римановых пространств) и является эквивалентом аффинной связности в касательном пространстве.

Стоит подчеркнуть, что уравнение структуры (9) не определяет геометрию базового пространства, а служит только для вычисления связности аффинного пространства в ее касательном слое, т.е. 1-формы (12) и, если нужно, коэффициентов (13) по заданным функциям метрики и объектов аффинной деформации связности. Связность касательного пространства (13), как и базового, можно задать правилом переноса произвольного вектора B_k

$$\delta B_k = -B_n \Phi_{jnk} dX_n,$$

подразумевая при этом, что ее часть, содержащая аффинную связность, в общем случае состоит из символов Кристоффеля, торсионной (картановой) деформации и аффинной неметричности; этим возможности переноса в касательном слое аффинного пространства полностью исчерпываются. В то же время, как легко заметить, коэффициенты вращения (13) содержат еще один объект, интерпретируемый в касательном слое как кручение. Действительно, разность результатов «взаимного» переноса двух векторов в касательном пространстве есть

$$\delta_v u_k - \delta_u v_k = (\Phi_{jnk} - \Phi_{njk}) u_k v_j = (2g_{[n}^\beta g_{j]}^\alpha \partial_\beta g_{k\alpha} + C_{k j n}) u_k v_j. \quad (14)$$

Видно, что источник дефекта параллелограмма (14) не только картаново кручение (последнее слагаемое в правой части), но и объект неголономности

$$N_{knj} \equiv 2g_{[n}^\beta g_{j]}^\alpha \partial_\beta g_{k\alpha} = g_n^\beta g_j^\alpha (\partial_\beta g_{k\alpha} - \partial_\alpha g_{k\beta}), \quad (15)$$

который зависит исключительно от свойств используемых координат и, будучи определяющим тензором внешнего дифференциала базисной 1-формы, устанавливает точность или неточность последней. Таким образом, в касательном пространстве дефект параллелограмма определяется картановым кручением и объектом неголономности

$$\Delta_{TU} \sim N_{k j n} + C_{k j n}.$$

Различие между этими двумя торсионными объектами очевидно и существенно. Объект неголономности (15), представленный производными коэффициентов Ламе, имеет характер «потенциальной силы». Легко показать, что пространство, тангенциальная связность которого (13) состоит только из частных производных коэффициентов Ламе, является плоским, то есть направляющие векторы неголономных координат (как и любые векторы) в таком пространстве после переноса по произвольному замкнутому пути сохраняют исходную ориентацию. В свою очередь, аффинная связность, а с ней и картаново кручение, вводится независимо от координатных потенциалов; эти объекты действуют на векторы подобно «внешним силам», вынуждающим их вращение. Результат этой геометрической «работы» при переносе по замкнутому контуру определяется отличными от нуля компонентами тензора кривизны.

3. Кватернионное пространство, его связность и неметричность

Известно, что при описании геометрии аффинных многообразий в касательном пространстве есть определенная свобода выбора декартовых карт, зависящая от размерности многообразия. Так, в трехмерной модели все касательные реперы, определенные в точке, связаны линейным преобразованием, имеющим три параметра (вообще говоря, комплексных). Если все свободные параметры заданы как функции точки, то свобода полностью исчерпывается и о многообразии (с присоединенным касательным слоем) можно говорить как о векторном пространстве некоторого специального вида. Естественно возникающий пример такого пространства – кватернионное (Q) пространство, представленное трехмерным аффинным многообразием, в каждой точке которого определена триада векторов $\mathbf{q}_k(y^\alpha)$, связанных между собой правилом умножения мнимых кватернионных единиц (см., например, книги Бранец и др. [15], Березин и др. [16], работы [17], [11])

$$\mathbf{q}_k \mathbf{q}_n = -\delta_{kn} + \varepsilon_{knj} \mathbf{q}_j, \quad (16)$$

где ε_{knj} – дискриминантный тензор. Специфика Q-пространства в том, что его касательный слой неотъемлем от базы (врожденное свойство), а правило кватернионного умножения (16) трактуется как весьма специальная метрика, имеющая скалярную симметричную (декартову) и векторную антисимметричную части, последняя – с исчезающим следом⁴.

Для Q-пространства спектр величин, составляющих тангенциальную связность, можно расширить введением кватернионных объектов: собственной Q-связности и Q-неметричности. Кватернионный репер, задающий локальную систему ортогональных координат x_k , не обязательно касателен к аффинным координатным линиям и при переносе может осуществлять независимый функционально заданный поворот. Чисто кватернионное изменение векторов базиса при таком переносе определяется соотношением

$$\delta \mathbf{q}_k = -\omega_{jkn} \mathbf{q}_n dx_j,$$

где величина $\omega_{jkn} = -\omega_{jnk}$ есть Q-связность; эту величину, вообще говоря, можно представить в виде суммы

$$\omega_{jkn} = \tilde{\omega}_{jkn} + \sigma_{jkn}. \quad (17)$$

Первое слагаемое правой части соотношения (17) определяется функциональной зависимостью векторов триады от точек многообразия и носит название собственной связности $\tilde{\omega}_{jkn}$. Q-ковариантная производная векторов $\mathbf{q}_k(y^\alpha)$ с собственной связностью исчезает:

$$D_j \mathbf{q}_k \equiv h_j^\alpha (\partial_\alpha \mathbf{q}_k - \tilde{\omega}_{akn} \mathbf{q}_n) = 0, \quad (18)$$

где h_k^α адаптированные к триаде $\mathbf{q}_k(y^\alpha)$ обобщенные коэффициенты Ламе; в силу уравнения (17) исчезает и Q-производная от метрики (16), то есть собственная Q-связность является метрической.

Второе слагаемое в правой части соотношения (17) может быть задано и, будучи отличным от нуля, есть результат ковариантного дифференцирования Q-триады (и Q-метрики) со связностью (17), другими словами, это чисто кватернионная неметричность. Наряду с аффинными составляющими обе части Q-связности (17) должны быть учтены при определении переноса векторов в касательном слое аффинного Q-пространства QT^5

$$\delta B_k = -B_n (\Phi_{jnk} + \tilde{\omega}_{jnk} + \sigma_{jnk}) dx_n. \quad (19)$$

Аффинные коэффициенты вращения Φ_{jnk} очевидно не имеют отношения к собственной Q-связности, поэтому они также могут быть отнесены к полной Q-неметричности

$$\sigma_{jnk} \equiv \Phi_{jnk} + \tilde{\omega}_{jnk}.$$

Осуществляя в соответствии с правилом (19) перенос вектора по замкнутому контуру можно определить кривизну Q-пространства, включающую помимо стандартной аффинной части составляющие кватернионного происхождения. Некоторые сведения о структуре такой кривизны следуют из анализа кватернионно-торсионных объектов.

⁴ Несимметричная структура Q-метрики не влияет на подсчет элемента длины, «проецирование» же с ее помощью одного вектора на другой дает сумму скалярного и векторного произведений.

⁵ Соотношение типа (19), конечно, может быть задано и для векторных пространств, локализованные реперы которых имеют неква-тернионное происхождение, а метрика симметрична и не имеет векторно-значных компонент.

Q-связность (17) порождает новый вид кручения, определяющий дефект параллелограмма только в Q-пространстве

$$\Delta_{QT} \sim \Lambda_{jkn} \equiv \omega_{jkn} - \omega_{kjn}. \quad (20)$$

Как любая тангенциальная связность, Q-связность антисимметрична по последним индексам, поэтому ее можно представить в виде линейной комбинации компонент Q-кручения

$$2\omega_{jkn} = \Lambda_{jkn} + \Lambda_{nj k} - \Lambda_{knj}. \quad (21)$$

При этом каждая составляющая Q-связности генерирует свой объект кручения, так что, комбинируя определения (17) и (20), можно записать:

$$\Lambda_{jkn} = H_{jkn} + \Sigma_{k j n}.$$

Величина

$$H_{jkn} \equiv \tilde{\omega}_{jkn} - \tilde{\omega}_{k j n} \quad (22)$$

задает торсионный объект, определяемый только наличием собственной Q-связности.⁶ Свойства этого кручения аналогичны свойствам объекта неголономности: зависящая от точки Q-триада может рассматриваться как поливекторная функция-потенциал собственной Q-связности и кручения (22). Несложно также показать, что при переносе по произвольному замкнутому контуру в Q-пространстве с собственной Q-связностью триада как многомерная функция положения оказывается в точности исходно ориентированной, так что кривизна, построенная из $\tilde{\omega}_{jkn}$, исчезает. В то же время происхождение кручения (22) и объекта неголономности (15) различно, ибо задание функций ориентации Q-триады не связано с описанием координатных сечек аффинного пространства.

Вторая составляющая Q-кручения (20) строится из чистой Q-неметричности,

$$\Sigma_{jkn} \equiv \sigma_{jkn} - \sigma_{k j n}, \quad (23)$$

определяемой как функция в каждой точке. Эта величина имеет свойства, сходные с картановым кручением: ее компоненты не имеют метрических потенциалов и ведут себя как своего рода «силы трения», вынуждающие Q-триаду совершать повороты, не связанные с ее собственной функциональной зависимостью от точки. Перенос по замкнутому контуру в пространстве с Q-неметричностью, вообще говоря, изменяет ориентацию триады, кривизна, построенная из σ_{jnk} , будет ненулевой. В то же время Q-неметричность и ей соответствующее кручение (23) появляются как результат надления многообразия кватернионной структурой, не зависящей от его аффинных свойств, и, таким образом, по происхождению отличаются от своих некватернионных аналогов – тензора аффинной деформации и картанова кручения.

Из многих выделяется специальный случай Q-пространства, в котором Q-неметричность пропорциональна кручению (23), тогда из формул (20), (21) следует

$$2\sigma_{jkn} = \Sigma_{jkn} = \sigma(x) \varepsilon_{jkn}. \quad (24)$$

Такому кручению можно приписать смысл изотропной дислокации пространства, вызванной закрученностью координатных линий вокруг самих себя, поскольку в каждой точке дефект замыкания параллелограмма (в данном случае – квадрата) одинаков для любого из направлений векторов Q-триады, а сама триада при этом вынуждена вращаться в плоскости, ортогональной направлению переноса.

4. Обсуждение

Начальным императивом анализа кватернионных пространств послужила работа [18], в которой показано, что спинные взаимодействия для квантово-механической частицы могут быть проявлением свойств не частицы, а пространства, в котором она изучается, – простейшего кватернионного пространства. Изучение трехмерных пространств, наделенных Q-триадами как системами отсчета в механике [19] и теории относительности [20], привело к формализации теории. Введение понятия кватернионного пространства как достаточно простого, естественного и все же своеобразного объединения аффинного многообразия со специфическим касательным слоем позволило значительно расширить известную систему классификации искривленных пространств с аффинной связностью [17]. Ряд таких пространств может иметь прикладной характер. В частности, небезынтересным оказывается поиск решений уравнений гравитации для моделей пространства-времени, пространственные сечения которых представлены Q-пространствами различного вида, в частности

⁶ Этот объект, алгебраически эквивалентный Q-связности, характеризует вращения триады «мнимых» кватернионных единиц, открытых У.Гамильтоном, поэтому для отличия его от объекта неголономности и кручения Картана можно назвать гамильтоновым кручением.

содержащие гамильтоново кручение (22) и изотропную Q-неметричность (24). Примеры таких решений будут даны в следующих публикациях.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Cartan E. / E.Cartan // Comptes Rendus (Paris). – 1922. – Т. 11. – P. 237
2. Weingarten G. / G.Weingarten // Atti Acad. Naz. Lincei Rend., Cl. Sci.Fis., Mat., Nature. – 1901, T. 5. – P.57.
3. Volterra V. / V.Volterra // Ann. Ecole Norm. Super. – 1907. – Т. 24. – P. 401.
4. Kondo K. / K.Kondo // Proc. 2-nd Japan Congr. Appl. Mech. – 1952. – P.44.
5. Bilbi B.A., Bullough R., Smith E./ B.A.Bilbi, R.Bullough, E.Smith // Proc. Roy. Soc. London. – 1955. – V. A231. – P.263.
6. Kadic A. Theory of Dislocations and Disclinations/ A.Kadic, D.G.B.Edelen, A Gage. – Berlin-Heidelberg-New-York: Springer-Verlag, 1983.
7. Trautman A. Summary of the GR6 conference / A.Trautman // GRG. – 1972. – V. 3. – P.167.
8. Kopcinski W. A non-singular universe with torsion / W.Kopcinski // Phys. Lett. – 1972. – V. 39A. – P. 219-220.
9. Hehl F.W. / F.W.Hehl // GRG. – 1973. – V. 4. – P.333.
10. Ефремов А.П. Кручение пространства-времени и эффекты торсионного поля / А.П.Ефремов. – М.: ВЕНТ, 1991.
11. Yefremov A.P. Vector Quaternionic Spaces:Geometry and Classification / A.P.Yefremov // Gravitation & Cosmology. – 2003. – V.9. – №.4. – P.319-324.
12. Родичев В.И. Теория тяготения в ортогональном репере / В.И.Родичев. – М.: Наука, 1974.
13. Flanders H. Differential Forms with Applications to the Physical Sciences / H.Flanders. – New-York-London: Acad. Press, 1963.
14. Мицкевич Н.В. Динамика полей в общей теории относительности/ Н.В.Мицкевич, А.П.Ефремов, А.И.Нестеров. – М.: Энергоатомиздат, 1985.
15. Бранец В.Н. Применение кватернионов в задачах ориентации твердого тела /В.Н.Бранец, И.П.Шмыглевский – М.: Наука, 1973.
16. Березин А.В. Кватернионы в релятивистской физике / А.В.Березин, Ю.А.Курочкин, Е.А.Толкачев – Минск: Наука и техника, 1989.
17. Yefremov A.P. Tangent Quaternionic Space /A.P.Yefremov // Gravitation & Cosmology. –2001.– Vol.7.–No.4.– P.273-275.
18. Yefremov A.P. / A.P.Yefremov // Lett. Nuovo Cim. – 1983. –V.37 – № 8. – P.315.
19. Ефремов А.П. Механика Ньютона в кватернионном базисе / А.П.Ефремов – М.: Изд. УДН, 1988.
20. Yefremov A.P. Quaternionic Relativity. I. Inertial Motion / A.P.Yefremov // Gravitation & Cosmology. – 1996. – V.2. – № 1. – P.77-83.

TYPES OF TORSION AND QUATERNIONIC NON-METRICITY

A.P.Yefremov

Apart from known types of torsion, Cartan torsion tensor of affine differential manifold and non-holonomy object arising in its tangent fiber, analogues quaternionic objects are considered. Proper (metric) quaternionic (Hamilton) torsion and quaternionic non-metricity are shown to evoke similar geometric defect while having quite different origin.