УДК 517.956

ИНВАРИАНТЫ ХАРАКТЕРИСТИК[1]

О.В. Капцов*, А.В. Заблуда**

В работе рассматриваются инварианты характеристик систем уравнений с частными производными первого порядка. Доказывается, что если функция – инвариант некоторого векторного поля, то она является инвариантом векторного поля, отвечающего характеристикам системы. Вычислены инварианты уравнений газовой динамики. Найдена бесконечная последовательность инвариантов уравнений магнитной гидродинамики. С помощью инвариантов получены точные этих уравнений.

В 1870 году Дарбу [1] был предложен метод интегрирования уравнений в частных производных. Этот метод обобщал известный подход Монжа и Ампера, основанный на поиске промежуточных интегралов [2]. Метод Дарбу нашел основные приложения при интегрировании уравнения второго порядка [3]. В данной работе описывается обобщение метода Дарбу на системы уравнений с частными производными [4].

Рассмотрим эволюционную систему дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка

$$u_t + F\left(t, x, u, u_{x_1}, \ldots, u_{x_n}\right) = 0\,, \tag{1}$$

где $x = \left(x_1, \ldots, x_n\right)$, $u = \left(u^1, \ldots, u^m\right)$, $u_{x_i} = \left(u^1_{x_i}, \ldots, u^m_{x_i}\right)$, $F = \left(F^1, \ldots, F^m\right)$.

---

[1] При поддержке РФФИ (коды проектов 04-01-00130, 04-01-00290).

* © О.В. Капцов, 2004; ИВМ СО РАН (Россия); E-mail: kaptsov@icm.krasn.ru

** © А.В. Заблуда, 2004.

Оператор дифференцирования вдоль векторного поля $v=(1,\lambda_1,\ldots,\lambda_n)$ задается формулой

$$L_v = D_t + \lambda_1 D_{x_1} + \ldots + \lambda_n D_{x_n},$$

где D_t и D_{x_i} – полные производные по t и x_i, λ_i – функции от $t, x, u, u_{x_1}, \ldots, u_{x_n}$. В работе [4] было введено нижеследующее понятие инварианта векторного поля для системы уравнений в частных производных.

Определение. Функция $I(t,x,u,u_1,\ldots,u_k)$, где u_j означает набор из частных производных порядка j от функций u^1, …, um, называется инвариантом векторного поля $v=(1,\lambda_1,\ldots,\lambda_m)$ для системы (1), если

$$L_v I\big|_{[S]} = 0.$$

Здесь [S] означает систему (1) и ее дифференциальные следствия.

Теорема. Если функция $I(t,x,u,u_1,\ldots,u_k)$, где $k \geq 1$, является инвариантом некоторого векторного поля $v=(1,\lambda_1,\ldots,\lambda_n)$ для системы (1), то I удовлетворяет уравнению характеристик

$$\det\left(D_t I + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial(F)}{\partial\left(u_{x_i}\right)} D_{x_i} I \right)\Bigg|_{[S]} = 0. \tag{2}$$

Доказательство. Поскольку I служит решением уравнения

$$D_t I + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i D_{x_i} I \Bigg|_{[S]} = 0, \tag{3}$$

то коэффициенты, стоящие при производных порядка k + 1 в левой части (3), должны обращаться в ноль. Чтобы найти эти коэффициенты, выпишем выражения $D_{x_i} I$ с точностью до производных порядка k:

$$D_{x_1} I \approx \sum_{j=1}^{m} \sum_{|\alpha|=k} u^j_{\alpha+1_1} I_{u^j_\alpha}, \ldots, D_{x_n} I \approx \sum_{j=1}^{m} \sum_{|\alpha|=k} u^j_{\alpha+1_n} I_{u^j_\alpha}.$$

Здесь u^j_α обозначает производную $\dfrac{\partial^{|\alpha|} u^j}{\partial x_1^{\alpha_1} \ldots \partial x_n^{\alpha_n}}$ порядка $k = |\alpha| = \alpha_1 + \ldots + \alpha_n$, $u^j_{\alpha+1_i}$ – производную $\dfrac{\partial^{|\alpha|+1} u^j}{\partial x_1^{\alpha_1} \ldots \partial x_i^{\alpha_i+1} \ldots \partial x_n^{\alpha_n}}$, символ $\approx$ означает, что разность между левой и правой частями не содержит производных порядка k + 1. Следовательно, сумма

$$\lambda_1 D_{x_1} I + \ldots + \lambda_n D_{x_n} I,$$

с точностью до производных порядка k, равна

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \sum_{j=1}^{m} \sum_{|\alpha|=k} u^j_{\alpha+1_i} I_{u^j_\alpha}.$$

С другой стороны, имеем

$$D_t I \approx -\sum_{j=1}^{m} \sum_{|\alpha|=k} D^\alpha\left(F^j\right) I_{u^j_\alpha} \approx -\sum_{j=1}^{m} \sum_{|\alpha|=k} \left(\sum_{i=1}^{n} \sum_{s=1}^{m} u^s_{\alpha+1_i} F^j_{u^s_{x_i}} \right) I_{u^j_\alpha}.$$

Значит, справедливы следующие соотношения:

$$D_t I + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i D_{x_i} I \approx -\sum_{j=1}^{m} \sum_{|\alpha|=k} \left[\sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{s=1}^{m} u^s_{\alpha+1_i} F^j_{u^s_{x_i}} - \lambda_i u^j_{\alpha+1_i} \right) \right] I_{u^j_\alpha} = 0.$$

Последнее соотношение удобно представить в матричной форме

$$\sum_{j=1}^{m} \sum_{|\alpha|=k} u_{\alpha+1_i} A^{x_i} I_{u_\alpha} = 0, \tag{4}$$

где $u_\alpha = \left(u_\alpha^1, \ldots, u_\alpha^m\right)$, $I_{u_\alpha} = \left(I_{u_\alpha^1}, \ldots, I_{u_\alpha^m}\right)$, $A^{x_i} = \dfrac{\partial(F)}{\partial\left(u_{x_i}\right)} - \lambda_i E$, E – единичная матрица.

Нам надо доказать, что I удовлетворяет уравнению (2), которое равносильно следующему:

$$\det\left(\sum_{i=1}^{n} A^{x_i} D_{x_i} I\right) = 0 \cdot \tag{5}$$

С этой целью покажем, что линейная однородная система

$$\left(\sum_{i=1}^{n} A^{x_i} D_{x_i} I\right) r = 0 \tag{6}$$

имеет нетривиальное решение r. Это решение представляется в явном виде:

$$r = \sum_{|\alpha|=k} (DI)^\alpha I_{u_\alpha}, \tag{7}$$

где $(DI)^\alpha = \left(D_{x_1} I\right)^{\alpha_1} \ldots \left(D_{x_n} I\right)^{\alpha_n}$. Проверим, что это действительно решение. Подставив (7) в (6), имеем

$$\left(\sum_{i=1}^{n} A^{x_i} D_{x_i} I\right)\left(\sum_{|\alpha|=k} (DI)^\alpha I_{u_\alpha}\right) = \sum_{j=1}^{m} \sum_{|\alpha|=k} A^{x_i} (DI)^{\alpha+1_i} I_{u_\alpha} \cdot \tag{8}$$

Выражения, стоящие при $u_{\alpha+1_i}$ в (4), совпадают с выражениями, стоящими в (8) при $(DI)^{\alpha+1_i}$. Поскольку левая часть в (4) равна нулю, то и (8) тоже есть ноль. Значит, справедлива формула (5). Следовательно, I – инвариант. □

Хорошо известные инварианты для трехмерных нестационарных уравнений газовой динамики – энтропия s и инвариант Эртеля

$$\frac{(\nabla s, \operatorname{rot} \mathbf{u})}{\rho},$$

где u = (u, v, w) – вектор скорости, ρ – плотность.

Рассмотрим уравнения одномерной газовой динамики:

$$\begin{aligned} &u_t + u u_x + p_x / \rho = 0, \\ &\rho_t + (\rho u)_x = 0, \\ &p_t + u p_x + \rho c^2 u_x = 0, \end{aligned} \tag{9}$$

где u, ρ, p – скорость, плотность и давление, а c(ρ, p) – скорость звука. Можно показать, что инварианты нулевого порядка I(t, x, ρ, p, u), соответствующие дифференцированиям вдоль характеристик $D_t + (u \pm c)D_x$, существуют только тогда, когда c = g(p)/ρ, где g – произвольная функция. Эти инварианты имеют вид

$$I_{1,2} = u \pm \int \frac{dp}{g(p)}.$$

Используя инвариант $I_1 = u - \int \frac{dp}{g(p)}$, можно систему уравнений (9) свести к двум уравнениям. Действительно, положим $I_1 = 0$, получим

$$u = \int \frac{dp}{g(p)} \cdot$$

Вместо функции g введем новую $F = \int \frac{dp}{g(p)}$. Тогда скорость звука выражается формулой

$$c = \frac{1}{F'\rho},$$

а система (9) сводится к двум уравнениям:

$$\rho_t + (F\rho)_x = 0, \quad p_t + F p_x + \frac{p_x}{F'\rho} = 0 \cdot$$

Как показано в [4], инварианты первого порядка, соответствующие векторным полям (1, u ± c), существуют, только когда функция g равна $(a + bp)^{2/3}$, где a, b ∈ R. Инварианты задаются формулами

$$J = \frac{\rho\left(a+bp\right)^{1/3}}{u_x\left(a+bp\right)^{2/3} \pm p_x} - \frac{bt}{3}.$$

Применение этих инвариантов к интегрированию уравнений газовой динамики (9) имеется в [4].

Можно показать, что инварианты второго порядка, отвечающие функциям $g = p^2$ и $g = p^{4/5}$, имеют вид

$$J_1 = \frac{Gp^3\left(\rho u_x G \pm G_x\right)}{\rho},$$

где $G = \dfrac{\rho}{p^2 u_x \pm p_x}$.

$$J_2 = \frac{3}{5}t + \frac{p^{1/5}\left(5\rho p p_{xx} \pm 5p^{9/5}u_{xx} - 5p\rho_x p_x \mp 5p^{9/5}\rho_x - p^{8/5}\rho u_x^2 - 3\rho p_x^2\right)}{\left(p^{4/5}u_x \pm p_x\right)^3}.$$

Рассмотрим теперь уравнения трехмерной магнитной газовой динамики:

$$\begin{aligned}
&\rho_t + \operatorname{div}\rho\mathbf{u} = 0,\\
&\mathbf{u}_t + (\mathbf{u}\cdot\nabla)\mathbf{u} = -\frac{\nabla p}{\rho} - \frac{\mathbf{B}\cdot\operatorname{rot}\mathbf{B}}{4\pi\rho},\\
&s_t + (\mathbf{u}\cdot\nabla)s = 0,\\
&\mathbf{B}_t = \operatorname{rot}(\mathbf{u}\cdot\mathbf{B}),
\end{aligned} \tag{10}$$

где $B = (B_1, B_2, B_3)$, div B = 0.

Эта система вдоль векторного поля $D_t + uD_x + vD_y + wD_z$ имеет очевидный инвариант $I_0 = s$. Можно проверить, что уравнения (10) имеют бесконечное число инвариантов, которые задаются рекуррентной формулой

$$I_{n+1} = \frac{B_1 D_x I_n + B_2 D_y I_n + B_3 D_z I_n}{\rho}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots .$$

Одномерные уравнения магнитной газовой динамики при B1 = 0, B2 ≠ 0, B3 ≠ 0 обладают следующими инвариантами (вдоль векторного поля $D_t + uD_x$):

$$I_1 = s,\ U(t,x),\ I_3 = w,\ I_4 = \frac{B_2}{\rho},\ I_5 = \frac{B_3}{\rho},\ I_5 = \frac{s_x}{\rho}.$$

Предположим, что каждый из инвариантов I2, I3, … I6 является функцией от I1, получим следующие представления:

$$v = V(s),\ w = W(s),\ \rho = s_x\Pi(s),\ B_2 = s_x\Phi(s),\ B_3 = s_x F(s).$$

Кроме того, $u = -s_t/s_x$. Если подставить полученное представление в систему (10), то все уравнения удовлетворятся тождественно, кроме одного. Это уравнение будет иметь вид

$$\begin{aligned}
&-4\pi s_x^2\Pi(s)s_{tt} + 8\pi s_t s_x\Pi(s)s_{tx} +\\
&+\left(4\pi s_x^2\Pi(s)p'_\rho + s_x^3F(s)^2 - 4\pi s_t^2\Pi(s) + s_x^3\Phi(s)^2\right)s_{xx} +\\
&+4\pi s_x^3 p'_s + 4\pi s_x^4 p'_s\Pi(s) + s_x^5\Phi(s)\Phi'(s) + s_x^5F(s)F'(s) = 0.
\end{aligned} \tag{11}$$

Давление зависит от ρ и s. Предположим, что выражение для давления имеет следующий вид:

$$p = \rho^2 A(s),$$

где

$$A(s) = -\frac{\Phi(s)^2 + F(s)^2}{8\pi\Pi(s)^2}.$$

Тогда уравнение (11) эквивалентно такому:

$$s_x^2 s_{tt} - 2 s_t s_x s_{tx} + s_t^2 s_{xx} = 0. \tag{12}$$

Последнее уравнение обладает тремя первыми интегралами [2]: s, s_t/s_x, $(x s_x + t s_t)/s_x$. С помощью этих интегралов в [2] построено решение уравнения (12) в неявной форме:

$$t\phi(s) + x\psi(s) = c,$$

где c ∈ R, ϕ, ψ – произвольные функции.

В заключение отметим, что двумерные нестационарные уравнения МГД допускают такие последовательности инвариантов:

$$I_1 = s, \ \dots, \ I_{n+1} = \frac{1}{\rho}\left(B_1 D_x I_n + B_2 D_y I_n\right), \qquad n = 1, 2, \dots,$$

$$J_2 = \frac{1}{\rho}\left(s_y D_x I_2 - s_x D_y I_2\right), \ \dots, \ J_{k+1} = \frac{1}{\rho}\left(s_y D_x J_k - s_x D_y J_k\right), \quad k = 2, 3, \dots .$$

Это утверждение вытекает из того, что оператор дифференцирования вдоль характеристики

$$D_t + u D_x + v D_y$$

коммутирует с операторами

$$L_1 = \frac{1}{\rho}\left(B_1 D_x + B_2 D_y\right), \quad L_2 = \frac{1}{\rho}\left(s_y D_x - s_x D_y\right)$$

на решениях уравнений магнитной гидродинамики.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Darboux G. Sur la theorie des equations aux derivees partielles. C.R. 1870, LXX, 4, 746-749.
2. Гурса Э. Курс математического анализа. Ч.1 / Э. Гурса. – М.: ГТТИ, 1933.
3. Goursat E. Lecons sur l'integration des equations aux derivees partielles du second order a deux variables independantes. Paris: Librairie scientifique A.Hermann. T. II. 1898.
4. Капцов О.В. Системы уравнений с частными производными первого порядка: характеристики и их инварианты / О.В. Капцов. – Красноярск, 2004. – 26 с. (Препринт/РАН. Сиб. отд-ние. Институт вычислительного моделирования; № 1).

INVARIANTS OF CHARACTERISTICS

O.V. Kaptsov, A.V. Zabluda

The invariants of characteristics to partial differential equations are considered. We prove that if a function is an invariant of some vector field then one must be an invariant of the vector field which corresponds to characteristics of the equations. The invariants of gas dynamics equations are computed. The infinite sequence of invariants to the equations of magnetohydrodynamics is founded. The exact solutions of these equations are obtained by using the invariants.