УДК 512.54

О ПЕРИОДИЧЕСКИХ ГРУППАХ, НАСЫЩЕННЫХ ГРУППАМИ ДИЭДРА

О.В. Васильева, А.К. Шлёпкин, А.Г. Рубашкин*

В статье изучаются периодические не локально конечные группы $G=H\lambda K$, насыщенные группами диэдра, где K — четверная группа Клейна и $2\notin\pi(H)$. Доказано, в частности, что H факторизуется тремя локально циклическими группами.

1. Формулировка основных результатов и определения

Говорят, что группа G *насыщена* множеством групп $\mathfrak{R}$, если любая конечная подгруппа K из G содержится в некоторой подгруппе L из G и L изоморфна некоторой группе из $\mathfrak{R}$ [1]. Пусть группа G насыщена множеством $\mathfrak{R}$ и $\mathfrak{R}$-минимальное с таким свойством. Тогда $\mathfrak{R}$ называется *насыщающим* множеством для G.

Напомним, что группа, порожденная двумя инволюциями, называется группой диэдра, или *диэдром;* если она к томуже конечна, то *конечным диэдром*. Будем называть группу *локально конечным диэдром,* если она является объединением бесконечной возрастающей цепочки конечных диэдров.

Уточним также, что под периодической группой мы будем понимать бесконечную группу, в которой каждый элемент имеет конечный порядок.

В статье доказана следующая

Теорема. Пусть $G=H\lambda K$ — периодическая не локально конечная группа, насыщенная группами диэдра, где K — четверная группа Клейна и $2\notin\pi(H)$. Положим, $K^{\#}=\{z, v, t\}$, $A=C_H(z)$, $B=C_H(v)$, $C=C_H(t)$. Тогда

(1) $H=ABC$,

(2) $A\cap B=e$, $A\cap C=e$, $C\cap B=e$,

(3) для любого $h\in H$ представление $h=abc$, где $a\in A$, $b\in B$, $c\in C$, единственно.

2. Свойства группы G

Пусть x — инволюция из G. Обозначим через $I(x)$ множество строго вещественных элементов, относительно x, из H.

Лемма 1. Все силовские 2-подгруппы из G сопряжены с K.

Доказательство. Ввиду [2, лемма 10] достаточно доказать, что K-силовская 2-подгруппа группы G. Предположим обратное. Тогда в G найдется конечная 2-подгруппа K_1 [2, лемма 8], что $K\subset K_1$. Из строения G вытекает, что $|K_1 : H\cap K_1|\leq 4$. Но $H\cap K_1=1$ и $4\geq|K_1 : H\cap K_1|=|K_1|\geq 8$.
Противоречие. Лемма доказана.

Лемма 2. Пусть x — инволюция из G. Тогда $C_G(x)$ — локально конечный диэдр и $C_G(x)=(C_H(x)\times\langle x\rangle)\lambda\langle y\rangle$, где y — инволюция, $C_H(x)$ — локально циклическая и для любого $h\in C_H(x)$, $h^y=h^{-1}$.

Доказательство. По [2, лемма 17] $C_G(x)=L\lambda\langle y\rangle$ — локально конечный диэдр и $L=C_H(x)\times x$. Лемма доказана.

Лемма 3. Для любой инволюции $x\in G$, $H=I(x)C_H(x)$. И для любого $h\in H$ представление в виде $h=mc$, где $m\in I(x)$, а $c\in C_H(x)$ единственно.

Доказательство. Возьмем $1\neq h\in H$. Группа $гр\langle x,x^h\rangle$ является конечным диэдром, и $xx^h=d\in H$, в силу нормальности последней в G. Тогда $x^h=x^{d^k}$, $(d^k)^{-1}=c\in C(x)$ и $h=cd^k$, где $c\in C(x)$, а $d^k\in I(x)$.

Докажем единственность. Пусть $c_1,c_2\in C_G(x)$ $(c_1\neq c_2)$, $m_1,m_2\in I_G(x)$ $(m_1\neq m_2)$ и $m_1c_1=m_2c_2$. Тогда $m_1=m_2c_2c_1^{-1}$ $\Rightarrow$ $m_1=m_2c_3$ $(c_3\equiv c_2c_1^{-1})$ $\Rightarrow$ $c_3^{-1}m_2^{-1}=m_1^{-1}=m_1^x=(m_2c_3)^x=m_2^xc_3=m_2^{-1}c_3$ $\Rightarrow$ $c_3^{-1}m_2^{-1}=m_2^{-1}c_3$ $\Rightarrow$ $m_2c_3^{-1}m_2^{-1}=c_3$. Заключительное равенство возможно только в случае $2\in\pi(m_2)$, что невозможно. Лемма доказана.

В качестве следствия лемм 1, 2 получаем:

Лемма 4. (1) A,B,C — локально циклические группы.

(2) $C_G(z)=(A\times\langle z\rangle)\lambda\langle v\rangle=(A\times\langle z\rangle)\lambda\langle t\rangle$ *и для любого* $a\in A$, $a^v=a^t=a^{-1}$.

(3) $C_G(v)=(B\times\langle v\rangle)\lambda\langle z\rangle=(B\times\langle v\rangle)\lambda\langle t\rangle$ *и для любого* $b\in B$, $b^z=b^v=b^{-1}$.

(4) $C_G(t)=(C\times\langle t\rangle)\lambda\langle z\rangle=(C\times\langle t\rangle)\lambda\langle v\rangle$ *и для любого* $c\in C$, $c^z=c^v=c^{-1}$.

Лемма 5. $A\cap B=A\cap C=C\cap B=1$.

Доказательство. Предположим обратное, и пусть $1\neq d\in A\cap B$. Тогда $C_G(d)$ содержит две различные инволюции z и v, что невозможно по [2, лемма 13]. Точно так же показывается, что $A\cap C=1$ и $C\cap B=1$. Лемма доказана.

Лемма 6. $I(z)=(BCB)^*=\{bcb|b\in B,c\in C\}$, и для любого $h\in H$ представление в виде $h=bcba$, где $b\in B$, $c\in C$, $a\in A$, единственно.

Доказательство. Пусть $g\in I(z)$. По лемме 5 $g=db$, где $d\in I(v)$, $b\in B$. Считаем:

$$g^z=g^{-1}=b^{-1}d^{-1},$$
$$g^z=(db)^z=d^zb^z=d^zb^{-1},$$

следовательно,

$$b^{-1}d^{-1}=d^zb^{-1}$$
$$b^{-1}d^{-1}b=d^z$$
$$d^{-1}=d^{zb^{-1}}$$
$$d=d^{zb^{-1}v}=d^{bzv}.$$

Таким образом,

$$d\in C_G(zvb^{-1})=C_G(tb^{-1}).$$

Пусть $b_1^2=b$. Тогда из предыдущего

$$d^{b_1}=c,\ c\in C_G(zv)$$

и

$$d=b_1cb_1^{-1},\text{ где } c\in C.$$

Теперь

$$g=db=b_1cb_1^{-1}b=b_1^{-1}cb_1b_1^2=b_1^{-1}cb_1^{-1}.$$

Итак, $I(z)\leq(BCB)^*$.

Докажем обратное включение. Пусть $g\in(BCB)^*$. Тогда $g=bcb$ для некоторых $b\in B$ и $c\in C$. Считаем $g^z=(bcb)^z=b^zc^zb^z=b^{-1}c^{-1}b^{-1}=g^{-1}$. Итак, $g\in I(z)$ и $(BCB)^*\leq I(z)$.

Докажем единственность. Пусть $b_1,b_2\in B$ $(b_1\neq b_2)$; $c_1,c_2\in C$ $(c_1\neq c_2)$; $a_1,a_2\in A$ $(a_1\neq a_2)$ и $b_1c_1b_1a_1=b_2c_2b_2a_2$. Из леммы 3 вытекает: $a_1=a_2$ и $b_1c_1b_1=b_2c_2b_2$. Отсюда $c_1=b_1^{-1}b_2c_2b_2b_1^{-1}\Rightarrow(b_1^{-1}b_2=b_2b_1^{-1}=b_3\in B)$ $c_1=b_3c_2b_3\Rightarrow c_1=c_1^t=(b_3c_2b_3)^t=b_3^{-1}c_2b_3^{-1}\Rightarrow c_1^2=c_1c_1=b_3c_2b_3b_3^{-1}c_2b_3^{-1}=b_3c_2^2b_3^{-1}$. Следовательно, $c_1^2\in C^{b_3}\cap C\neq 1$. Противоречие с утверждением леммы 5. Лемма доказана.

Лемма 7. $C_G(K)=K$.

Доказательство. Предположим обратное, и пусть $b\in C_G(k)\backslash k\neq\varnothing$. Группа $K_1=гр\langle K,b\rangle$ конечна, абелева нециклическая и $|K_1|>4$. По условию насыщенности $K_1<P$ — конечный диэдр из G. Ввиду [2] K_1 либо циклическая, либо элементарная абелева порядка 4. Противоречие со строением K_1. Лемма доказана.

Лемма 8. $H=ABC$, и для любого $h\in H$ представление в виде $h=abc$ единственно.

Доказательство. Пусть $h\in H$. Тогда $h=mc$, где $m\in I(t)$, а $c\in C$. По лемме 6 $m^2=ab^2a\Rightarrow mm=abba\Rightarrow b^{-1}a^{-1}m=bam^{-1}\Rightarrow(b^{-1}a^{-1}m)^t=(b^{-1})^t(a^{-1})^tm^t=bam^{-1}\Rightarrow b^{-1}a^{-1}m=c_1\in C\Rightarrow m=abc_1\Rightarrow h=mc=abc_1c=abc_2\in ABC$, где $c_2=c_1c\in C$.

Докажем единственность. Предположим, что существуют также $a,a_1\in A$ и $a\neq a_1$; $b,b_1\in B$ и $b\neq b_1$; $c,c_1\in C$ и $c\neq c_1$, что $abc=a_1b_1c_1$.

Тогда

$$a_2bc_2=b_1\in B\cap I(t)\cap I(z),$$
$$b_1^t=b_1^{-1}=(a_2bc_2)^t=a_2^{-1}b^{-1}c_2=c_2^{-1}b^{-1}a_2^{-1}\Rightarrow c_2a_2^{-1}b^{-1}c_2=b^{-1}a_2^{-1};$$
$$b_1^z=b_1^{-1}=(a_2bc_2)^z=a_2b^{-1}c_2^{-1}=c_2^{-1}b^{-1}a_2^{-1}\Rightarrow a_2b_2^{-1}c_2^{-1}a_2=c_2^{-1}b^{-1};$$
$$b_1^v=b_1=(a_2bc_2)^v=a_2^{-1}bc_2^{-1}=a_2bc_2,$$
$$a_2^zbc_2^z=b\Rightarrow bc_2^zb^{-1}=a_2^{-z}.$$

Последнее означает $b^{-1}cb^{-1}=A$. Покажем, что это невозможно. Действительно, пусть $bcb^{-1}=a$. Тогда $a^z=(bcb^{-1})^z=b^{-1}c^{-1}b=bcb^{-1} \Rightarrow b^{-2}c^{-1}b^2=c$. Как отмечалось выше, g, H указанного тождества быть не может. Итак, $c_2=a_2=1$ и $c=c_1$, $a=a_1$. Но тогда $b=b_1$. Лемма доказана.

Лемма 9. Если H – p-группа, то H проста.

Доказательство. Предположим обратное, и пусть $1\neq N$ – нормальная подгруппа группы G и $N\neq G$. По [2, лемма 19] N — не локально конечная группа. Покажем, что $N^z \lhd H$. Действительно, $(N^z)^h=N^{zh}=N^{h_1z}=N^z$. Итак, $N^z \lhd G$. Ясно, что $N_1=N^z\cap N \lhd H$. Кроме того, $N_1=N^z\cap N\neq 1$. Действительно, если $N^z\cap N=1$, то для любого $b\in N$ имеем конечную группу $\langle b \rangle \times \langle b^z \rangle$, которая по условию насыщенности должна вкладываться в конечную группу диэдра из G, а это невозможно. Таким образом, $N_1\neq 1$, а значит [2, лемма 19] N_1 не локально конечна. Из построения N_1 вытекает, что $N_1^{\,z}=N_1$. Группу N_2 строим следующим образом: $N_2=N_1\cap N_1^{\,v}$. Нетрудно видеть, что $1\neq N_2 \lhd H$, $K<N_G(N_2)$ и N_2 не локально конечна. Положим $N\equiv N_2$ и рассмотрим группу $C_1=N\lambda K$.

Введем обозначения:

$A_1=C_N(z)$,

$B_1=C_N(v)$,

$C_1=C_N(t)$.

По теореме Шункова [2, лемма 7] и [2, лемма 19], A_1, B_1, C_1 — бесконечные группы, а по [2, лемма 15] каждая из них является квазициклической p-группой. Иными словами, полной абелевой p-группой ранга 1. Но точно таковы же группы A, B, C. Отсюда из очевидных включений $A_1\subset A$, $B_1\subset B$, $C_1\subset C$ вытекают равенства $A_1=A$, $B_1=B$, $C_1=C$. Так как $H=ABC$ (лемма 8), то $H=ABC=A_1B_1C_1\subseteq N$. С другой стороны, $N\leq H$, значит, $N=H$. Противоречие с выбором H. Лемма доказана.

3. Доказательство теоремы

Утверждения (1), (3) теоремы доказаны в лемме 8.

Утверждение (2) теоремы доказано в лемме 5.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Шлёпкин А.К. О некоторых периодических группах, насыщенных конечными простыми подгруппами / А.К. Шлёпкин // Матем. труды. – 1998. – Т. 1, № 1.– С. 129–138.
2. Шлёпкин А.К. Об одном классе периодических групп / А.К.Шлёпкин, А.Г.Рубашкин // Математические системы (КрасГАУ). – 2004. – №2. – С.101–110.

ABOUT THE PERIODIC GROUPS SATURATED BY GROUPS OF DIHEDRON

O.V. Vasilyeva, A.K. Shlepkin, A.G. Rubashkin

In the article are studied periodic not local finite groups $G=H\lambda K$ are saturated by groups of dihedron, where K — four group and $2\notin \pi(H)$. It is proved, in particular, where H is factored by three local cyclic groups.