КОМПЛЕКСНЫЙ АНАЛИЗ

УДК 517.53/.55

ОБОБЩЕНИЕ КРИТЕРИЯ КРОНЕКЕРА О РАЦИОНАЛЬНОСТИ НА СТЕПЕННЫЕ РЯДЫ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ И ЕГО ПРИМЕНЕНИЕ

К.В.Сафонов*

Получено обобщение критерия Кронекера о рациональности суммы степенного ряда, который связывает рациональность с обращением в нуль последовательности определителей Ганкеля. Полученное условие алгебраичности записывается в виде равенства нулю определителей и дает принципиальную возможность исследования свойств полной аналитической функции, росток которой задан степенным рядом. Данный результат применяется к исследованию алгебраичности функций многих переменных, в частности, коммутативных образов контекстно-свободных языков.

Пусть степенной ряд

$$a(z) = \sum_{k\geq 0} a_k z^k \tag{1}$$

сходится в окрестности нуля. Рассмотрим вопрос о том, как по коэффициентам ряда (1) установить алгебраичность его суммы.

Для случая, когда функция $a(z)$ рациональна, вопрос решается известным критерием Кронекера [1, с. 173]: функция $a\ (z)$ рациональна в том и только в том случае, когда при всех $j \geq j_0$, $m \geq m_0$ равны нулю определители Ганкеля:

$$H_j^{(m)} = \begin{vmatrix} a_j & a_{j+1} & \ldots & a_{j+m} \\ a_{j+1} & a_{j+2} & \ldots & a_{j+m+1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{j+m} & a_{j+m+1} & \ldots & a_{j+2m} \end{vmatrix}.$$

Более точно, критерий Кронекера связывает рациональность суммы ряда с обращением в нуль определителей $H_0^{(m)}$, что эквивалентно вышеприведенной формулировке. Таким образом, существует функция (определитель $H_j^{(m)}$), обращение в нуль которой равносильно рациональности суммы ряда.

Несмотря на то, что класс алгебраических функций всегда вызывал большой интерес, и известны [2] некоторые условия алгебраичности суммы степенного ряда, вопрос о существовании критерия алгебраичности, подобного критерию Кронекера, оставался открытым. Очевидно, что этот вопрос сводится к вопросу о том, как адекватно сформулировать условия на коэффициенты ряда (1) алгебраической функции $w=a(z)$, которые получаются после подстановки ряда в полиномиальное уравнение $S(w,z) = s_d(z)w^d + s_{d-1}(z)w^{d-1} + \ldots + s_0(z) = 0,$ определяющее эту алгебраическую функцию.

Сделаем следующие обозначения:

$$a_k^{(1)} = \sum_{j=0}^{k} a_j a_{k-j},\ a_k^{(i)} = \sum_{j=0}^{k} a_j a_{k-j}^{(i-1)},\ i = 2,3,\ \ldots,\ k = 0,1,\ \ldots,$$

тогда имеет место

Теорема 1. *Для того чтобы функция, заданная рядом (1), была алгебраической, необходимо и достаточно существование чисел* j_0, m_0*, таких, что при всех* $j \geq j_0$, $m \geq m_0$ *выполнены равенства* $H_j^{(m)}(d) = 0$*, где* $H_j^{(m)}(d)$ *– обобщенный определитель Ганкеля степени d, i-я строка которого есть*

$$(a_{j+i-1} \ldots a_{j+i+m-1} a_{j+i-1}^{(1)} \ldots a_{j+i+m-1}^{(1)} \ldots a_{j+i-1}^{(d-1)} \ldots a_{j+i+m-1}^{(d-1)}).$$

Доказательство. Степени всех многочленов $s_i(z)$ можно считать равными m_0 (дополняя степенями с нулевыми коэффициентами) и записать многочлены $s_i(z)$ в следующем виде:

$$s_1(x) = q_0 + q_1 z + \ldots + q_{m_0} z^{m_0},$$
$$s_j(z) = q_0^{(j-1)} + q_1^{(j-1)} z + \ldots + q_{m_0}^{(j-1)} z^{m_0},$$
$$j = 2,\ldots,d.$$

Заметим, что $a_k^{(j)}$ – коэффициенты степенного ряда функции $(a(z))^{j+1}$, тогда, подставляя ряды функций $a(z)$, $(a(z))^2$, …, $(a(z))^d$ в уравнение $S(w,z)$=0, получаем равенство:

$$(q_0 + q_1 z + \ldots + q_{m_0} z^{m_0}) \sum_{k\ge 0} a_k z^k + (q_0^{(1)} + q_1^{(1)} z + \ldots + q_{m_0}^{(1)} z^{m_0}) \sum_{k\ge 0} a_k^{(1)} z^K + \ldots$$
$$\ldots + (q_0 + q_1^{(d-1)} z + \ldots + q_{m_0}^{(d-1)} z^{m_0}) \sum_{k\ge 0} a_k^{(d-1)} z^k = -s_0(z).$$

Приравнивая к нулю коэффициенты при мономах z^j в левой части последнего равенства для всех достаточно больших j, получаем равенства

$$q_{m_0} a_j + q_{m_0-1} a_{j+1} + \ldots + q_0 a_{j+m_0} + q_{m_0}^{(1)} a_j^{(1)} + q_{m_0-1}^{(1)} a_{j+1}^{(1)} + \ldots + q_0^{(1)} a_{j+m_0}^{(1)} + \ldots$$
$$\ldots + q_{m_0}^{(d-1)} a_j^{(d-1)} + q_{m_0-1}^{(d-1)} a_{j+1}^{(d-1)} + \ldots + q_0^{(d-1)} a_{j+m_0}^{(d-1)} = 0,\ j \ge j_0, \tag{2}$$

которые рассматриваем как бесконечную систему линейных однородных алгебраических уравнений относительно неизвестных $q_{m_0},\ldots,q_0,\ldots,q_{m_0}^{(d-1)},\ldots,q_0^{(d-1)}$. Нетривиальная разрешимость этой системы, эквивалентная алгебраичности функции (1), равносильна также равенству нулю определителей $H_j^{(m_0)}(d)$ подсистем этой системы. Далее, алгебраичность функции (1) равносильна также нетривиальной разрешимости «расширенной» системы:

$$q_m a_j + q_{m-1} a_{j+1} + \ldots + q_0 a_{j+m} + q_m^{(1)} a_j^{(1)} + q_{m-1}^{(1)} a_{j+1}^{(1)} + \ldots + q_0^{(1)} a_{j+m}^{(1)} + \ldots$$
$$\ldots + q_m^{(d-1)} a_j^{(d-1)} + q_{m-1}^{(d-1)} a_{j+1}^{(d-1)} + \ldots + q_0^{(d-1)} a_{j+m}^{(d-1)} = 0,\ j \ge j_0, \tag{3}$$

где $m \ge m_0$, что также эквивалентно равенству нулю определителей $H_j^{(m)}(d)$. Теорема 1 доказана.

Теорема 1 обобщает критерий Кронекера о рациональности: если (1) – рациональная функция, то степень d многочлена $S(w,z)$ равна 1, и $H_j^{(m)}(d) = H_j^{(m)}(1) = H_j^{(m)}$, т.е. получается известный критерий Кронекера о рациональности суммы степенного ряда.

Теорема 1 дает метод для вычислительного распознавания свойств полной аналитической функции, представленной рядом (1). Действительно, во-первых, можно определить числа j_0, m_0, d, а значит, и порядок определителя $H_j^{(m)}(d)$, при которых он равен нулю для всех $j \ge j_0$. Во-вторых, составляется однородная система линейных уравнений (3) относительно коэффициентов многочленов $s_i(z)$. Общее решение этой системы восстанавливает многочлены $s_i(z)$, а значит, и многочлен $S(w,z)$, который позволяет определить все свойства функции $a(z)$. К числу таких свойств, например, относится наличие или отсутствие особых точек, в окрестности которых функция не ограничена, других голоморфных в нуле ветвей полной аналитической функции.

Пример. Рассмотрим функцию

$$a(z) = \frac{1}{\sqrt{1-4z}} = \sum_{k\ge 0} \binom{2k}{k} z^k.$$

Значения коэффициентов $a_k^{(1)} = \sum_{j=0}^{k} a_j a_{k-j} = \sum_{j=0}^{k} \binom{2j}{j}\binom{2(k-j)}{k-j} = 4^k$ можно получить, например, применяя метод комбинаторных сумм [3]. Очевидно, что при всех $j \ge 1$ равны нулю обобщенные определители Ганкеля:

$$\begin{vmatrix} a_j & a_{j+1} & a_j^{(1)} & a_{j+1}^{(1)} \\ a_{j+1} & a_{j+2} & a_{j+1}^{(1)} & a_{j+2}^{(1)} \\ a_{j+2} & a_{j+3} & a_{j+2}^{(1)} & a_{j+3}^{(1)} \\ a_{j+3} & a_{j+4} & a_{j+3}^{(1)} & a_{j+4}^{(1)} \end{vmatrix} = 0,$$

поскольку третий и четвертый столбцы этих определителей линейно зависимы.

Запишем систему уравнений (3), соответствующую данному определителю:

$$q_1 a_j + q_0 a_{j+1} + q_1^{(1)} 4^j + q_0^{(1)} 4^{j+1} = 0,$$
$$q_1 a_{j+1} + q_0 a_{j+2} + q_1^{(1)} 4^{j+1} + q_0^{(1)} 4^{j+2} = 0,$$
$$q_1 a_{j+2} + q_0 a_{j+3} + q_1^{(1)} 4^{j+2} + q_0^{(1)} 4^{j+3} = 0,$$
$$q_1 a_{j+3} + q_0 a_{j+4} + q_1^{(1)} 4^{j+3} + q_0^{(1)} 4^{j+4} = 0.$$

Решением системы является, например, набор чисел $q_1 = q_0 = 0$, $q_0^{(1)} = 1$, $q_1^{(1)} = -4$. Таким образом, получаем, что $s_2(z) = 1 - 4z$, $s_1(z) = 0$. Поскольку эти равенства выполнены при всех $j \geq 1$, то степень многочлена $s_0(z)$ равна нулю, т.е. $s_0(z)$=const. Наконец, учитывая

$$a(0) = \sqrt{\frac{-\mathrm{s}_0(0)}{s_2(0)}} = 1,$$

получаем: $s_0(z) = -1$. Итак, данная функция является алгебраической и удовлетворяет уравнению $(1-4z)w^2 - 1 = 0$, которое позволяет определить все свойства этой функции.

Полученная теорема дает принципиальную возможность исследовать алгебраические функции многих переменных: согласно алгебраическому варианту фундаментальной теоремы Гартогса алгебраичность функции, голоморфной в какой-либо области, эквивалентна алгебраичности по каждой переменной в отдельности при фиксированных значениях остальных переменных.

Вопрос об алгебраичности кратного степенного ряда возникает, в частности, в теории контекстно-свободных языков [5]. Контекстно-свободный язык представляет собой формальный степенной ряд от некоммутативных символов, который получается как итерационное символьное решение некоторой символьной системы полиномиальных уравнений, определяемой грамматикой данного языка. Принадлежность формального языка, т.е. формального степенного ряда

$$\sum_{j \geq 0} \langle r, u_j \rangle u_j,$$

где u_j - мономы данного формального языка (предложения) от некоммутативных символов $x_1,...,x_n$ (слов) данного языка, классу контекстно-свободных языков тесно связана с алгебраичностью коммутативного образа этого языка – голоморфной функцией, которая получается заменой символьных некоммутативных переменных комплексными переменными. В результате формальному ряду ставится в соответствие кратный степенной ряд

$$a(z_1,...,z_n) = \sum_{k_1,...,k_n \geq 0} a_{k_1...k_n} z_1^{k_1} ... z_n^{k_n},$$

коэффициенты которого равны $a_{k_1,...,k_n} = \sum\limits_{\substack{\#x_1(u_j)=k_1,... \\ ...,\#x_n(u_j)=k_n}} \langle r, u_j \rangle$, где $\# x_i(u_j)$ – число вхождений символа x_i в моном u_j. Перегруппировывая этот степенной ряд в ряд Гартогса по переменной z_n

$$a(z_1,...,z_n) = \sum_{k \geq 0} g_k(z') z_n^k,$$

где $z' = (z_1,...,z_{n-1})$, получаем возможность применить критерий алгебраичности по переменной z_n в виде тождественного равенства нулю обобщенных определителей Ганкеля, зависящих от z'. Для алгебраичности функции $a(z_1,...,z_n)$ теперь достаточно [4, с. 275] аналогичным образом проверить алгебраичность функций $g_k(z')$, зависящих от меньшего числа переменных.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бибербах Л. Аналитическое продолжение / Л.Бибербах – М.: Наука, 1967.
2. Сафонов К.В. Об условиях алгебраичности и рациональности суммы степенного ряда / К.В.Сафонов // Математич. заметки. – 1987. - Т.41. – Вып.3. – С.325-332.
3. Егорычев Г.П. Интегральное представление и вычисление комбинаторных сумм / Г.П. Егорычев. – Новосибирск: Наука, 1977.
4. Safonov K.V. On power series of algebraic and rational functions in Cn / K.V.Safonov // J. of Math. Anal. and Appl. – 2000. – V.243. – P.261-277.
5. Гинзбург С. Математическая теория контекстно-свободных языков / С.Гинзбург. – М.: Мир, 1970.

THE GENERALIZATION OF THE KRONECKER RATIONALITY CRITERION FOR POWER SERIES OF ALGEBRAIC FUNCTIONS AND ITS APPLICATION

K.V.Safonov

The generalization of the Kronecker criterion on rationality of the power series sum, which connects rationality with vanishing of Hankel's determinants, is obtained. The proved condition of algebraicity is written as an equality to zero of the determinants and gives a principal possibility to research the properties of the complete analytic function whose germ defined by the power series. That result is applied to the research of algebraicity of functions in several variables, in particular, commutative images of context-free languages.