

**ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ МЕТОДА ТУННЕЛЬНОЙ РЕФРАКТОМЕТРИИ
ДЛЯ ИССЛЕДОВАНИЯ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ СВЕЧЕНИЯ В ТОНКОМ СЛОЕ**

О.А. Кудрявцева, В.А. Охонин*

Теоретически обоснована возможность использования оптического аналога явления туннельного эффекта для исследования распределения свечения в тонком слое, толщина которого меньше длины световой волны. Рассмотрены математические модели различных форм излучателей в виде «точечных» источников света, равномерно и неравномерно светящихся «столбиков».

Для более глубоких исследований структуры тонких поверхностных слоев и процессов, происходящих в них, необходимо применение новых методов исследования с большой разрешающей способностью. Для определения положения области локализации свечения в тонком слое был разработан метод туннельной рефрактометрии [1]. Этот метод основан на оптическом аналоге туннельного эффекта, т.е. преломлении света в условиях, когда источник излучения находится на расстоянии, меньшем длины световой волны от границы раздела сред.

Теоретическое исследование направления распространения преломленной волны от источника света, находящегося в оптически менее плотной среде вблизи границы раздела сред, проведено Л.И. Мандельштамом на основе электромагнитной теории света [2]. Эти исследования показали, что во второй, оптически более плотной, среде резкой границы между светом и тенью не существует. И когда расстояние между источником света и границей раздела сред намного меньше длины волны, то свет излучается в более плотную среду во всех направлениях и предельного угла в обычном его смысле не существует. Явление проникновения преломленной волны в оптически более плотной среде в область «запрещенных» для геометрической оптики углов положено в основу метода туннельной рефрактометрии.

Использование принципа взаимности и формул Френеля для амплитуд падающих и преломленных волн позволяет определить во второй, оптически более плотной, среде поле точечного излучателя для любых углов наблюдения и произвольных направлений колебаний, не прибегая к общему решению. Однако в этом случае не учитываются размеры и форма источника, что для ряда задач может иметь принципиальное значение. Для учета такого влияния на угловое распределение свечения необходимо найти общее решение для определения поля излучателя в оптически более плотной среде и провести математическое моделирование формы и размеров источников света.

Общее решение для нахождения поля точечного излучателя

Общее решение для определения поля излучателя в оптически более плотной среде от источника, находящегося в оптически менее плотной среде, находится на основании макроскопических уравнений Максвелла для описания электромагнитных явлений в веществе [3].

Для нахождения данного поля излучателя были рассмотрены две однородные, изотропные, стационарные, непоглощающие, полубесконечные среды с диэлектрическими постоянными ϵ_1 и ϵ_2 , магнитными проницаемостями, равными единице, и имеющие границу раздела при $z = 0$. В первой, оптически менее плотной, среде вблизи границы раздела сред находится точечный источник света с координатами $(0, 0, l)$.

Из макроскопических уравнений Максвелла получаем уравнение, которое позволяет найти поле в веществе по известным характеристикам излучателя:

$$-\operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{E} = i\omega\mu_0 \vec{j} - \epsilon\epsilon_0\mu_0\omega^2 \vec{E}, \quad (1)$$

где \vec{E} – амплитуда электрической составляющей электромагнитной волны; ω – круговая частота; \vec{j} – вектор плотности излучения; ϵ_0 – электрическая постоянная; μ_0 – магнитная постоянная.

Свойства системы описываются диэлектрической проницаемостью вещества $\epsilon = \epsilon(z)$, зависящей от координаты z . Источник излучает монохроматические электромагнитные волны $\vec{E}' = \vec{E}(r)\exp i\omega t$.

Представим вектор плотности излучения источника \vec{j} в виде

$$\vec{j} = \vec{j}_0 \delta(x) \delta(y) \delta(z-l) - \epsilon\epsilon_0\mu_0\omega^2 \vec{E}. \quad (2)$$

Решение уравнения (1) можно искать в виде

* © О.А.Кудрявцева, 2004; Сибирский государственный технологический университет (Россия); В.А.Охонин, 2004; Университет г. Торонто (Канада).

$$\vec{E} = (a\vec{j} + b\vec{i}_z) + \nabla \frac{\text{div}(a\vec{j} + b\vec{i}_z)}{\varepsilon\varepsilon_0\mu_0\omega^2}, \quad (3)$$

где \vec{i}_z – единичный вектор, направленный по оси z .

Введем волновые векторы $q_x, q_y, q^2 = q_x^2 + q_y^2$. Обозначим $p = \sqrt{q^2 - \varepsilon_1\varepsilon_0\mu_0\omega^2}$, $s = \sqrt{\varepsilon_2\varepsilon_0\mu_0\omega^2 - q^2}$ и $\vec{k} = (s, q_x, q_y)$. Решение рассмотрим в области $\varepsilon_1\varepsilon_0\mu_0\omega^2 < q^2 < \varepsilon_2\varepsilon_0\mu_0\omega^2$.

Перейдем к трансформантам Фурье и используем условие сшивки на границе раздела сред

$$\Delta b = 0, \quad \Delta \frac{\partial_z b + j\vec{\nabla} a}{\varepsilon_0\mu_0\varepsilon} = 0. \quad (4)$$

Не рассматривая волны, идущие из бесконечности, найдем фурье–компоненты функций $a(x,y,z)$ и $b(x,y,x)$ в среде с диэлектрической проницаемостью ε_2 :

$$a' = \frac{\exp(-pl)}{p + is}, \quad b' = \frac{i(\varepsilon_2 - \varepsilon_1)}{p\varepsilon_2 + is\varepsilon_1} (\vec{k} \vec{j}) \alpha. \quad (5)$$

Перейдем к координатам q_x, q_y, z и введем координаты $x = r \sin\varphi; y = 0; z = r \cos\varphi$.

Тогда функции $a(x,y,z)$ и $b(x,y,x)$ будут иметь следующий вид:

$$a(x, y, z) = \int a'(q_x, q_y) \exp iz \left(q_x \sin \varphi + \sqrt{k^2 - q_x^2 - q_y^2} \cos \varphi \right) dq_x dq_y, \quad (6)$$

$$b(x, y, z) = \int b'(q_x, q_y) \exp iz \left(q_x \sin \varphi + \sqrt{k^2 - q_x^2 - q_y^2} \cos \varphi \right) dq_x dq_y. \quad (7)$$

Вычислим интегралы (7) и (8) приближенными аналитическими методами [4]. В экстремальной точке частные производные $\frac{\partial}{\partial q_x}$ и $\frac{\partial}{\partial q_y}$ от показателя экспоненты под интегралом равны 0. Тогда координаты

этой точки $q_x = k \sin\varphi; q_y = 0$. Разложив в ней показатель экспоненты в ряд, ограничиваясь двумя членами ряда и вычисляя полученные из уравнений (6) и (7) интегралы, получаем первые члены асимптотических разложений:

$$a(x, y, z) = \frac{2\pi\alpha k \cos \varphi}{r}, \quad b(x, y, z) = \frac{i2\pi\alpha k (\varepsilon_2 - \varepsilon_1) \cos \varphi}{r(p\varepsilon_2 + is\varepsilon_1)} (\vec{k} \vec{j}). \quad (8)$$

Согласно уравнению (3) электрическая составляющая электромагнитного излучения в оптически более плотной среде с диэлектрической проницаемостью ε_2

$$\vec{E}(k) = \frac{2\pi\alpha \cos \varphi}{r} \left\{ \vec{j} + \frac{i(\varepsilon_2 - \varepsilon_1)}{p\varepsilon_2 + is\varepsilon_1} \vec{i}_z (\vec{k} \vec{j}) - \frac{k}{\varepsilon_0\varepsilon_2\mu_0\omega^2} (\vec{k} \vec{j}) - \frac{i(\varepsilon_2 - \varepsilon_1)}{\varepsilon_0\varepsilon_2\mu_0\omega^2 (p\varepsilon_2 + is\varepsilon_1)} (k\vec{i}_z) (\vec{k} \vec{j}) \right\}. \quad (9)$$

Уравнение для интенсивности излучения имеет вид

$$I = |\vec{E}|^2 = \frac{4\pi^2 k^2 \cos^2 \varphi}{r^2} \cdot \frac{\exp(-2pl)}{p^2 + s^2} \cdot \left\{ \vec{j}^2 - \frac{(\vec{k} \vec{j})^2}{\varepsilon_0\varepsilon_2\mu_0\omega^2} + \frac{2(\vec{k} \vec{j})(\vec{j} \vec{i}_z)s\varepsilon_1(\varepsilon_2 - \varepsilon_1)}{(p\varepsilon_2)^2 + (s\varepsilon_1)^2} + \frac{(\vec{k} \vec{j})(\varepsilon_2 - \varepsilon_1)}{(p\varepsilon_2)^2 + (s\varepsilon_1)^2} - \frac{2(\vec{k} \vec{j})^2 (k\vec{i}_z)s\varepsilon_1(\varepsilon_2 - \varepsilon_1)}{\varepsilon_0\varepsilon_2\mu_0\omega^2 [(p\varepsilon_2)^2 + (s\varepsilon_1)^2]} - \frac{(\vec{k} \vec{j})^2 (k\vec{i}_z)s\varepsilon_1(\varepsilon_2 - \varepsilon_1)^2}{\varepsilon_0\varepsilon_2\mu_0\omega^2 [(p\varepsilon_2)^2 + (s\varepsilon_1)^2]} \right\}. \quad (10)$$

Теперь обозначения принимают вид $q = k \sin \varphi; s = k \cos \varphi; p = k\sqrt{\sin^2 \varphi - \varepsilon_1/\varepsilon_2}$ и $k = \omega\sqrt{\varepsilon_0\varepsilon_2\mu_0}$.

Усредним по направлениям j : $\langle (\vec{k} \vec{j}) \rangle = \frac{1}{3} k \langle \vec{j}^2 \rangle$, $\langle (\vec{k} \vec{j}) \vec{j}_z \rangle = \frac{1}{3} k_z \langle \vec{j}^2 \rangle$ и при $\langle \vec{j}^2 \rangle = 1$ получаем для интенсивности выражение

$$I(\varphi, l) = \frac{4\pi^2}{3r^2} \cdot N(\varphi)I'(\varphi, l), \quad (11)$$

где $N(\varphi)$ – функция распределения излучения,

$$N(\varphi) = \frac{\cos^2 \varphi \left[3 \sin^2 \varphi - (1 + \cos^2 \varphi) \varepsilon_1 / \varepsilon_2 \right]}{(1 - \varepsilon_1 / \varepsilon_2) \left[\sin^2 \varphi - (\varepsilon_1 / \varepsilon_2) \cos^2 \varphi \right]}, \quad (12)$$

$I'(\varphi, l)$ – экспоненциальная составляющая интенсивности излучения,

$$I'(\varphi, l) = \exp \left[-2\omega l \sqrt{\varepsilon_0 \mu_0 \varepsilon_2 (\sin^2 \varphi - \varepsilon_1 / \varepsilon_2)} \right]. \quad (13)$$

На основе формулы (11) можно получить связь между распределением источников света в тонком слое оптически менее плотной среды и распределением их интенсивности излучения в оптически более плотной среде

$$I_{\text{полн.}}(\varphi) = N(\varphi) \int I'(\varphi, l) P(l) dl, \quad (14)$$

где $P(l)$ – функция распределения точечных излучателей в оптически менее плотной среде.

Формула (14) позволяет моделировать различные формы излучателей в виде «точечных» источников света, равномерно и неравномерно светящихся «столбиков», расположенных в оптически менее плотной среде на различных расстояниях от границы раздела сред, и находить поля этих излучателей в оптически более плотной среде.

Математическая модель углового распределения интенсивности излучения от точечного источника

Рассмотрим распределение интенсивности излучения в оптически более плотной среде от источника излучения, расположенного в оптически менее плотной среде на расстоянии l_0 от границы раздела сред.

В этом случае функция распределения источников излучения будет иметь вид

$$P(l) = \delta(l - l_0), \quad (15)$$

где δ – дельта-функция Дирака.

Подставляя выражения (15) и (13) в (14), найдем, что экспоненциальная составляющая интенсивности излучения $I'(\varphi)$ полной интенсивности излучения $I_{\text{полн.}}(\varphi)$ принимает вид

$$I'(\varphi) = \exp \left[-2\omega l_0 \sqrt{\varepsilon_0 \mu_0 \varepsilon_2 (\sin^2 \varphi - \varepsilon_1 / \varepsilon_2)} \right]. \quad (16)$$

Падение интенсивности, наступающее при переходе через предельный угол, зависит от расстояния до границы раздела сред. Если расстояние от границы раздела сред до источника излучения мало, то происходит постепенное уменьшение интенсивности излучения. На расстояниях, больших длины волны излучателя, происходит резкое падение интенсивности, что соответствует законам геометрической оптики.

Математическая модель углового распределения интенсивности излучения от источника, имеющего вид равномерно светящегося «столбика»

Рассмотрим точечные источники света, равномерно распределенные относительно оси z в интервале $l_1 \leq l \leq l_2$, т.е. источник излучения представляет собой равномерно светящийся «столбик».

Функция распределения точечных излучателей в оптически менее плотной среде имеет вид

$$P(l) = \begin{cases} 1/(l_2 - l_1) & \text{при } l_1 \leq l \leq l_2, \\ 0 & \text{при } 0 < l < l_1 \text{ и } l > l_2. \end{cases} \quad (17)$$

Экспоненциальная составляющая интенсивности излучения $I'(\varphi)$ полной интенсивности излучения $I_{\text{полн.}}(\varphi)$ для равномерно светящегося «столбика» принимает вид

$$I'(\varphi) = \int_{l_1}^{l_2} \frac{\exp\left(-2\omega l \sqrt{\varepsilon_0 \mu_0 \varepsilon_2} (\sin^2 \varphi - \varepsilon_1 / \varepsilon_2)\right)}{l_2 - l_1} dl =$$

$$= \frac{\exp\left[-2\omega l_1 \sqrt{\varepsilon_0 \mu_0 \varepsilon_2} (\sin^2 \varphi - \varepsilon_1 / \varepsilon_2)\right]}{2\omega \sqrt{\varepsilon_0 \mu_0 \varepsilon_2} (\sin^2 \varphi - \varepsilon_1 / \varepsilon_2)} \cdot \frac{1 - \exp\left[-2\omega (l_2 - l_1) \sqrt{\varepsilon_0 \mu_0 \varepsilon_2} (\sin^2 \varphi - \varepsilon_1 / \varepsilon_2)\right]}{l_2 - l_1}. \quad (18)$$

Угловое распределение интенсивности излучения в оптически более плотной среде зависит от протяженности источника. Для протяженного источника характерно более резкое падение интенсивности излучения, наступающее при переходе через предельный угол.

Математическая модель углового распределения интенсивности излучения от источника, имеющего вид неравномерно светящегося «столбика»

Рассмотрим точечные источники света, неравномерно распределенные относительно оси z в интервале $l_1 < l < l_2$. Максимальная плотность точечных источников света при $l_0 = (l_2 - l_1)/2$ и убывает при удалении от l_0 по линейному закону $P(l) = kl$, где угловой коэффициент $k = \operatorname{tg} \alpha$ (график функции – прямая линия, образующая с осью абсцисс угол α).

Функция распределения точечных излучателей в оптически менее плотной среде имеет следующий вид:

$$P(l) = \begin{cases} 1 & \text{при } l = l_0, \\ k(l - l_1)/(l_2 - l_1) & \text{при } l_1 < l < l_0, \\ k(l_2 - l)/(l_2 - l_1) & \text{при } l_0 < l < l_2, \\ 0 & \text{при } l \leq l_1, l_2 \leq l. \end{cases} \quad (19)$$

Сравним угловое распределение интенсивности свечения от данного источника с угловым распределением интенсивности излучения от равноудаленного источника, имеющего вид равномерно светящегося «столбика» одинаковой протяженности и равной мощности излучения. В этом случае площади фигур, ограниченные осью абсцисс и соответствующими функциями распределения точечных излучателей, будут равными, следовательно, максимальное значение функции распределения для источника, имеющего вид неравномерно светящегося «столбика», $P(l) = 2$ при $l = l_0$ и $k = 2/l$.

Функция $P(l)$ непрерывна, поэтому выполняется условие $k(l_0 - l_1) = k(l_2 - l_0) = 2$, откуда

$$\begin{cases} l_1 = l_0 - 2/k, \\ l_2 = l_0 + 2/k. \end{cases} \quad (20)$$

Тогда функция распределения точечных излучателей для неравномерно светящегося «столбика» будет иметь вид

$$P(l) = \begin{cases} 2 & \text{при } l = l_0, \\ k(l - l_0 + 2/k)/2l_0 & \text{при } l_1 < l < l_0, \\ k(l_0 - l + 2/k)/2l & \text{при } l_0 < l < l_2, \\ 0 & \text{при } l \leq l_1, l_2 \leq l. \end{cases} \quad (21)$$

Экспоненциальная составляющая интенсивности излучения $I'(\varphi)$ полной интенсивности излучения $I_{\text{полн}}(\varphi)$ интенсивности излучения в оптически более плотной среде для неравномерно светящегося «столбика» принимает следующий вид

$$I'(\varphi) = \frac{k \exp\left[-2\omega l_0 \sqrt{\varepsilon_0 \mu_0 \varepsilon_2} (\sin^2 \varphi - \varepsilon_1 / \varepsilon_2)\right]}{4\omega^2 l_0 \varepsilon_0 \mu_0 \varepsilon_2 (\sin^2 \varphi - \varepsilon_1 / \varepsilon_2)} \times$$

$$\times \left\{ \exp\left[\frac{4\omega}{k} \sqrt{\varepsilon_0 \mu_0 \varepsilon_2} (\sin^2 \varphi - \varepsilon_1 / \varepsilon_2)\right] + \exp\left[-\frac{4\omega}{k} \sqrt{\varepsilon_0 \mu_0 \varepsilon_2} (\sin^2 \varphi - \varepsilon_1 / \varepsilon_2)\right] - 2 \right\}. \quad (22)$$

Подставляя $k = 2/l_0$, имеем

$$I'(\varphi) = \frac{\exp\left[-2\omega l_0 \sqrt{\varepsilon_0 \mu_0 \varepsilon_2} \left(\sin^2 \varphi - \varepsilon_1 / \varepsilon_2\right)\right]}{2\omega^2 l_0 \varepsilon_0 \mu_0 \varepsilon_2 \left(\sin^2 \varphi - \varepsilon_1 / \varepsilon_2\right)} \times \left\{ \exp\left[2\omega l_0 \sqrt{\varepsilon_0 \mu_0 \varepsilon_2} \left(\sin^2 \varphi - \varepsilon_1 / \varepsilon_2\right)\right] + \exp\left[-2\omega l_0 \sqrt{\varepsilon_0 \mu_0 \varepsilon_2} \left(\sin^2 \varphi - \varepsilon_1 / \varepsilon_2\right)\right] - 2 \right\}. \quad (23)$$

Для неравномерно светящегося «столбика» характерно менее резкое падение интенсивности излучения по сравнению с угловым распределением интенсивности излучения от равномерно светящегося «столбика».

На рис. 1 показано угловое распределение интенсивности свечения в среде с диэлектрической проницаемостью $\varepsilon_2 = 3,06$ от источников, расположенных в оптически менее плотной среде с диэлектрической проницаемостью $\varepsilon_1 = 1,77$, равноудаленных на расстояние 70 нм от границы раздела сред и имеющих вид точечного источника, неравномерно светящегося «столбика» протяженностью 60 нм и с максимальной плотностью точечных источников при $l_0 = 100$ нм и равномерно светящегося «столбика» протяженностью 60 нм.

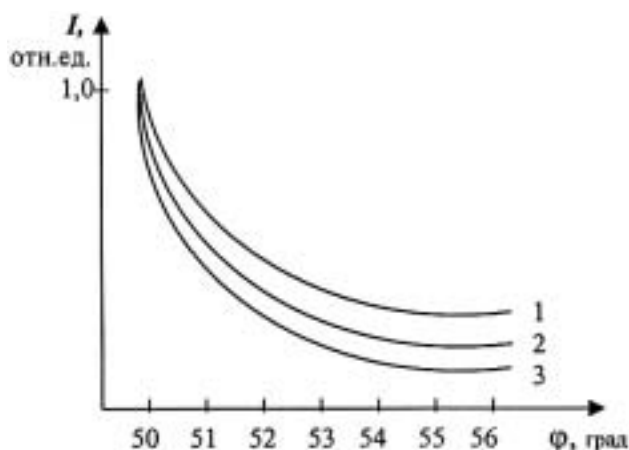


Рис. 1. Угловое распределение интенсивности излучения в оптически более плотной среде от различных источников, расположенных в оптически менее плотной среде и равноудаленных от границы раздела сред: 1-точечный источник; 2-неравномерно светящийся «столбик»; 3-равномерно светящийся «столбик»

Заключение

Таким образом, теоретические исследования показали, что использование макроскопических уравнений Максвелла для описания электромагнитных явлений в веществе позволяет определить поле излучателя в оптически более плотной среде от источника, находящегося в оптически менее плотной среде вблизи границы раздела.

Результаты исследований в области «запрещенных» для геометрической оптики углов совпадают с результатами исследований направления распространения преломленной волны в оптически более плотной среде, проведенных Л.И. Мандельштамом на основе формул Френеля для амплитуд падающих и преломленных волн и принципа взаимности. Найденное на основании макроскопических уравнений Максвелла решение для определения поля излучателя в оптически более плотной среде позволяет исследовать различные математические модели источников света. Расчеты с использованием найденного поля точечного источника и различных форм пространственного распределения источников света показали возможность применения явления туннельной рефракции для исследования распределения свечения в тонком поверхностном слое.

Экспериментальные исследования заключаются в том, что исследуемый объект приводят в оптический контакт с преломляющим элементом с показателем преломления, значительно большим показателя преломления исследуемого объекта, и измеряют интенсивность свечения в области углов, больших предельного угла для данных сред. По характеру распределения свечения в оптическом элементе в данном диапазоне углов определяют толщину приповерхностного слоя, из которого свет попадает в область «запрещенных» для геометрической оптики углов. Этот метод дает возможность изучать процессы излучения света в поверхностных слоях объекта независимо от процессов идущих в глубине. Использование оптического аналога туннельного эффекта позволяет достигнуть высокой разрешающей способности метода (около 100 нм), а простота делает его общедоступным. Метод туннельной рефрактометрии позволил впервые прямым способом определить область локализации люминесцентной системы в клетках светящихся бактерий в прижиз-

ненном состоянии. Было показано, что излучение света у светящихся бактерий происходит из тонкого поверхностного слоя толщиной около 70 нм [5].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. А.с. 1589155 СССР, МКИ⁴ G 01 N1/64. *Исследование структуры биологических объектов, излучающих свет* / О.А.Кудрявцева, В.А.Охонин, С.И.Барцев. СССР.– 4437527/25; Заявлено 06.06.88; Опубл.30.08.90. Бюл. N32 // Открытия. Изобретения. - 1990.– N32.– С.192.
2. Манделъштам Л.И. *Излучение источника света, находящегося очень близко от границы раздела двух прозрачных сред* / Л.И. Манделъштам. – Л.: Изд-во АН СССР, 1948, п.с.т. – Т.1. – С. 261–272.
3. Ландау Л.Д. *Теоретическая физика. Электродинамика сплошных сред* / Л.Д.Ландау, Е.М.Лифшиц. – М.: Наука, 1977. – 369 с.
4. Федорюк М.В. *Метод перевала* / М.В.Федорюк. – М.: Наука, 1977. – 368 с.
5. Кудрявцева О.А. *Локализация люминесцентной системы светящихся бактерий* / О.А.Кудрявцева, С.И.Барцев, В.А.Охонин, В.В.Межевикин // *Биофизика*. – 1993. - Т. 38. - Вып. 3. – С. 435-439.
6. Кудрявцева О.А. *Физические основы метода туннельной рефрактометрии для исследования пространственного распределения свечения в тонком поверхностном слое бактериальных клеток* / О.А.Кудрявцева, В.А.Охонин // *Материалы X международного симпозиума. Концепция гомеостаза: Теоретические, экспериментальные и прикладные аспекты*. – Новосибирск: Наука, 2003. – С.51–55.

THEORETICAL FUNDAMENTALS OF TUNNEL REFRACTOMETER METHOD FOR INVESTIGATION OF LIGHT RADIATION DISTRIBUTION IN A THIN LAYER

O.A. Kudryavtseva, V.A. Okhonin

On the basis of Maxwell's macroscopic equations there has been found a solution for determination a radiator field in an optically denser medium. Calculations with the use of the identified field of the point source and different form of spacial distribution of light sources have shown the possibility of tunnel refraction phenomenon application for of light radiation distribution in a thin surface layer.