УДК 517.55

МНОГОМЕРНЫЕ РАЗНОСТНЫЕ УРАВНЕНИЯ И АМЕБА ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКОГО МНОГОЧЛЕНА[1]

Е.К.Лейнартас*

Используя понятие амебы характеристического многочлена, в работе получено описание пространства решений многомерного разностного уравнения с постоянными коэффициентами.

1. Обозначения, определения, основные результаты

Обозначим $\mathbb{Z}$ множество целых чисел и $\mathbb{Z}^n = \mathbb{Z} \times \cdots \times \mathbb{Z}$ — n-мерную целочисленную решетку. Пусть C — выпуклый многогранный заостренный конус из $\mathbb{Z}^n$ и $A = \{\alpha\} \subset C$ — некоторое фиксированное конечное множество точек.

Разностным уравнением (относительно неизвестной функции $f : C \to \mathbb{C}$) назовем соотношение вида

$$\sum_{\alpha \in A} c_\alpha f(x + \alpha) = 0, \quad x \in C, \tag{1}$$

где c_α — некоторые (постоянные) коэффициенты уравнения (1).

Характеристическим многочленом для разностного уравнения (1) назовем многочлен Лорана $\sum_{\alpha \in A} c_\alpha \lambda^\alpha =: P(\lambda)$, где $\lambda^\alpha = \lambda_1^{\alpha_1} \ldots \lambda_n^{\alpha_n}$, $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{C}^n$, а $\mathbb{C}^n$ — n - мерное комплексное пространство.

Характеристическим множеством для разностного уравнения (1) назовем множество нулей характеристического многочлена: $V = \{\lambda \in \mathbb{C}^n : P(\lambda) = 0\}$.

В случае $n = 1$ и $C = \mathbb{Z}_+$ известно (см., например, [1]), что всякое решение уравнения (1) является линейной комбинацией решений вида $f(x) = x^s \xi^x$, $s = 0, \ldots, k-1$, где ξ — корень характеристического многочлена кратности k. Следовательно, размерность пространства решений конечна и равна степени характеристического многочлена $P(\lambda)$.

Для $n > 1$ подобный ответ невозможен, так как характеристическое множество V бесконечно. Для описания пространства решений уравнения (1) нам потребуются такие понятия, как многогранник Ньютона и амеба многочлена. Соответствующие определения и необходимые сведения взяты из [2,3].

Отметим, что многомерные разностные уравнения возникают в теории цифровых рекурсивных фильтров [4], а также в комбинаторном анализе (см. [5]), где они называются линейными рекуррентными соотношениями.

Многогранником Ньютона N_P многочлена P называется выпуклая оболочка в $\mathbb{R}^n$ элементов множества A.

Амебой называется образ множества нулей V многочлена $P(\lambda)$ при отображении

$$Log : \lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \to (\log|\lambda_1|, \ldots, \log|\lambda_n|) = Log\,|\lambda|.$$

Дополнение амебы $\mathbb{R}^n \setminus Log\,V$ состоит из конечного числа связных компонент, которое не превосходит числа целых точек многогранника N_P.

Если ν — вершина многогранника N_P, то ей соответствует (непустая) связная компонента дополнения амебы E_ν такая, что:

(i) *двойственный конус* $C_\nu = \{s \in \mathbb{R}^n : \langle s, \nu \rangle = \max_{\alpha \in N_P} \langle s, \alpha \rangle\}$ является асимптотическим для этой компоненты, т.е. для любого $u \in E_\nu$ справедливо включение $u + C_\nu \subset E_\nu$, и никакой конус, содержащий C_ν, этому свойству не удовлетворяет;

(ii) рациональная функция $1/P(\lambda)$ разлагается в области $Log^{-1} E_\nu \subset \mathbb{C}^n$ в ряд Лорана вида

$$\frac{1}{P(\lambda)} = \sum_\beta \frac{a_\beta}{\lambda^{\nu+\beta}},$$

[1]Работа выполнена при поддержке гранта Президента РФ для ведущих научных школ, НШ 1212.2003.1.

где $\beta \in \mathbb{Z}^n \cap K_\nu$, а K_ν — конус, построенный на векторах $\nu - \alpha$, $\alpha \in A$.

Отметим, что в дальнейшем нам потребуются разложения функции $1/P(\lambda)$ в вершинах ν многогранника Ньютона, двойственный конус которых C_ν удовлетворяет условию

$$\dim C_\nu \cap C = n. \tag{2}$$

На множестве рядов Лорана $F(\lambda) = \sum_{x \in \mathbb{Z}^n} a_x \lambda^x$ определим функционал Res следующим образом:

$$Res\, F(\lambda) = a_{-I}, I = (1, \dots, 1).$$

Пусть $C - \alpha$ — сдвиг множества C на вектор $(-\alpha)$, определим для (фиксированного) набора $A = \{\alpha\}$ множество

$$C_A = \cup_{\alpha \in A} (C - \alpha) \setminus C. \tag{3}$$

Обозначим через $\mathcal{M}_A$ линейное пространство рядов Лорана вида

$$M(\lambda) = \sum_{y \in C_A} \mu(y) \lambda^{-y-I} \tag{4}$$

и отметим, что сходимость таких рядов, вообще говоря, не предполагается.

Основным результатом данной работы является

Теорема 1. *Всякое решение разностного уравнения* (1) *можно представить в виде*

$$f(x) = Res \left\{ \frac{1}{P(\lambda)} M(\lambda) \lambda^x \right\}, x \in C, \tag{5}$$

где выражение в фигурных скобках понимается как произведение (формальных) рядов Лорана, причем $1/P(\lambda)$ *разлагается в ряд в фиксированной вершине многогранника Ньютона* N_P, *удовлетворяющей условию* (2), *а* $M(\lambda) \in \mathcal{M}_A$.

Отметим, что если $C = \mathbb{Z}^n_+$ и ряд Лорана (4) сходится в некоторой окрестности бесконечно удаленной точки $U(\infty) = \{\lambda \in \mathbb{C}^n : |\lambda_j| > R_j, j = 1, \dots, n\}$, то из утверждений (i) и (ii), а также условия $\dim(C_\nu \cap C) = n$ следует, что решение $f(x)$ можно представить в виде

$$f(x) = \frac{1}{(2\pi i)^n} \int_\gamma \frac{M(\lambda)}{P(\lambda)} \lambda^x \, d\lambda, \quad x \in C, \tag{6}$$

где $\gamma = Log^{-1}\, v$, а $v \in E_\nu$ такое, что ряд (4) сходится на остове γ.

В случае $n = 1$ получим, что $M(\lambda)$ — это многочлен степени на единицу меньше, чем степень m характеристического многочлена $P(\lambda)$, вершина ν многогранника N_P совпадает с m, а связная компонента дополнения амебы E_m — луч на вещественной оси. Если $v \in E_m$, то внутри окружности $\gamma = Log^{-1}\, v$ лежат все корни характеристического многочлена. По теореме о полной сумме вычетов из формулы (5) легко получаются результаты об общем виде решения разностного уравнения с постоянными коэффициентами.

Для $n > 1$ оказывается, что $M(\lambda)$ уже не является многочленом, и даже в случае сходимости ряда (4) вычисление интеграла — трудная задача теории многомерных вычетов, не решенная в общем случае.

Формула вида (6) для многогранника Ньютона N_P специального вида получена в [8], теорема 1 ранее доказана автором в частном случае, когда $C = \mathbb{Z}^n_+$ (см. [6]).

2. Доказательство

Для произвольной функции $f(x)$ целочисленного аргумента $x \in C$ определим ее λ-преобразование $F(\lambda)$ (см. [4]) следующим образом:

$$F(\lambda) = \sum_{x \in C} \frac{f(x)}{\lambda^{x+I}}, \tag{7}$$

где $I = (1, \dots, 1)$.

Отметим, что функционал Res позволяет определить обратное преобразование:

$$f(x) = Res\,(F(\lambda)\lambda^x)\,, \qquad x \in C. \tag{8}$$

Каждой функции $f(x)$, $x \in C$ поставим в соответствие ряд Лорана вида

$$K_f(\lambda) =: \sum_{x \in C_A^n} \left(\sum_{\alpha \in A} c_\alpha \tilde{f}(x+\alpha) \right) \lambda^{-x-I},$$

где $\tilde{f}$ — продолжение функции f с множества C на множество $\mathbb{Z}^n \setminus C$ нулем: $\tilde{f}(x) = 0$ для $x \in \mathbb{Z}^n \setminus C$.

Предложение 1. *Справедлива формула*

$$P(\lambda)F(\lambda) = \sum_{x \in C} \left(\sum_{\alpha \in A} c_\alpha f(x+\alpha) \right) \lambda^{-x-I} + K_f(\lambda). \tag{9}$$

Доказательство. Умножим многочлен $P(\lambda)$ на ряд (7) и сгруппируем по степеням λ. Учитывая определение $\tilde{f}$ и равенство множеств $C_A = \{x \in \mathbb{Z}^n : x \notin C$ и существует $\alpha \in A$ такое, что $x + \alpha \in C\}$, получим (9). □

Предложение 2. *Функция $f(x), x \in C$ является решением разностного уравнения* (1) *тогда и только тогда, когда ее λ-преобразование $F(\lambda)$ удовлетворяет условию $P(\lambda)F(\lambda) = K_f(\lambda)$.*

Доказательство. Следует из формулы (9) и единственности разложения в ряд Лорана. □

Предложение 3. *Всякое решение $f(x)$ разностного уравнения* (1) *можно представить в виде*

$$f(x) = Res\left(\frac{K_f(\lambda)}{P(\lambda)}\lambda^x\right), x \in C. \tag{10}$$

Доказательство. Следует из (8) и предложения 2. □

Одна из задач, возникающая при изучении уравнения (1), состоит в том, чтобы оценить "запас" его решений.

Формула (10) ответа на данный вопрос не дает, но, с другой стороны, очевидно, что $\mathcal{K}_A = \{K_f(\lambda), f - \text{решение}\} \subset \mathcal{M}_A$ и в этом смысле "количество" решений уравнения (1) не превосходит "количества" рядов Лорана вида (4).

Отметим, что для $n = 1$ и $C = \mathbb{Z}_+$ имеем $\mathcal{K}_A = \mathcal{M}_A$, но при $n > 1$ это, вообще говоря, не так. Например, для двумерного разностного уравнения $f(x_1+1, x_2) - f(x_1, x_2+1) = 0, x \in \mathbb{Z}_+^2 = C$ получим, что $A = \{(1,0),(0,1)\}$ и $C_A = \{(-1,m),(m,-1), m = 1,2,3,\dots\}$. Для каждого решения f уравнения соответствующий ряд K_f имеет вид $K_f(\lambda_1,\lambda_2) = \Phi(1/\lambda_2) - \Phi(1/\lambda_1)$, где Φ — произвольный степенной ряд такой, что $\Phi(0) = 0$. Но из определения (4) видно, что ряд $M(\lambda)$ можно записать в виде $M(\lambda) = \Phi(1/\lambda_1) + \Psi(1/\lambda_2)$, где Φ, Ψ — произвольные степенные ряды, такие что $\Phi(0) = \Psi(0) = 0$, следовательно, включение $\mathcal{K}_A \subset \mathcal{M}_A$ строгое.

Предложение 4. *Пусть ν — вершина многогранника Ньютона характеристического многочлена $P(\lambda)$, такая, что $\dim(C_\nu \cap C) = n$, тогда функция f, определяемая равенством* (5), *удовлетворяет следующим свойствам:*

1) для $x \in \mathbb{Z}^n$ значение функции $f(x)$ выражается через конечное число коэффициентов рядов $1/P(\lambda)$ и $M(\lambda)$;

2) функция f определена на подмножестве целочисленной решетки, содержащем C;

3) функция $f(x)$ удовлетворяет разностному уравнению (1).

Доказательство. Перемножим ряды $1/P(\lambda)$ и (4) и обозначим $f(x)$ коэффициент при мономе $1/\lambda^{x+I}$. Обозначим $X = \{x \in \mathbb{Z}^n : x = \nu + \beta + y, \beta \in K_\nu, y \in C_A\}$. Так как $y \in C_A$, то найдется $\alpha_0 \in A$ такое, что $y + \alpha_0 =: w \in C$, тогда $x = (\nu - \alpha_0) + \beta + w$. Таким образом, любой вектор $x \in X$ является линейной комбинацией (с неотрицательными коэффициентами) векторов $\nu - \alpha, \alpha \in A$ и векторов, порождающих конус C.

Пусть s — внутренняя точка конуса $C_\nu \cap C$, тогда $\langle s, \nu - \alpha \rangle > 0, \alpha \in A \setminus \{\nu\}, \langle s, e_j \rangle > 0, j = 1, \dots, n$. Это означает, что векторы $\nu - \alpha$, $\alpha \in A$ и $e_j, j = 1, \dots, n$ принадлежат полупространству $\{x \in \mathbb{R}^n : \langle s, x \rangle > 0\}$.

Известно (см., например, [10]), что в этом случае существует конечное число способов, которыми вектор $x \in \mathbb{Z}^n$ можно представить в виде линейной комбинации этих векторов с целочисленными неотрицательными коэффициентами. Это доказывает первое утверждение предложения 4.

Пусть $x \in X$, как показано выше, $x = (\nu - \alpha_0) + \beta + w$, где $\nu - \alpha_0 \in K_\nu, \beta \in K_\nu, w \in C$. Для произвольного $s \in C_\nu \cap C$ справедливы неравенства $\langle s, \nu - \alpha_0 \rangle \geq 0, \langle s, \beta \rangle \geq 0, \langle s, w \rangle \geq 0$, тогда $\langle s, x \rangle \geq 0$. Это означает, что множество X принадлежит пересечению полупространств $\{x : \langle s, x \rangle \geq 0\}$

$$X \subset \bigcap_{s \in C_\nu \cap C} \{x : \langle s, x \rangle \geq 0\}.$$

Очевидно, что каждое из этих полупространств содержит C, следовательно, доказано второе утверждение предложения 4.

Подставим $f(x)$ из формулы (5) в уравнение (1), воспользуемся линейностью функционала Res и получим $\sum_\alpha c_\alpha f(x_\alpha) = Res(M(\lambda)\lambda^x)$, $x \in C$, но, по определению $\mathcal{M}_A$, ряд $M(\lambda)\lambda^x$ не содержит мономов λ^{-I}, поэтому для всех $x \in C$ получим $Res(M(\lambda)\lambda^x) = 0$. $\square$

Доказательство теоремы 1 следует из предложений 3 и 4. $\square$

Список литературы

[1] Гельфонд А.О. *Исчисление конечных разностей*/ А.О.Гельфонд. – М.: Гос. изд-во физ.-мат. лит., 1959.

[2] Gelfand I. *Discriminants, resultants and multidimentional determinants*/ I.Gelfand, M.Kapranov, A.Zelevinsky. – Birkhauser Verlag: Boston, 1994.

[3] Forsberg M. *Laurent Determinants and Arrangements of Hyperplane Amoebas* / M.Forsberg, M.Passare, A.Tsikh // Advances in Math. – 2000. – V. 151. – P.45–70.

[4] Даджион Д. *Цифровая обработка многомерных сигналов*/ Д.Даджион, О.Мерсеро. – М.: Мир, 1988.

[5] Риордан Дж. *Комбинаторные тождества* / Дж.Риордан. – М.: Наука, 1972.

[6] Лейнартас Е.К. *Кратные ряды Лорана и разностные уравнения*/ Е.К.Лейнартас // Сиб. матем. журн. – 2004. (в печати).

[7] Leinartas E. *On the Cauchy problem in a class of entire functions in several variables*/ E.Leinartas // Banach Center Publications. – 1995. – V. 38. – P. 189–192.

[8] Лейнартас Д.Е. *О задаче Коши для многомерного разностного уравнения с постоянными коэффициентами*/ Д.Е.Лейнартас // Известия вузов. Математика. – 2002. – №1. – С.79–80.

[9] Ронкин Л.И. *Введение в теорию целых функций многих комплексных переменных* / Л.И.Ронкин. – М.: Наука, 1971.

[10] Brion M. *Residue formulae, vector partition functions and lattice points in rational polytopes*/ M.Brion, M.Vergne // Journal of AMS. – 1997. – №4. – V. 10. – P. 797–833

MULTIDIMENSIONAL DIFFERENCE EQUATIONS AND AMOEBAS OF THEIR CHARACTERISTIC POLYNOMIALS

E.K.Leinartas

To describe the solution of the difference equation in the multidimentional case we make use of the notion of the amoeba of the characteristic polynomial.