

УДК 530.12: 531.51

**ТЕНЗОР ЭНЕРГИИ-ИМПУЛЬСА ФОТОННОГО ГАЗА В ВЕЩЕСТВЕ  
И КОНТРОВЕРЗА МИНКОВСКОГО-АБРАГАМА****В.А. Попов\***

*Рассматривается фотонный газ в среде, для которого получены кинетическое уравнение и конструкция тензора энергии-импульса. Выведен закон сохранения тензора энергии-импульса газа. Полученные выражения анализируются с точки зрения контрверзы Минковского-Абрагама о виде тензора энергии-импульса электромагнитного поля в веществе.*

В настоящее время релятивистская теория сверхтекучести нашла применение для описания процессов в нейтронных звездах [1–3] и построения космологических моделей [4–6]. Наиболее широко используется ковариантное обобщение двухжидкостной модели Ландау [7,9], в которой, наряду с обычным (или “нормальным”) течением жидкости, имеет место “сверхтекучее” течение. Такая ситуация возникает благодаря тому, что квантовые эффекты в сверхтекучей жидкости проявляются раньше, чем жидкость затвердевает. При отличных от нуля температурах жидкость находится в слабовозбужденном состоянии, которое может рассматриваться как совокупность отдельных элементарных возбуждений. Такое элементарное возбуждение ведет себя подобно некоторой квазичастице, обладающей определенными энергией и импульсом, которые связаны между собой дисперсионным соотношением. При малых импульсах (что соответствует длинноволновым возбуждениям) связь между энергией и импульсом линейная, и такие квазичастицы соответствуют звуковым квантам — фононам.

Ковариантное описание фононов проводится в рамках того же формализма, который используется для описания фотонов, распространяющихся в веществе [9, 10]. Это проявление давно замеченного факта, что физические явления, связанные с частицами и квазичастицами во многом аналогичны. Однако поскольку фотоны — кванты электромагнитного поля, то те же явления могут быть описаны с помощью формализма классической электродинамики, которая развивается уже более ста лет и имеет огромный багаж теоретического и экспериментального материала.

Несмотря на то, что теоретические результаты электродинамики сплошных сред находятся в прекрасном согласии с опытом, имеет место теоретический аспект, который, возникнув вскоре после зарождения теории, дискутируется до сих пор. Этим аспектом служит проблема тензора энергии-импульса электромагнитного поля в веществе. С самого начала было предложено две формы записи такого тензора; одну из них предложил Минковский [11], другую — Абрагам [12], вследствие чего данная проблема получила название контрверзы Минковского-Абрагама.

В данной работе рассматривается газ фотонов в среде, поведение которого описывается функцией распределения по координатам и импульсам  $f(x, p)$ . Тензор энергии-импульса газа, построенный как момент

\* © В. А. Попов; Казанский государственный университет, 2005; E-mail: vladimir.popov@ksu.ru

функции распределения, анализируется с точки зрения контрroversы Минковского-Абрагама. Это позволяет прояснить физический смысл отдельных слагаемых в уравнениях сохранения для газа фотонов или квазичастиц и получить выражения для тензоров Минковского и Абрагама как моментов функции распределения.

**Тензор энергии-импульса электромагнитного поля в веществе**

Проблема энергии и импульса электромагнитного поля в веществе стала предметом обсуждения почти сразу же после того, как были сформулированы основные положения, лежащие в основе теории относительности [13–15]. основополагающими в этом вопросе являются работы Минковского [11] и Абрагама [12], которые предложили два различных варианта тензора энергии-импульса. Впоследствии эта проблема многократно обсуждалась в литературе, и к настоящему времени написано большое количество статей и книг (см., например, [16–18] и многочисленные ссылки в них), материал из которых мы используем для краткого описания сути вопроса и приведения некоторых формул, которые понадобятся нам в дальнейшем.

Рассмотрим оптически прозрачную среду без частотной дисперсии. Тензор энергии-импульса, предложенный Минковским для такой среды, имеет вид [16]

$$T_j^i = F_{jm} H^{im} - \frac{1}{4} H_{mk} F^{mk} \delta_j^i, \tag{1}$$

где  $F_{ij}$  и  $H_{ij}$  — бивекторы с такой же структурой, как и тензор Максвелла в вакууме  $F_{ij} = (E, H)$ , с той разницей, что для вещества компонентами бивектора  $F_{ij}$  служат напряженность электрического поля  $E$  и магнитной индукции  $B$ , а бивектора  $H_{ij}$  — электрическая индукция  $D$  и напряженность  $H$ , то есть  $F_{ij} = (E, B)$  и  $H_{ij} = (D, H)$ . Абрагам дал другое выражение для тензора энергии-импульса:

$$T_j^i = F_{jm} H^{im} - \frac{1}{4} H_{mk} F^{mk} \delta_j^i - (n^2 - 1) \Omega_j V^i = T_j^i - (n^2 - 1) \Omega_j V^i, \tag{2}$$

где  $n$  — показатель преломления среды,  $V^i$  — скорость движения среды, а 4-вектор  $\Omega^i$  определяется следующим образом:

$$\Omega^i = 3! V_k V^m F_{lm} H^{(ik} V^{l)}. \tag{3}$$

Физический смысл выражений (1) и (2) наиболее ясно просматривается в системе отсчета, сопутствующей среде. В этом случае (1) и (2) имеют такую структуру [18]:

$$T^{ij} = \begin{pmatrix} w & c g_M \\ S & \sigma_{\alpha\beta} \end{pmatrix}, \quad T^{ij} = \begin{pmatrix} w & c g_A \\ S & \sigma_{\alpha\beta} \end{pmatrix}, \tag{4}$$

$$w = \frac{DE + BH}{8\pi}, \quad S = \frac{c}{4\pi} [EH] = c^2 g_A, \quad g_M = \frac{1}{4\pi c} [DB].$$

Здесь  $w$  — плотность энергии<sup>1</sup>,  $S$  — вектор Пойнтинга,  $g$  — плотность потока импульса,  $\sigma_{\alpha\beta}$  — тензор натяжений. Законы сохранения энергии и импульса (они являются следствием уравнения Максвелла в веществе) для тензоров (4) таковы:

$$\frac{\partial T^{ij}}{\partial x^j} = f_L^i + f_m^i, \quad \frac{\partial T^{ij}}{\partial x^j} = f_L^i + f_m^i + f_A^i, \tag{5}$$

где  $f_L^i$  — плотность силы Лоренца, а  $f_m^i$  и  $f_A^i$  — плотность объемных сил. Первая из них выражается через градиент показателя преломления:

$$f_{m,i} = \frac{w}{2} n^2 \frac{\partial}{\partial x^i} \frac{1}{n^2}. \tag{6}$$

Вторую силу часто называют силой Абрагама. В покоящейся среде ее работа равна нулю, поэтому

$$f_A^i = \{0, f_A\}, \quad f_A = \frac{n^2 - 1}{c^2} \frac{\partial S}{\partial t}. \tag{7}$$

<sup>1</sup> Выражения Минковского и Абрагама для плотности энергии поля в покоящейся среде совпадают. Для движущейся среды плотность энергии по Минковскому выражается той же формулой (4), а плотность энергии по Абрагаму приобретает дополнительные слагаемые, пропорциональные  $Su$ , где  $u$  — скорость среды. Подробнее см. [18].

С формальной точки зрения оба выражения в (5) тождественны. Они отличаются лишь разбиением одной и той же суммы на слагаемые. Подобная неоднозначность в выборе выражения для тензора энергии-импульса носит, вообще говоря, общий характер — тензор энергии-импульса может быть дополнен слагаемым вида, не меняющим его дивергенции. Кроме того, поле в среде является лишь частью замкнутой системы “поле + среда”, для которой справедлив закон сохранения  $\partial T_{\text{total}}^{ik} / \partial x^k = 0$ . При этом ни тензор энергии-импульса системы, ни тензоры поля и среды однозначно не определяются. Поэтому выбор между выражениями (1) и (2) решается в результате выбора выражения для силы. Появление силы  $f_A$  связано с разницей в импульсах, которые получает при излучении или поглощении электромагнитная волна согласно двум подходам. Эта разница как раз и равна импульсу силы  $f_A$ , который передается излучателем среде.

В качестве резюме процитируем: “Все сказанное позволяет считать тензор Абрагама “правильным”, но как нам представляется, объявить тензор Минковского “неправильным” можно, лишь подходя к проблеме несколько формально. На самом же деле в большинстве ситуаций результаты, получаемые на основе использования тензоров Абрагама и Минковского, совершенно тождественны. Это дает возможность в соответствующих случаях не только пользоваться тензором Минковского, но даже считать его применение вполне целесообразным, если тем самым достигаются какие-то упрощения” [18].

В 1971 году Блоунт [19] связал с тензорами Абрагама и Минковского концепцию импульса и псевдоимпульса. Согласно этой концепции импульс электромагнитной волны задается с помощью тензора Абрагама и закон сохранения для него обусловлен инвариантностью физических законов по отношению к координатным сдвигам. Псевдоимпульс электромагнитной волны определяется тензором Минковского; закон сохранения псевдоимпульса требует не только пространственной однородности, но также инвариантности по отношению к сдвигам материальной среды.

#### Кинематика фотона и тензор энергии импульса

Будем рассматривать систему фотонов, для описания которой введем функцию распределения  $f(x, p)$ . Координаты и импульс фотона являются функциями некоторого параметра  $s$  вдоль его траектории. Они определяются из уравнений движения:

$$\frac{dx^i}{ds} = p^i, \quad \frac{dp^i}{ds} + \Gamma_{kl}^i p^k p^l = 0, \quad (8)$$

где  $\Gamma_{kl}^i$  — коэффициенты связности пространства-времени с метрикой  $g^{ij}$ . Уравнения (8) имеют простой геометрический смысл (рис. 1). Первое указывает, что импульс частицы служит касательным вектором к ее траектории, а второе выражает тот факт, что касательный вектор при переносе вдоль траектории остается постоянным. Другими словами, частица движется по геодезическим линиям, которые времениподобны для массивных частиц и изотропны для фотонов. Для импульса фотона это означает, что компоненты связаны между собой соотношением

$$g^{ij} p_i p_j = 0. \quad (9)$$

Уравнения (8) могут быть представлены в гамильтоновой форме:

$$\frac{dx^i}{ds} = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \frac{dp_i}{ds} = -\frac{\partial H}{\partial x^i} \quad (10)$$

с гамильтонианом  $H = \frac{1}{2} g^{ij} p_i p_j$ .

Макроскопические характеристики системы конструируются как моменты функции распределения [20]:

$$N^i = c \int p^i f(x, p) \delta(g^{ij} p_i p_j) \Theta(p_0) \frac{d^4 p}{\sqrt{-g}}, \quad (11)$$

$$T^{ik} = \int p^i p^k f(x, p) \delta(g^{ij} p_i p_j) \Theta(p_0) \frac{d^4 p}{\sqrt{-g}} \quad (12)$$

и т. д. Формулы (11) и (12) задают вектор потока числа частиц и тензор энергии-импульса соответственно. Дельта-функция обеспечивает выполнение условия (9) при интегрировании по четырехмерному импульсному пространству, а  $\Theta$ -функция гарантирует положительность энергии. Аналогичные выражения приняты для массивных частиц.

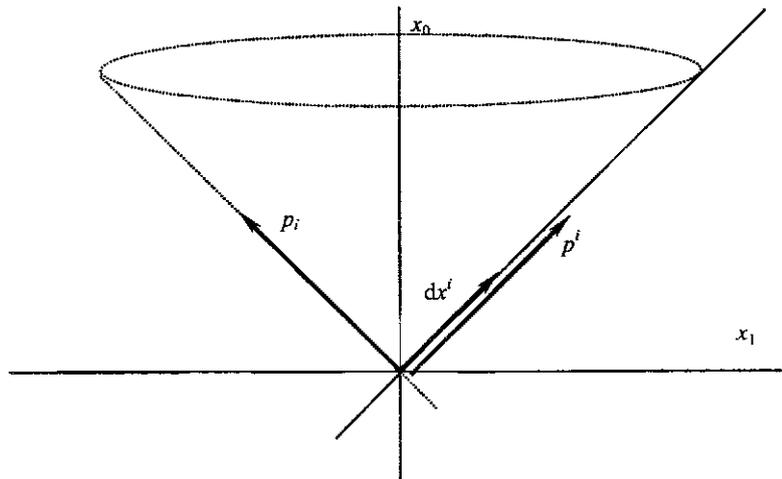


Рис. 1

Квазичастицы отличаются от обычных частиц тем, что, не имея массы, они распространяются со скоростью, меньше световой. То же самое можно сказать о фотонах в среде. Для описания их движения вводится вспомогательный тензор [9]

$$\bar{g}^{ij} = g^{ij} + (n^2 - 1)V^i V^j, \quad (13)$$

называемый иногда акустической или оптической метрикой. Импульсы квазичастиц являются относительно (13) изотропными векторами  $\bar{g}^{ij} p_i p_j = 0$ . Наряду с  $\bar{g}^{ij}$ , вводится сопряженный ковариантный тензор

$$\bar{g}_{ij} = g_{ij} + \left(\frac{1}{n^2} - 1\right)V_i V_j, \quad (14)$$

связанный с (13) соотношением  $\bar{g}^{ij} \bar{g}_{jk} = \delta_k^i$ , что действительно позволяет рассматривать  $\bar{g}^{ij}$  как второй метрический тензор.

При распространении в среде импульс фотона  $p^i$  не является касательным вектором к его траектории. При этом вектор  $p_i$  по-прежнему остается ортогональным к характеристическим кривым (уже не изотропным геодезическим) (рис. 2). Поэтому вместо (8) движение фотона описывается уравнениями

$$\frac{dx^i}{ds} = \bar{g}^{ij} p_j, \quad \frac{d^2 x^i}{ds^2} + \Gamma_{kl}^i \frac{dx^k}{ds} \frac{dx^l}{ds} = 0. \quad (15)$$

Можно показать (прил. 1), что второе уравнение в (15) может быть преобразовано к виду:

$$\frac{dp_k}{ds} = -\frac{1}{2} \frac{\partial \bar{g}^{ij}}{\partial x^k} p^i p^j = \bar{\Gamma}_{ki}^j p_j \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad (16)$$

где  $\bar{\Gamma}_{kl}^i$  — коэффициенты связности, вычисленные по метрике (13). Таким образом, уравнения движения (15) также могут быть представлены как (10) с гамильтонианом

$$H = \frac{1}{2} \bar{g}^{ij} p_i p_j. \quad (17)$$

Вектор потока числа частиц и тензор энергии-импульса для фотонов в среде, очевидно, не могут быть представлены в традиционной форме (11) и (12), поскольку движение частицы не происходит в направлении импульса фотона. Вполне естественно предположить, что перенос энергии и импульса фотон осуществляет вдоль своей траектории. Поэтому, приняв во внимание (10), заменим (11) и (12) на следующие выражения:

$$N^i = c \int \frac{\partial H}{\partial p_i} f(x, p) \delta(2H) \Theta(p_k V^k) \frac{d^4 p}{\sqrt{-g}}, \quad (18)$$

$$T_k^i = c \int p_k \frac{\partial H}{\partial p_i} f(x, p) \delta(2H) \Theta(p_k V^k) \frac{d^4 p}{\sqrt{-g}}, \quad (19)$$

в которых гамильтониан задается выражением (17).

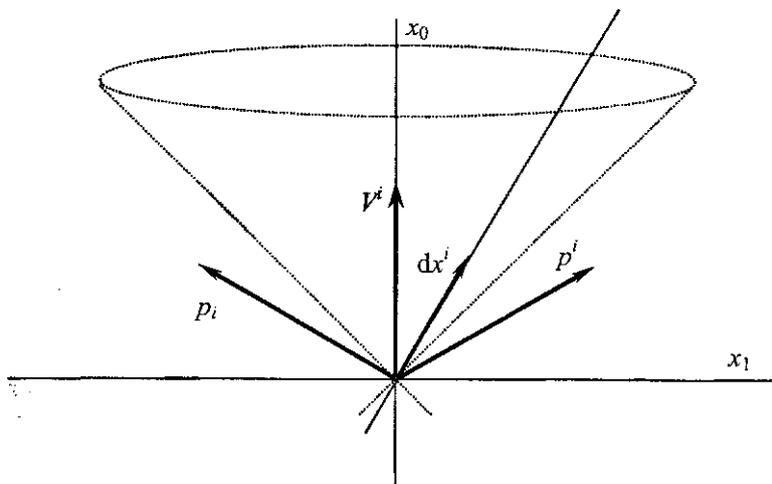


Рис. 2

Формулы (18) и (19) совпадут с определениями (11) и (12), если в качестве  $H$  задать функции, соответствующие массивным или безмассивным частицам.

#### Кинетика фотонов в среде и законы сохранения

Эволюция функции распределения описывается уравнением Лиувилля:

$$\frac{df}{ds} = \frac{\partial f}{\partial x^i} \frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial H}{\partial x^i} = J[f, f], \quad (20)$$

где  $J[f, f]$  — интеграл столкновения фотонов. Подставив в (20) уравнения движения (15) и (16), получим кинетическое уравнение в виде

$$\frac{\partial H}{\partial p_i} \hat{\nabla}_i f = J[p, p], \quad (21)$$

где введен оператор Картана [21], ассоциированный с метрикой  $\bar{g}^{ij}$

$$\hat{\nabla}_i = \bar{\nabla}_i + \bar{\Gamma}_{ik}^j p_j \frac{\partial}{\partial p_k}. \quad (22)$$

Здесь  $\bar{\nabla}_i$  и  $\hat{\nabla}_i$  — операторы ковариантного дифференцирования для метрик  $g^{ij}$  и  $\bar{g}^{ij}$ .

Непосредственным вычислением можно убедиться, что

$$\hat{\nabla}_i p_k = 0, \quad \hat{\nabla}_i \frac{\partial H}{\partial p_k} = 0. \quad (23)$$

Кроме того, имеет место следующая лемма, доказательство которой приведено в прил. 2:

$$\begin{aligned} & \int p_{k_1} \dots p_{k_r} \frac{\partial H}{\partial p_i} \hat{\nabla}_i f(x, p) \delta(2H) \Theta(p_k V^k) \frac{d^4 p}{\sqrt{-g}} = \\ & = \bar{\nabla}_i \int p_{k_1} \dots p_{k_r} \frac{\partial H}{\partial p_i} f(x, p) \delta(2H) \Theta(p_k V^k) \frac{d^4 p}{\sqrt{-g}} - \\ & - \left( \frac{n^2}{2} \frac{\partial}{\partial x^i} \frac{1}{n^2} \right) \int p_{k_1} \dots p_{k_r} \frac{\partial H}{\partial p_i} f(x, p) \delta(2H) \Theta(p_k V^k) \frac{d^4 p}{\sqrt{-g}}. \end{aligned} \quad (24)$$

Лемма (24) упрощает переход от микроскопического описания к макроскопическому. Умножая кинетическое уравнение (21) на  $p_{k_1} \dots p_{k_r}$  и интегрируя по четырехмерному импульсному пространству, можно получить уравнения баланса для любых моментов функции распределения. При умножении на  $p_k$  и последующем интегрировании правая часть (21) обращается в нуль, в результате чего получаем уравнение для тензора энергии-импульса:

$$\nabla_i T_k^i + \left( \Gamma_{ik}^j - \bar{\Gamma}_{ik}^j \right) T_j^i = 0. \quad (25)$$

Оказывается удобным использовать разложение тензора энергии-импульса на компоненты параллельные и ортогональные вектору  $V^i$ :

$$T_k^i = w V^i V_k + Q^i V_k + Q_k V^i + \Pi_k^i + (n^2 - 1) Q_k V^i, \quad (26)$$

где

$$w = T_k^i V^k V_i = cn^2 \int \varepsilon^2 f(x, p) \delta(2H) \Theta(\varepsilon) \frac{d^4 p}{\sqrt{-g}}, \quad (27)$$

$$Q_i = T_k^j V^k \Delta_{ij} = c \int \varepsilon \pi_i f(x, p) \delta(2H) \Theta(\varepsilon) \frac{d^4 p}{\sqrt{-g}},$$

$$\Pi_k^i = T_n^j \Delta^{mi} \Delta_{jk} = c \int \pi^i \pi_k f(x, p) \delta(2H) \Theta(\varepsilon) \frac{d^4 p}{\sqrt{-g}},$$

$$\varepsilon = p_i V^i, \quad \pi_i = \Delta_i^k p_k, \quad \Delta_{ik} = g_{ik} - V_i V_k.$$

Введенные таким образом величины в системе отсчета, сопутствующей среде, имеют смысл плотности энергии, потока энергии и тензора натяжений соответственно. В этой же системе отсчета  $\varepsilon$  — энергия фотона, а  $\pi^i = \{0, \mathbf{p}\}$  — его трехмерный импульс.

Вычисляя разность связностей в (25) и используя обозначения (27), уравнение (25) можем представить в виде

$$\nabla_i T_k^i + (n^2 - 1) Q_i \nabla_k V^i - \frac{wn^2}{2} \nabla_k \frac{1}{n^2} = 0. \quad (28)$$

Тензор энергии-импульса (26) не симметричный тензор, что означает отсутствие сохраняющегося момента импульса. Как уже подчеркивалось, это не является обязательным требованием, так как фотоны только часть замкнутой системы. Это обстоятельство проявляется также в законе сохранения (28), который, помимо дивергенции  $T_k^i$ , содержит “силовую” часть.

Весьма интересным оказывается сопоставить выражения для тензора энергии-импульса для фотонного газа (26), полученного с помощью функции распределения, и классические выражения (1)–(4), полученные на основе уравнений поля. Очевидно, что выражение (26) эквивалентно тензору Минковского. Это наиболее ясно видно при сравнении (26) с (4) в условиях покоящейся среды. В этом случае формально тензор (26) может быть представлен в виде первого тензора из (4), если ввести обозначения  $Q^i = \{0, S/c\}$ ,  $\Pi^{\alpha\beta} = \sigma_{\alpha\beta}$  (остальные компоненты тензора натяжений равны нулю). Уравнение (28) также совпадает с первым уравнением в (5), в котором сила Лоренца должна быть положена равной нулю ввиду отсутствия зарядов и токов.

Полное выражение для объемной силы  $f_{m,i}$  в движущейся среде задается выражением

$$f_{m,i} = \frac{wn^2}{2} \nabla_i \frac{1}{n^2} - (n^2 - 1) Q_k \nabla_i V^k, \quad (29)$$

что совпадает с соответствующим выражением, полученным из уравнений поля [18]. Используя тождественность (19) и (1), получим выражение, которое соответствует тензору Абрагама:

$$\begin{aligned}
 T_k^i &= T_k^i - (n^2 - 1)Q_k V^i = \\
 &= c \int p_k \frac{\partial H}{\partial p_i} f(x, p) \delta(2H) \Theta(p_k V^k) \frac{d^4 p}{\sqrt{-g}} - c \int (n^2 - 1) \varepsilon V^i \pi_k f(x, p) \delta(2H) \Theta(\varepsilon) \frac{d^4 p}{\sqrt{-g}} = \\
 &= c \int \varepsilon V_k \frac{\partial H}{\partial p_i} f(x, p) \delta(2H) \Theta(p_k V^k) \frac{d^4 p}{\sqrt{-g}} + c \int \pi_k p^i f(x, p) \delta(2H) \Theta(\varepsilon) \frac{d^4 p}{\sqrt{-g}}.
 \end{aligned} \tag{30}$$

Как видно из выражения (30), для построения тензора Абрагама с помощью функции распределения необходимо исходить из того, что энергия фотона переносится вдоль траектории его движения, тогда как перенос импульса осуществляется вдоль линии векторного поля  $p^i$ . Это отражает тот факт, что при излучении фотона или вхождении его в среду часть импульса передается веществу. Величина этого импульса определяется силой Абрагама:

$$f_{A,i} = \nabla_k (n^2 - 1) Q_i V^k. \tag{31}$$

В результате тензор энергии-импульса (30) имеет такую же структуру, как если бы он был составлен для мнимых “частиц” двух сортов: частицы одного сорта осуществляли бы перенос только энергии, а частицы другого — импульса. В этом смысле построение кинетической модели, из которой сразу бы получалось выражение для тензора Абрагама, видимо, весьма громоздко и вряд ли целесообразно. Гораздо эффективнее использовать более компактное выражение (19) для тензора Минковского. Эта ситуация не уникальна. Например, в случае квантования электромагнитного поля в веществе использование выражения Минковского также быстро и непосредственно приводит к цели [18].

#### Приложение 1

Покажем эквивалентность второго уравнения в (15) и уравнения (16).

Для краткости обозначим в формуле (15)  $\dot{x}^i \equiv dx^i/ds$ . Тогда первое слагаемое в (15) может быть переписано в виде

$$\frac{d^2 x^i}{ds^2} = \frac{d\dot{x}^i}{ds} = \frac{\partial \bar{g}^{ij}}{\partial x^m} \dot{x}^m p_j + \bar{g}^{ij} \frac{dp_j}{ds}. \tag{32}$$

Подставляя это выражение в (15) и сворачивая затем с  $\bar{g}_{ki}$ , получим:

$$\frac{dp_k}{ds} = -\bar{g}_{ki} \frac{\partial \bar{g}^{ij}}{\partial x^m} \dot{x}^m p_j - \bar{g}_{ki} \Gamma_{kl}^i \dot{x}^k \dot{x}^l = \frac{\partial \bar{g}_{ki}}{\partial x^m} \dot{x}^m \dot{x}^i - \bar{g}_{ki} \Gamma_{kl}^i \dot{x}^k \dot{x}^l. \tag{33}$$

Первое слагаемое в правой части может быть преобразовано с учетом симметрии по индексам  $m$  и  $i$ :

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \bar{g}_{ki}}{\partial x^m} \dot{x}^m \dot{x}^i &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \bar{g}_{ki}}{\partial x^m} + \frac{\partial \bar{g}_{km}}{\partial x^i} \right) \dot{x}^m \dot{x}^i = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \bar{g}_{ki}}{\partial x^m} + \frac{\partial \bar{g}_{mk}}{\partial x^i} - \frac{\partial \bar{g}_{mi}}{\partial x^k} \right) \dot{x}^m \dot{x}^i + \frac{1}{2} \frac{\partial \bar{g}_{mi}}{\partial x^k} \dot{x}^m \dot{x}^i = \\
 &= \bar{g}_{ki} \bar{\Gamma}_{mi}^l \dot{x}^m \dot{x}^i + \frac{1}{2} \frac{\partial \bar{g}_{mi}}{\partial x^k} \dot{x}^m \dot{x}^i,
 \end{aligned} \tag{34}$$

что позволяет записать (33) как

$$\frac{dp_k}{ds} = \frac{1}{2} \frac{\partial \bar{g}_{mi}}{\partial x^k} \dot{x}^m \dot{x}^i + \bar{g}_{kl} \left( \bar{\Gamma}_{mi}^l - \Gamma_{mi}^l \right) \dot{x}^m \dot{x}^i. \tag{35}$$

Имея в виду (17) и соотношение  $\bar{g}^{ij} \bar{g}_{jk} = \delta_k^i$ , нетрудно показать, что первое слагаемое равно  $-\partial H / \partial x^k$ . Используя явные выражения для акустической метрики, второе слагаемое может быть преобразовано следующим образом:

$$\begin{aligned}
 \bar{g}_{kl} \left( \bar{\Gamma}_{kl}^i - \Gamma_{kl}^i \right) \dot{x}^k \dot{x}^l &= \\
 &= \frac{1}{2} \left\{ \nabla_i \left( \left( \frac{1}{n^2} - 1 \right) V_k V_m \right) + \nabla_m \left( \left( \frac{1}{n^2} - 1 \right) V_k V_i \right) - \nabla_k \left( \left( \frac{1}{n^2} - 1 \right) V_i V_m \right) \right\} \dot{x}^m \dot{x}^i = \\
 &= \frac{1}{2} \left\{ \nabla_i \bar{g}_{km} + \nabla_m \bar{g}_{ki} - \nabla_k \bar{g}_{mi} \right\} \dot{x}^m \dot{x}^i,
 \end{aligned} \tag{36}$$

Лемма (24) упрощает переход от микроскопического описания к макроскопическому. Умножая кинетическое уравнение (21) на  $p_{k_1} \dots p_{k_r}$  и интегрируя по четырехмерному импульсному пространству, можно получить уравнения баланса для любых моментов функции распределения. При умножении на  $p_k$  и последующем интегрировании правая часть (21) обращается в нуль, в результате чего получаем уравнение для тензора энергии-импульса:

$$\nabla_i T_k^i + \left( \Gamma_{ik}^j - \bar{\Gamma}_{ik}^j \right) T_j^i = 0. \quad (25)$$

Оказывается удобным использовать разложение тензора энергии-импульса на компоненты параллельные и ортогональные вектору  $V^i$ :

$$T_k^i = w V^i V_k + Q^i V_k + Q_k V^i + \Pi_k^i + (n^2 - 1) Q_k V^i, \quad (26)$$

где

$$w = T_k^i V^k V_i = cn^2 \int \varepsilon^2 f(x, p) \delta(2H) \Theta(\varepsilon) \frac{d^4 p}{\sqrt{-g}}, \quad (27)$$

$$Q_i = T_k^j V^k \Delta_{ij} = c \int \varepsilon \pi_i f(x, p) \delta(2H) \Theta(\varepsilon) \frac{d^4 p}{\sqrt{-g}},$$

$$\Pi_k^i = T_m^j \Delta^{mi} \Delta_{jk} = c \int \pi^i \pi_k f(x, p) \delta(2H) \Theta(\varepsilon) \frac{d^4 p}{\sqrt{-g}},$$

$$\varepsilon = p_i V^i, \quad \pi_i = \Delta_i^k p_k, \quad \Delta_{ik} = g_{ik} - V_i V_k.$$

Введенные таким образом величины в системе отсчета, сопутствующей среде, имеют смысл плотности энергии, потока энергии и тензора натяжений соответственно. В этой же системе отсчета  $\varepsilon$  — энергия фотона, а  $\pi^i = \{0, \mathbf{p}\}$  — его трехмерный импульс.

Вычисляя разность связностей в (25) и используя обозначения (27), уравнение (25) можем представить в виде

$$\nabla_i T_k^i + (n^2 - 1) Q_i \nabla_k V^i - \frac{wn^2}{2} \nabla_k \frac{1}{n^2} = 0. \quad (28)$$

Тензор энергии-импульса (26) не симметричный тензор, что означает отсутствие сохраняющегося момента импульса. Как уже подчеркивалось, это не является обязательным требованием, так как фотоны только часть замкнутой системы. Это обстоятельство проявляется также в законе сохранения (28), который, помимо дивергенции  $T_k^i$ , содержит “силовую” часть.

Весьма интересным оказывается сопоставить выражения для тензора энергии-импульса для фотонного газа (26), полученного с помощью функции распределения, и классические выражения (1)–(4), полученные на основе уравнений поля. Очевидно, что выражение (26) эквивалентно тензору Минковского. Это наиболее ясно видно при сравнении (26) с (4) в условиях покоящейся среды. В этом случае формально тензор (26) может быть представлен в виде первого тензора из (4), если ввести обозначения  $Q^i = \{0, S/c\}$ ,  $\Pi^{\alpha\beta} = \sigma_{\alpha\beta}$  (остальные компоненты тензора натяжений равны нулю). Уравнение (28) также совпадает с первым уравнением в (5), в котором сила Лоренца должна быть положена равной нулю ввиду отсутствия зарядов и токов.

Полное выражение для объемной силы  $f_{m,i}$  в движущейся среде задается выражением

$$f_{m,i} = \frac{wn^2}{2} \nabla_i \frac{1}{n^2} - (n^2 - 1) Q_k \nabla_i V^k, \quad (29)$$

что совпадает с соответствующим выражением, полученным из уравнений поля [18]. Используя тождественность (19) и (1), получим выражение, которое соответствует тензору Абрагама:

$$\begin{aligned}
 T_k^i &= T_k^i - (n^2 - 1)Q_k V^i = \\
 &= c \int p_k \frac{\partial H}{\partial p_i} f(x, p) \delta(2H) \Theta(p_k V^k) \frac{d^4 p}{\sqrt{-g}} - c \int (n^2 - 1) \varepsilon V^i \pi_k f(x, p) \delta(2H) \Theta(\varepsilon) \frac{d^4 p}{\sqrt{-g}} = \\
 &= c \int \varepsilon V_k \frac{\partial H}{\partial p_i} f(x, p) \delta(2H) \Theta(p_k V^k) \frac{d^4 p}{\sqrt{-g}} + c \int \pi_k p^i f(x, p) \delta(2H) \Theta(\varepsilon) \frac{d^4 p}{\sqrt{-g}}.
 \end{aligned} \tag{30}$$

Как видно из выражения (30), для построения тензора Абрагама с помощью функции распределения необходимо исходить из того, что энергия фотона переносится вдоль траектории его движения, тогда как перенос импульса осуществляется вдоль линии векторного поля  $p^i$ . Это отражает тот факт, что при излучении фотона или вхождении его в среду часть импульса передается веществу. Величина этого импульса определяется силой Абрагама:

$$f_{A,i} = \nabla_k (n^2 - 1) Q_i V^k. \tag{31}$$

В результате тензор энергии-импульса (30) имеет такую же структуру, как если бы он был составлен для мнимых “частиц” двух сортов: частицы одного сорта осуществляли бы перенос только энергии, а частицы другого — импульса. В этом смысле построение кинетической модели, из которой сразу бы получалось выражение для тензора Абрагама, видимо, весьма громоздко и вряд ли целесообразно. Гораздо эффективнее использовать более компактное выражение (19) для тензора Минковского. Эта ситуация не уникальна. Например, в случае квантования электромагнитного поля в веществе использование выражения Минковского также быстро и непосредственно приводит к цели [18].

#### Приложение 1

Покажем эквивалентность второго уравнения в (15) и уравнения (16).

Для краткости обозначим в формуле (15)  $\dot{x}^i \equiv dx^i/ds$ . Тогда первое слагаемое в (15) может быть переписано в виде

$$\frac{d^2 x^i}{ds^2} = \frac{d\dot{x}^i}{ds} = \frac{\partial \bar{g}^{ij}}{\partial x^m} \dot{x}^m p_j + \bar{g}^{ij} \frac{dp_j}{ds}. \tag{32}$$

Подставляя это выражение в (15) и сворачивая затем с  $\bar{g}_{ki}$ , получим:

$$\frac{dp_k}{ds} = -\bar{g}_{ki} \frac{\partial \bar{g}^{ij}}{\partial x^m} \dot{x}^m p_j - \bar{g}_{ki} \Gamma_{kl}^i \dot{x}^k \dot{x}^l = \frac{\partial \bar{g}_{ki}}{\partial x^m} \dot{x}^m \dot{x}^i - \bar{g}_{ki} \Gamma_{kl}^i \dot{x}^k \dot{x}^l. \tag{33}$$

Первое слагаемое в правой части может быть преобразовано с учетом симметрии по индексам  $m$  и  $i$ :

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \bar{g}_{ki}}{\partial x^m} \dot{x}^m \dot{x}^i &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \bar{g}_{ki}}{\partial x^m} + \frac{\partial \bar{g}_{km}}{\partial x^i} \right) \dot{x}^m \dot{x}^i = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \bar{g}_{ki}}{\partial x^m} + \frac{\partial \bar{g}_{mk}}{\partial x^i} - \frac{\partial \bar{g}_{mi}}{\partial x^k} \right) \dot{x}^m \dot{x}^i + \frac{1}{2} \frac{\partial \bar{g}_{mi}}{\partial x^k} \dot{x}^m \dot{x}^i = \\
 &= \bar{g}_{kl} \bar{\Gamma}_{mi}^l \dot{x}^m \dot{x}^i + \frac{1}{2} \frac{\partial \bar{g}_{mi}}{\partial x^k} \dot{x}^m \dot{x}^i,
 \end{aligned} \tag{34}$$

что позволяет записать (33) как

$$\frac{dp_k}{ds} = \frac{1}{2} \frac{\partial \bar{g}_{mi}}{\partial x^k} \dot{x}^m \dot{x}^i + \bar{g}_{kl} (\bar{\Gamma}_{mi}^l - \Gamma_{mi}^l) \dot{x}^m \dot{x}^i. \tag{35}$$

Имея в виду (17) и соотношение  $\bar{g}^{ij} \bar{g}_{jk} = \delta_k^i$ , нетрудно показать, что первое слагаемое равно  $-\partial H / \partial x^k$ . Используя явные выражения для акустической метрики, второе слагаемое может быть преобразовано следующим образом:

$$\begin{aligned}
 \bar{g}_{kl} (\bar{\Gamma}_{mi}^l - \Gamma_{mi}^l) \dot{x}^k \dot{x}^i &= \\
 &= \frac{1}{2} \left\{ \nabla_i \left[ \left( \frac{1}{n^2} - 1 \right) V_k V_m \right] + \nabla_m \left[ \left( \frac{1}{n^2} - 1 \right) V_k V_i \right] - \nabla_k \left[ \left( \frac{1}{n^2} - 1 \right) V_i V_m \right] \right\} \dot{x}^m \dot{x}^i = \\
 &= \frac{1}{2} \{ \nabla_i \bar{g}_{km} + \nabla_m \bar{g}_{ki} - \nabla_k \bar{g}_{mi} \} \dot{x}^m \dot{x}^i,
 \end{aligned} \tag{36}$$

где учтено, что метрический тензор  $g_{ij}$  ковариантно постоянен. Используя симметрию по немым индексам  $m$  и  $i$ , условие параллельного переноса касательного вектора  $\dot{x}^m \nabla_m \dot{x}^i = 0$ , а также соотношения  $\bar{g}_{ij} \dot{x}^i \dot{x}^j = 0$  и  $\bar{g}_{ij} \dot{x}^i = p_j$ , получим, что

$$\begin{aligned} \bar{g}_{ki} (\bar{\Gamma}_{kl}^i - \Gamma_{kl}^i) \dot{x}^k \dot{x}^l &= \frac{1}{2} \left\{ 2 \dot{x}^m \dot{x}^i \nabla_i \bar{g}_{km} - \dot{x}^m \dot{x}^i \nabla_k \bar{g}_{mi} \right\} = \\ &= \dot{x}^i \nabla_i p_k + \frac{1}{2} \bar{g}_{mi} \nabla_k (\dot{x}^m \dot{x}^i) = 2 \dot{x}^i \nabla_{[i} p_{k]} = 0, \end{aligned} \quad (37)$$

так как из-за антисимметризации ковариантные производные могут быть заменены частными, а импульсы не зависят от координат.

### Приложение 2

Докажем лемму (24).

Обозначим  $p_{k_1 \dots k_r} \frac{\partial H}{\partial p_i} \equiv T_{k_1 \dots k_r}^i$ . Поскольку ковариантная производная по Картану от произвольной скалярной функции аргумента  $\bar{g}^{ij} p_i p_j$  обращается в нуль, то

$$\begin{aligned} \int T_{k_1 \dots k_r}^i \bar{\nabla}_i f(x, p) \delta(2H) \Theta(p_k V^k) \frac{d^4 p}{\sqrt{-g}} &= \int \bar{\nabla}_i \left\{ T_{k_1 \dots k_r}^i f(x, p) \delta(2H) \Theta(p_k V^k) \right\} \frac{d^4 p}{\sqrt{-g}} = \\ \int \bar{\nabla}_i \left\{ T_{k_1 \dots k_r}^i f(x, p) \delta(2H) \Theta(p_k V^k) \right\} \frac{d^4 p}{\sqrt{-g}} &+ \int \bar{\Gamma}_{im}^l p_l \frac{\partial}{\partial p_m} \left\{ T_{k_1 \dots k_r}^i f(x, p) \delta(2H) \Theta(p_k V^k) \right\} \frac{d^4 p}{\sqrt{-g}}. \end{aligned} \quad (38)$$

В первом слагаемом вынесем производную:

$$\begin{aligned} \int \bar{\nabla}_i \left\{ T_{k_1 \dots k_r}^i f(x, p) \delta(2H) \Theta(p_k V^k) \right\} \frac{d^4 p}{\sqrt{-g}} &= \\ = \bar{\nabla}_i \int T_{k_1 \dots k_r}^i f(x, p) \delta(2H) \Theta(p_k V^k) \frac{d^4 p}{\sqrt{-g}} &+ \int T_{k_1 \dots k_r}^i f(x, p) \delta(2H) \Theta(p_k V^k) \frac{d^4 p}{\sqrt{-g}} \frac{\partial \sqrt{-g}}{\partial x^i}, \end{aligned} \quad (39)$$

а во втором — сформируем полную дивергенцию по 4-импульсу:

$$\begin{aligned} \int \bar{\Gamma}_{im}^l p_l \frac{\partial}{\partial p_m} \left\{ T_{k_1 \dots k_r}^i f(x, p) \delta(2H) \Theta(p_k V^k) \right\} \frac{d^4 p}{\sqrt{-g}} &= \\ = \bar{\Gamma}_{im}^l \int \frac{\partial}{\partial p_m} \left\{ p_l T_{k_1 \dots k_r}^i f(x, p) \delta(2H) \Theta(p_k V^k) \right\} \frac{d^4 p}{\sqrt{-g}} &- \bar{\Gamma}_{im}^m \int T_{k_1 \dots k_r}^i f(x, p) \delta(2H) \Theta(p_k V^k) \frac{d^4 p}{\sqrt{-g}}. \end{aligned} \quad (40)$$

Интеграл по всему пространству от полной дивергенции равен нулю, а

$$\bar{\Gamma}_{im}^m = \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial \sqrt{-g}}{\partial x^i} = \frac{\bar{g}^{km}}{2} \frac{\partial \bar{g}_{km}}{\partial x^i} = \frac{g^{km}}{2} \frac{\partial g_{km}}{\partial x^i} + \frac{n^2}{2} \frac{\partial}{\partial x^i} \frac{1}{n^2} = \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial \sqrt{-g}}{\partial x^i} + \frac{n^2}{2} \frac{\partial}{\partial x^i} \frac{1}{n^2}. \quad (41)$$

Подстановка соотношений (39)–(41) в (38) приводит к (24).

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Comer G.L. Quasi-normal modes of general relativistic superfluid neutron stars / G.L.Comer, D.Langlois, L.M.Lin // Phys. Rev. D — 1999. — V.60. — 104025.
2. Lindblom L. R-modes in superfluid neutron stars / L.Lindblom, G.Mendell // Phys. Rev. D — 2000. — V.61. — 104003.
3. Andersson N. Slowly rotating relativistic superfluid stars / N.Andersson, G.L.Comer // Class. Quant. Grav. — 2001. — V.18. — P.969-983.
4. Volovik G.E. Superfluid analogies of cosmological phenomena / G.E.Volovik // Physics Reports — 2001. — V.351. — P.195-231.
5. Fischer U.R. Thermal quasi-equilibrium states across Landau horizons in the effective gravity of superfluids / U.R.Fischer, G.E.Volovik // Int. J. Mod. Phys. D — 2001. — V.10. — P.57-72.

6. Barcelo C. Analog gravity from Bose-Einstein condensates / C.Barcelo, S.Liberati, M.Visser // *Class. Quant. Grav.* — 2001. — V.18. — P.1137-1148.
7. Carter B. Equivalence of convective and potential variational derivations of covariant superfluid dynamics / B.Carter, I.M.Khalatnikov // *Phys. Rev. D* — 1992. — V.45 — P.4536-4544.
8. Carter B. Momentum, vorticity, and helicity in covariant superfluid dynamics / B.Carter, I.M.Khalatnikov // *Ann. Phys. (N.Y.)* — 1992. — V.219 — P.243-265.
9. Синг Дж. Общая теория относительности / Дж. Синг. — М.: ИИЛ, 1963. — С.314-320.
10. Unruh W.G. Dumb holes and the effects of high frequencies on black hole evaporation / W.G. Unruh // *Phys. Rev. B* — 1995. — V.51, — P.2827-2841.
11. Minkowski H. Die Grundgleichungen für die electromagnetischen Vorgänge in Bewegten Körpern / H.Minkowski // *Gött Nachr.* — 1908. — S.53; *Math. Ann.* — 1910. — V.68. — P.472.
12. Abraham M. Theorie der Electricizität / M.Abraham. — Leipzig, 1914. — B.2. — S.298.
13. Lorentz H.A. Electromagnetic phenomena in a system moving with any velocity smaller than that of light / H.A.Lorentz // *Amst. Proc.* — 1904 — V.12. — P.986.
14. Poincare H. Sur la dynamique de l'electron / H.Poincare // *Compt. Rend. Acad. Sci., Paris.* — 1905. — V.140. — P.1504.
15. Einstein A. Zur Elektrodynamik bewegter Körper / A.Einstein // *Ann. Phys.* — 1905. — B.17. — S.891.
16. Паули В. Теория относительности / В.Паули. — М.: Наука, 1991. — С.152.
17. Nelson D.F. Momentum, pseudomomentum, and wave momentum: toward resolving the Minkowski-Abraham controversy / D.F.Nelson // *Phys. Rev. A.* — 1991. — V.44. — P.3985-3996.
18. Гинзбург В.Л. Теоретическая физика и астрофизика / В.Л.Гинзбург. — М.: Наука, 1987. — С.307-331.
19. Blount E.I. // *Bell Telephone Laboratories Technical Memorandum 38139-9* — 1971.
20. де Гроот С. Релятивистская кинетическая теория. Принципы и применения / С.де Гроот, В. ван Леувен, Х. ван Верт. — М.: Мир, 1983. — С.15-17.
21. Власов А.А. Статистическая функция распределения / А.А.Власов. — М.: Наука, 1966. — С.76-93.

**ENERGY-MOMENTUM TENSOR OF PHOTON GAS IN MEDIUM  
AND MINKOWSKI-ABRAHAM CONTROVERSY**

**V. A. Popov**

*A photon gas in a medium is studied. The kinetic equation for the gas is obtained and the form of the energy-momentum tensor is established. The energy-momentum conservation law is derived. The expressions obtained are analyzed using Minkowski-Abraham controversy, regarding the energy-momentum tensor of an electromagnetic field in a matter.*



УДК: 530.12

**МАКРОСКОПИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ ЭЙНШТЕЙНА  
И АНИЗОТРОПНАЯ ПЛОСКАЯ КОСМОЛОГИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ**

**А.В.Захаров, Р.К.Мухарьямов\***

*Данная работа посвящена макроскопическим уравнениям Эйнштейна. На их основе строятся несингулярные анизотропные космологические модели.*

Как известно, макроскопические уравнения Максвелла для сред могут быть получены из микроскопических уравнений Максвелла с помощью усреднения последних по ансамблям. Впервые эта задача была поставлена и решена Лоренцем [1-3].

Хотя изначально идея макроскопического описания была сформулирована в электродинамике, она необходима в общей теории относительности (ОТО), в частности в космологии. Впервые задача о построении макроскопических уравнений Эйнштейна была поставлена М.Ф.Широковым в [4].

\* © А. В. Захаров, Казанский госуниверситет (Россия); Р. К. Мухарьямов, Казанский госуниверситет (Россия), 2005;  
e-mail: [Ruslan.Muharlamov@ksu.ru](mailto:Ruslan.Muharlamov@ksu.ru)