

**О ТОЧНЫХ РЕШЕНИЯХ ОДНОЙ МОДЕЛИ ВЕТРОВОГО ДВИЖЕНИЯ  
ОДНОРОДНОЙ ЖИДКОСТИ С ПЕРЕМЕННЫМ КОЭФФИЦИЕНТОМ ВЕРТИКАЛЬНОГО  
ТУРБУЛЕНТНОГО ОБМЕНА (ТРЕХМЕРНЫЙ СЛУЧАЙ)**

**Л.А. Компаниец\*, Л.В. Гаврилова\*\***

*Рассмотрена трехмерная модель движения жидкости под действием ветра в замкнутом водоеме в приближении Буссинеска и гидростатики. Для этой модели в случае однородной жидкости найдено точное решение при ряде упрощающих предположений. Найденные решения применялись для тестирования численного алгоритма, по которому проводился ряд расчетов для модельного водоема.*

В численных расчетах ветрового движения жидкости часто используется трехмерная модель гидротермики замкнутого водоема в приближении Буссинеска и гидростатики [1]:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} - lv = \frac{\partial}{\partial z} \left( K_z \frac{\partial u}{\partial z} \right) - g \frac{\partial \zeta}{\partial x} - \frac{g}{\rho_0} \int_z^0 \frac{\partial \rho}{\partial x} dz, \quad (1)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} + lv = \frac{\partial}{\partial z} \left( K_z \frac{\partial v}{\partial z} \right) - g \frac{\partial \zeta}{\partial y} - \frac{g}{\rho_0} \int_z^0 \frac{\partial \rho}{\partial y} dz, \quad (2)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0, \quad (3)$$

$$\rho = \rho(T), \quad (4)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} + w \frac{\partial T}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z} \left( K_T \frac{\partial T}{\partial z} \right). \quad (5)$$

Здесь  $u, v, w$  – компоненты вектора скорости течения;  $l$  – параметр Кориолиса;  $K_z$  – коэффициент вертикального турбулентного обмена;  $g$  – ускорение свободного падения;  $\zeta$  – отклонение свободной поверхности от невозмущенного положения;  $\rho$  – плотность воды,  $\rho_0$  – средняя плотность воды;  $T$  – температура воды;  $K_T$  – коэффициент температуропроводности.

Система уравнений (1) – (5) дополнена соответствующими начальными условиями и граничными условиями на поверхности, дне и боковых стенках бассейна.

Сделаем ряд упрощающих предположений, позволяющих найти аналитическое решение для этой модели в случае однородной жидкости.

*Предположение 1.* Течение медленное, и нелинейными членами в уравнениях движения можно пренебречь.

*Предположение 2.* Движение жидкости стационарное.

*Предположение 3.* На дне для  $u$  и  $v$  ставится условие прилипания  $u = 0, v = 0$ .

*Предположение 4.* На боковой цилиндрической поверхности ставится условие непротекания: нормальная составляющая полного потока скорости равна нулю.

*Предположение 5.* Отклонение свободной поверхности от невозмущенного положения мало и влияние ветра можно рассматривать при  $z^0 = 0$ .

Тогда уравнения (1) – (3) переходят в систему уравнений

$$g \frac{\partial \zeta}{\partial x} - lv = \frac{\partial}{\partial z} \left( K_z \frac{\partial u}{\partial z} \right), \quad (6)$$

$$g \frac{\partial \zeta}{\partial x} + lv = \frac{\partial}{\partial z} \left( K_z \frac{\partial v}{\partial z} \right), \quad (7)$$

$$\int_{-H}^0 (u_x + v_y) dz = 0 \quad (8)$$

с граничными условиями при  $z = 0$ :

\* © Л.А. Компаниец, 2004; Институт вычислительного моделирования (Россия); E-mail: kla@icm.krasn.ru

\*\* © Л.В. Гаврилова, 2004; Красноярская государственная архитектурно-строительная академия (Россия); E-mail: lvg@front.ru

$$\begin{aligned} K_z \frac{\partial u}{\partial z} \Big|_{z=0} &= \beta_1(x, y), & \beta_1(x, y) &= \frac{\tau_x^w(x, y)}{\rho_0}; \\ K_z \frac{\partial v}{\partial z} \Big|_{z=0} &= \beta_2(x, y), & \beta_2(x, y) &= \frac{\tau_y^w(x, y)}{\rho_0} \end{aligned} \quad (9)$$

и на дне, при  $z = -H(x, y)$ :

$$u|_{z=-H} = 0, \quad v|_{z=-H} = 0, \quad w|_{z=-H} = 0. \quad (10)$$

Здесь  $\tau_x^w, \tau_y^w$  – составляющие вектора напряжения трения ветра на поверхности [2, 3].

В этом случае были получены аналитические решения при  $K_z = const$  [2] и при  $K_z = e^{kz}$  [3].

Найдем решение для произвольного коэффициента турбулентного обмена  $K_z(z) > 0$ . Для этого сделаем еще одно предположение.

*Предположение 6.* Влиянием сил Кориолиса можно пренебречь ( $l = 0$ ).

Проинтегрировав уравнения (6), (7) по  $z$  дважды, получим:

$$\begin{aligned} u &= g \frac{\partial \zeta}{\partial x} \int_{-H}^z \frac{\xi}{K_z(\xi)} d\xi + \psi_1(x, y) \int_{-H}^z \frac{1}{K_z(\xi)} d\xi + \chi_1(x, y), \\ v &= g \frac{\partial \zeta}{\partial y} \int_{-H}^z \frac{\xi}{K_z(\xi)} d\xi + \psi_2(x, y) \int_{-H}^z \frac{1}{K_z(\xi)} d\xi + \chi_2(x, y). \end{aligned} \quad (11)$$

Из граничных условий для  $u, v$  на поверхности и на дне находим функции

$$\psi_1 = \frac{\tau_x^w(x, y)}{\rho_0}, \quad \chi_1 = 0, \quad \psi_2 = \frac{\tau_y^w(x, y)}{\rho_0}, \quad \chi_2 = 0.$$

В результате получим соотношения

$$\begin{aligned} u &= g \frac{\partial \zeta}{\partial x} \int_{-H}^z \frac{\xi}{K_z(\xi)} d\xi + \frac{\tau_x^w(x, y)}{\rho_0} \int_{-H}^z \frac{1}{K_z(\xi)} d\xi, \\ v &= g \frac{\partial \zeta}{\partial y} \int_{-H}^z \frac{\xi}{K_z(\xi)} d\xi + \frac{\tau_y^w(x, y)}{\rho_0} \int_{-H}^z \frac{1}{K_z(\xi)} d\xi. \end{aligned} \quad (12)$$

Введем обозначения для полных потоков:

$$M_1 = \int_{-H}^0 u dz, \quad M_2 = \int_{-H}^0 v dz.$$

Из уравнения неразрывности следует

$$(M_1)_x + (M_2)_y = 0,$$

что позволяет ввести функцию тока

$$M_1 = \psi_y = g \frac{\partial \zeta}{\partial x} \int_{-H}^0 \left( \int_{-H}^z \frac{\xi}{K_z(\xi)} d\xi \right) dz + \frac{\tau_x^w}{\rho_0} \int_{-H}^0 \left( \int_{-H}^z \frac{1}{K_z(\xi)} d\xi \right) dz, \quad (13)$$

$$M_2 = -\psi_x = g \frac{\partial \zeta}{\partial y} \int_{-H}^0 \left( \int_{-H}^z \frac{\xi}{K_z(\xi)} d\xi \right) dz + \frac{\tau_y^w}{\rho_0} \int_{-H}^0 \left( \int_{-H}^z \frac{1}{K_z(\xi)} d\xi \right) dz. \quad (14)$$

Введем обозначения:

$$\int_{-H}^0 dz \int_{-H}^z \frac{\xi}{K_z(\xi)} d\xi = Q(x, y),$$

$$\frac{\tau_x^w}{\rho_0} \int_{-H}^0 dz \int_{-H}^z \frac{1}{K_z(\xi)} d\xi = T_1(x, y), \quad \frac{\tau_y^w}{\rho_0} \int_{-H}^0 dz \int_{-H}^z \frac{1}{K_z(\xi)} d\xi = T_2(x, y).$$

Тогда  $\psi_y = g \frac{\partial \zeta}{\partial x} Q(x, y) + T_1(x, y)$ ,  $-\psi_x = g \frac{\partial \zeta}{\partial y} Q(x, y) + T_2(x, y)$  и для функции тока  $\psi$  имеем уравнение

$$\psi_{xx} + \psi_{yy} = \frac{\psi_y - T_1}{Q} \cdot Q_y + (T_1)_y - \frac{-\psi_x - T_2}{Q} \cdot Q_x - (T_2)_x.$$

Если  $H = const$ , то  $Q_x = 0$ ,  $Q_y = 0$ , и

$$\psi_{xx} + \psi_{yy} = (T_1)_y - (T_2)_x$$

или

$$\psi_{xx} + \psi_{yy} = \left( \left( \frac{\tau_x^w(x, y)}{\rho_0} \right)_y - \left( \frac{\tau_y^w(x, y)}{\rho_0} \right)_x \right) \cdot \int_{-H}^0 \left( \int_{-H}^z \frac{1}{K_z(\xi)} d\xi \right) dz. \quad (15)$$

Решая это уравнение в области, ограниченной береговой линией, на которой ставится условие  $\psi|_{\Gamma} = 0$ , находим функцию тока. После того, как нашли функцию  $\psi$ , из уравнений (13), (14) находим значения  $\partial \zeta / \partial x$ ,  $\partial \zeta / \partial y$ , затем из уравнений (12) находим значения скоростей в зависимости от глубины, из уравнения (3) – значение  $w$ .

Аналогичное решение для случая двумерного в вертикальной плоскости течения найдено в работе [4].

Рассмотрим частный случай, когда движение жидкости инициируется в круговом цилиндре радиуса  $R$  под действием напряжения ветра, задаваемого формулой  $\tau_x^w(y)/\rho_0 = -y$ ,  $\tau_y^w(x)/\rho_0 = x$ ,  $K_z = const$ .

Тогда

$$\left( \tau_x^w / \rho_0 \right)_y - \left( \tau_y^w / \rho_0 \right)_x = -2, \quad \int_{-H}^0 \left( \int_{-H}^z \frac{1}{K_z(\xi)} d\xi \right) dz = \frac{1}{K_z} \cdot \frac{H^2}{2},$$

и уравнение (15) превращается в уравнение

$$\psi_{xx} + \psi_{yy} = \frac{1}{K_z} \cdot \frac{H^2}{2} (-2) = -\frac{H^2}{K_z}.$$

Для функции тока ставим в круге задачу

$$\psi_{xx} + \psi_{yy} = -\frac{H^2}{K_z}, \quad \psi|_{x^2+y^2=R^2} = 0,$$

и тогда  $\psi = -\frac{1}{4} \frac{H^2}{K_z} (x^2 + y^2 - R^2)$ .

В этом случае возвышение свободной поверхности находим по формулам (13), (14) и  $\partial \zeta / \partial x = 0$ ,  $\partial \zeta / \partial y = 0$ .

Теперь по формулам (12) восстанавливаем распределение скорости по глубине:

$$u = \frac{\tau_x^w(y)}{\rho_0} \frac{(z+H)}{K_z}, \quad (16)$$

$$v = \frac{\tau_y^w(x)}{\rho_0} \frac{(z+H)}{K_z}.$$

Это означает, что жидкость в цилиндре под действием такого напряжения движется послойно, скорость движения линейно замедляется ко дну и на дне становится нулевой.

Получить общее решение системы уравнений (6) – (9) при условии проскальзывания без трения на дне  $K_z \frac{\partial u}{\partial z} \Big|_{z=-H} = 0, K_z \frac{\partial v}{\partial z} \Big|_{z=-H} = 0$  в общем случае не удастся, но для задачи о движении жидкости в круговом цилиндре функции

$$u = \frac{\tau_x^w(x, y)}{\rho_0} \frac{(z^2/(2H) + z + 1/3 H)}{K_z},$$

$$v = \frac{\tau_y^w(x, y)}{\rho_0} \frac{(z^2/(2H) + z + 1/3 H)}{K_z} \tag{17}$$

удовлетворяют соотношениям (6) – (9).

Найденное решение было применено для тестирования численного алгоритма в трехмерном случае. В уравнениях (1) – (5) была сделана замена переменных, спрямляющая дно:

$$\hat{z} = \frac{z + H(x, y)}{H(x, y)}, \quad \hat{x} = x, \quad \hat{y} = y.$$

Используемый численный алгоритм аналогичен численному алгоритму, рассмотренному в работе [1], то есть для аппроксимации уравнений движения применяли схему стабилизирующей поправки, для уравнения неразрывности – схему Эйлера.

Численный алгоритм проверяли на точном решении (16) в частном случае, когда бассейн представляет собой круговой цилиндр радиуса 450 м, дно ровное ( $H = const = 10$  м). Ветер на поверхности задавали формулой  $\beta_1(x, y) = -\alpha \cdot y, \beta_2(x, y) = \alpha \cdot x$ , на дне ставилось условие прилипания. Бралась сетка  $\Delta x = \Delta y = 100$  м,  $\Delta z = 0.5$  м. По направлениям  $x$  и  $y$  брали по 12 расчетных точек, по  $z$  – 21 точку.

На рис. 1 представлено распределение скорости  $u$  по глубине в двух точках бассейна. Пунктирной линией обозначено решение, полученное по разностной схеме на момент времени, когда движение жидкости становится практически стационарным, прямой линией – аналитическое решение, найденное по формуле (16). Как видно из рис. 1, решения, полученные обоими способами, отличаются незначительно.

В случае движения неоднородной жидкости в цилиндре для слабой (рис. 2) и сильной (рис. 3) стратификации получаем линейное распределение скорости по глубине (рис. 4).

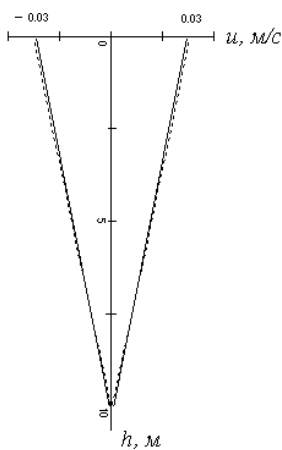


Рис. 1

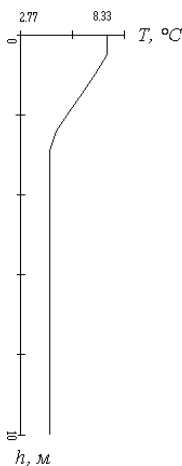


Рис. 2. Начальное распределение температуры (слабая стратификация)

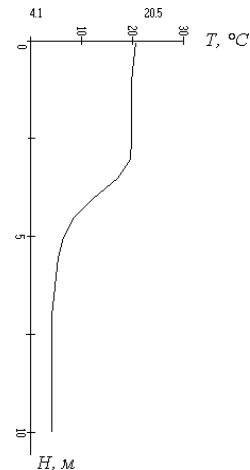


Рис. 3. Начальное распределение температуры (сильная стратификация)

Протестированный на точном решении алгоритм применяли для расчета ветровых течений в озере, батиметрия которого представлена на рис. 5. Здесь глубина уменьшается слева направо по линейному закону.

Расчеты проводили при следующих значениях параметров: а) ветер 7 м/с, направлен под углом 45° к оси  $Ox, K_z = const = 2 \cdot 10^{-3} \text{ м}^2/\text{с}$ ; б) ветер 15 м/с, направлен под углом 45° к оси  $Ox, K_z = const = 8 \cdot 10^{-3} \text{ м}^2/\text{с}$ . Глубина озера 21 м. Начальное распределение температуры представлено на рис. 2, 3. Результаты выведены через двое суток после начала ветрового воздействия на покоящуюся жидкость.

Рис. 6 – 13 демонстрируют влияние силы ветра и стратификации на картину течения в замкнутом водоеме.

Рис. 6 – 9 соответствуют ветру 7 м/с, а рис. 10 – 13 соответствуют ветру 15 м/с. Анализ рис. 6 – 9 показывает, что направление течения на поверхности в основном совпадает с направлением ветра. На глубине 10,5 м в случае слабой стратификации жидкость движется в противоположном ветру направлении, а в случае сильно стратифицированной жидкости на глубине 10,5 м образуется циркуляционное течение в горизонтальной плоскости. При ветре 15 м/с направление течения на поверхности совпадает с направлением ветра, на глубине 10,5 м формируется возвратное течение как в случае слабо стратифицированной жидкости, так и в случае сильной стратификации (рис. 10 – 13).

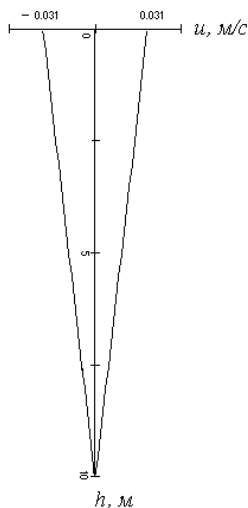


Рис. 4

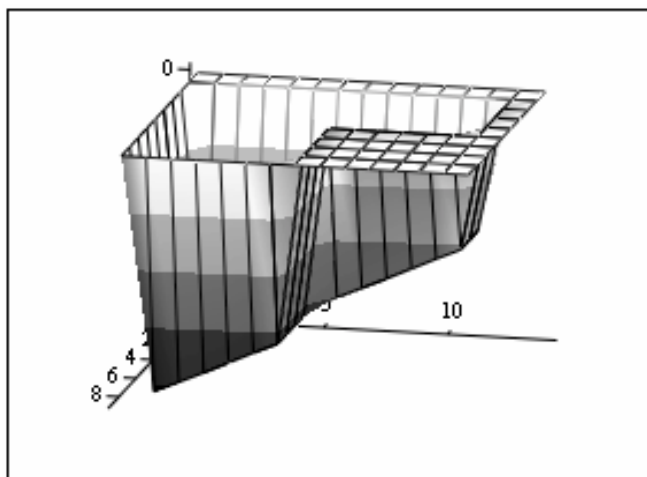


Рис. 5. Батиметрия модельного озера

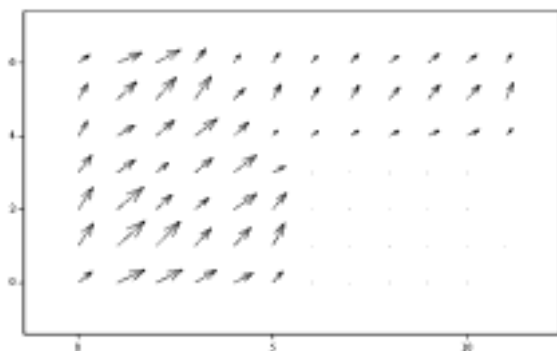


Рис. 6. Картина течения на поверхности водоема, ветер 7 м/с, слабая стратификация

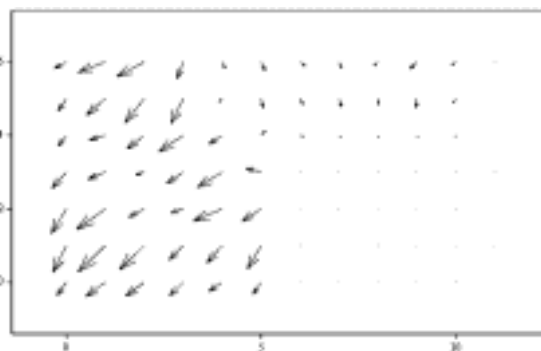


Рис. 7. Картина течения на глубине 10,5 м, ветер 7 м/с, слабая стратификация

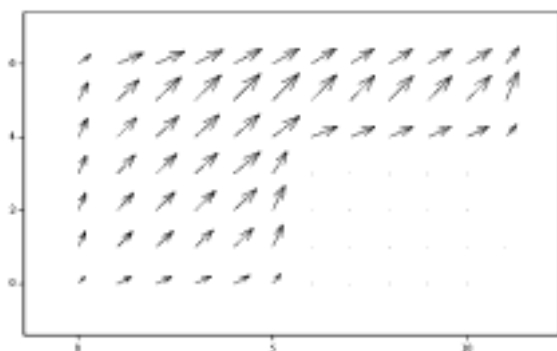


Рис. 8. Картина течения на поверхности водоема, ветер 7 м/с, сильная стратификация

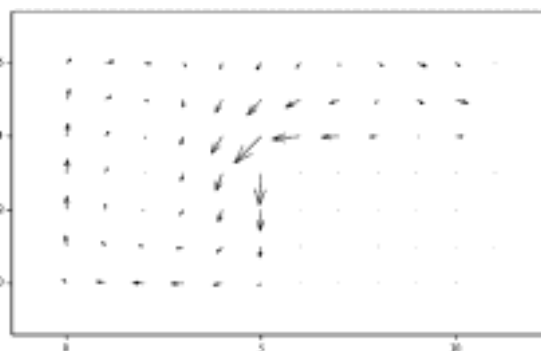


Рис. 9. Картина течения на глубине 10,5 м, ветер 7 м/с, сильная стратификация

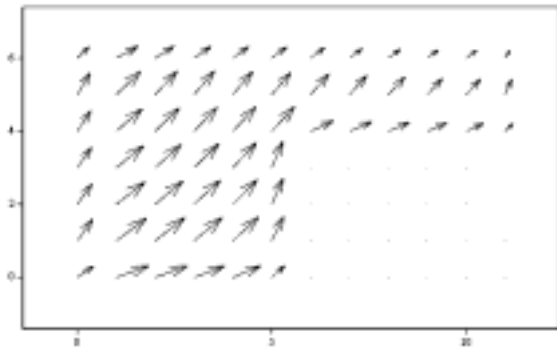


Рис. 10. Картина течения на поверхности водоема, ветер 15 м/с, слабая стратификация

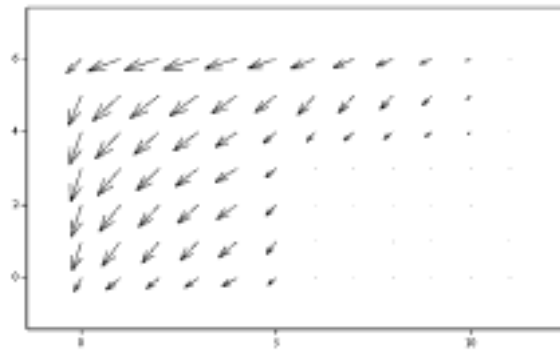


Рис. 11. Картина течения на глубине 10,5 м, ветер 15 м/с, слабая стратификация

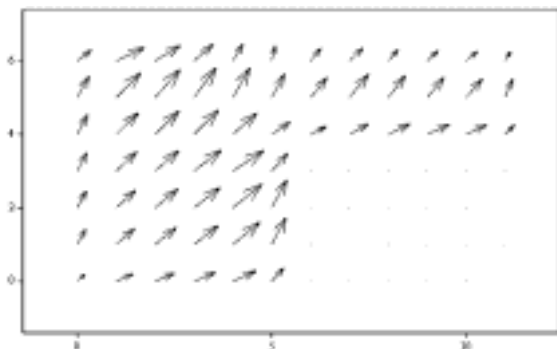


Рис. 12. Картина течения на поверхности водоема, ветер 15 м/с, сильная стратификация

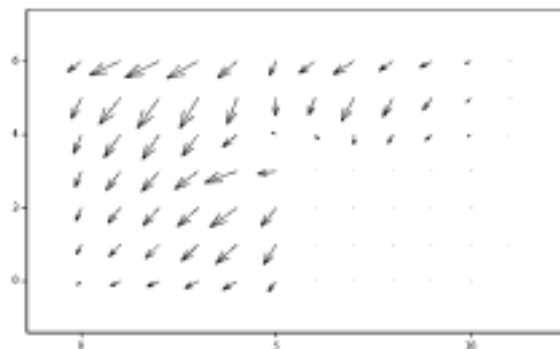


Рис. 13. Картина течения на глубине 10,5 м, ветер 15 м/с, сильная стратификация

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Квон В.И. Гидротермический расчет водоемов-охладителей / В.И. Квон // Известия АН СССР. Энергетика и транспорт. - 1979. - № 5. - С. 129-137.
2. Welander P. Wind action on a shallow sea: some generalizations of Ekman's theory / P. Welander // Tellus. - 1957. - Vol. 9. - P. 45-52.
3. Witten F.J. Steady wind-driven currents in a large lake with depth-dependent eddy viscosity / F.J.Witten, J.Thomas // J. Phys. Oceanogr. - 1976. - Vol. 6. - P. 85-92.
4. Компаниец Л.А. Аналитическое решение одной модели ветрового движения жидкости / Л.А.Компаниец, Т.В.Якубайлик // Вычислительные технологии. - 2003. - Т. 8. - № 5. - С. 78-83.

#### ON EXACT SOLUTION OF A ONE MODEL OF HOMOGENEOUS FLUIDS MOTION WITH VARIABLE COEFFICIENT OF VERTICAL TURBULENT EXCHANGE (3D CASE)

L.A. Kompaniets, L.V. Gavrilova

*The three-dimensional model of the hydro-thermodynamics of a closed water body in Boussinesq's approximation and in the approximation of hydrostatics is considered. Exact solution of the model in case of homogeneous fluid is obtained under a number of simplifying assumptions. The obtained solutions were used for testing of numerical algorithm.*