УДК 517.55

ПОРЯДКИ РОСТА ЦЕЛЫХ ФУНКЦИЙ МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ[1]

Л.С.Маергойз*

Теория роста целых функций многих переменных имеет довольно длинную историю, насчитывающую почти 100 лет с момента опубликования монографии Э.Бореля [1]. Данная статья посвящена этому событию и содержит краткий обзор наиболее полного раздела теории асимптотических характеристик. Это теория порядков роста целых функций многих переменных. Для того чтобы сконцентрироваться на теме этой работы, мы оставляем без внимания многие важные результаты теории целых функций многих переменных. С целью последовательного изложения материала мы не придерживаемся хронологического порядка открытий. Статья представляет собой содержание доклада автора на Международных конференциях по комплексному анализу в гг. Красноярске и Ереване в 2002 г.

Напомним некоторые понятия теории роста функций одной переменной.

Определение 1. Пусть $\varphi(t),\ t > t_0$ — возрастающая функция одной переменной. Число

$$\rho = \rho[\varphi] = \overline{\lim_{t\to\infty}}\ (\ln t)^{-1} \cdot \ln^+ \varphi(t)$$

называется *порядком* φ. Если $\rho < \infty$, тогда число

$$\sigma = \sigma[\varphi] = \overline{\lim_{t\to\infty}}\ t^{-\rho} \cdot \varphi(t)$$

называется *типом* φ. Если $\varphi(r) = \ln^+ M_f(r)$, где $M_f(r)$ — максимум модуля целой функции $f(z)$, мы называем *порядком и типом* f соответственно порядок и тип φ.

Выберем множество $Q = \{\psi(t) = \tau t^\gamma\ :\ \tau, \gamma > 0\}$ в качестве шкалы роста для класса N монотонно возрастающих функций конечного ненулевого порядка роста и типа.

Предложение 2. *Пусть $\varphi \in N$. В шкале роста Q существует единственная функция ψ_0, асимптотически эквивалентная φ в следующем смысле:*

$$\overline{\lim_{t\to\infty}}\ \varphi(t)/\psi_0(t) = 1,$$

причем $\psi_0(t) = \sigma t^\rho$, где ρ и σ — соответственно порядок и тип φ.

Пусть $\varphi \in N$ и $\varphi(r) > 0$ для $r > r_0$. Обозначим $\Phi(u) = \ln \varphi(e^u)$. В обозначениях предложения 2 справедлива формула

$$\overline{\lim_{t\to\infty}}\ [\Phi(u) - \rho u - \ln \sigma] = 0.$$

Геометрически это означает, что плоская кривая $\{(u, y)\ :\ \ y = \Phi(u),\ u > u_0\}$ имеет "верхнюю асимптоту" $\psi(u) = \rho u + \ln \sigma$.

1. Порядок по совокупности переменных и порядок по каждой переменной

Основное понятие *порядка целой функции* $f(z_1, \dots, z_n),\ n > 1$ *по совокупности переменных* $z_1, \dots, z_n$ было введено Э.Борелем [1] следующим образом:

$$\rho(f) = \overline{\lim_{R\to\infty}}\ (\ln R)^{-1} \ln^+ \ln^+ M_f(R, \dots, R), \tag{1}$$

где $M_f(r)$ — максимум модуля f в полидиске $\{z \in \mathbb{C}^n\ :\ |z_j| \leqslant r_j,\ j = 1, ..., n\}$.

Порядок $\rho(f)$ совпадает с порядком следа

$$\Phi_f(r) = \ln^+ M_f(r), \quad r \in \mathbb{R}^n_0 := \{r \in \mathbb{R}^n\ :\ r_1 > 0, \dots, r_n > 0\}$$

на "радиальном луче" $\{r \in \mathbb{R}^n_0\ :\ r_1 = \dots = r_n\}$.

[1]Работа поддержана грантом РФФИ 03-01-00460 и грантом Президента РФ для ведущих научных школ НШ-1212.2003.1.

Наряду с $\rho(f)$ могут быть введены аналогичные характеристики, отражающие рост некоторых функций, ассоциированных с f, таких как максимальный член

$$\mu_f(r) = \max\{|a_k|r^k : \ k \in \mathbb{Z}_+^n\}, \quad r \in \mathbb{R}_+^n \ ,$$

где

$$\mathbb{Z}_+ = \mathbb{N} \cup \{0\}, \ \ \mathbb{R}_+^n = \{r \in \mathbb{R}^n : \ \ r_1 \geqslant 0, \dots , r_n \geqslant 0\}, \ \ r^k = r_1^{k_1} \dots r_n^{k_n},$$

а a_k — коэффициенты Тейлора функции f, и ее характеристика Неванлинны

$$m(r; f) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_0^{2\pi} \cdots \int_0^{2\pi} \ln^+ |f(r_1 e^{i\theta_1}, \dots , r_n e^{i\theta_n})| d\theta_1 \dots d\theta_n. \tag{2}$$

Все эти функции — плюрисубгармонические в $\mathbb{C}^n$ и зависят только от модулей переменных $z_1, \dots , z_n$. Класс всех функций, заданных в $\mathbb{C}^n$ и обладающих этими двумя свойствами, обозначим через $\mathfrak{U}$. Рассмотрим порядок $\rho_i(\Phi; r_1, \dots , [r_i], \dots , r_n)$ функции $\Phi \in \mathfrak{U}$ по переменной r_i.
Теорема 3([1], [2]). *Пусть $\Phi \in \mathfrak{U}$. Для каждого $i \in \{1, \dots , n\}$ и для всех $r_j > 0$, $j = 1, \dots , [i], \dots , n$ мы имеем $\rho_i(\Phi; r_1, \dots , [r_i], \dots , r_n) \ \equiv \rho_i(\Phi)$, где $\rho_i(\Phi)$ — постоянная, зависящая только от номера i.*
Определение 4. Пусть $\Phi \in \mathfrak{U}$. Величина $\rho_i(\Phi)$ называется *порядком* функции Φ *по переменной* r_i, $i = 1, \dots , n$, а величина

$$\rho(\Phi) := \varlimsup_{R\to\infty} \ \ (\ln R)^{-1} \ln^+ \Phi(R, \dots , R)$$

называется *порядком* Φ *по совокупности переменных* (см. (1) и теорему 3). Говорят, что Φ *имеет конечный порядок*, если $\rho(\Phi) < \infty$.
Предложение 5. *Для каждой функции $\Phi \in \mathfrak{U}$ справедливо неравенство*

$$\max_{1\leqslant i\leqslant n} \{\rho_i(\Phi)\} \leqslant \rho(\Phi) \leqslant \sum_{i=1}^n \rho_i(\Phi).$$

Предложение 5 было получено Э.Борелем [1] и позднее Ж.Валироном [3] в несколько более общей форме. Здесь и в дальнейшем мы отсылаем читателя к монографиям [2] и [3], где даны детальные ссылки на оригинальные работы.

Пусть $\mathbb{R}_0^n = \{r = (r_1, \dots , r_n) \in \mathbb{R}^n : r_1 > 0, \dots , r_n > 0\}$. Оказывается, что след Φ на каждом другом луче $L \subset \mathbb{R}_0^n$ с вершиной в $0 \in \mathbb{R}^n$ имеет тот же порядок. Верно следующее обобщение теоремы 3.
Предложение 6 (А.А.Гольдберг [3]). *Для каждой функции $\Phi \in \mathfrak{U}$ и любого $r \in \mathbb{R}_0^n$ порядок функции $\varphi_r(R; \Phi) := \Phi(r_1 R, \dots , r_n R)$, где $R > 0$, равен $\rho(\Phi)$* (см. определение 4).

Порядок $\rho(\Phi)$ равен порядку функции $\ln M_\Phi(R; G)$, где

$$M_\Phi(R; G) = \max\{\Phi(r_1 R, \dots , r_n R) : r \in G\} \tag{3}$$

и $G = \{r \in \mathbb{R}_+^n \ : \ \ 0 \leqslant r_j \leqslant 1, \ j = 1, \dots , n\}$ единичный куб. Подобные понятия рассматривались многими авторами для других областей исчерпания $\{G\}$. Например, П.Лелон брал $G = \{r \in \mathbb{R}_+^n : |r| \leqslant 1\}$; А.А.Темляков брал $G = \{r \in \mathbb{R}_+^n : \|r\| \leqslant 1\}$. Широкий набор областей G рассмотрел А.А.Гольдберг [3].
Определение 7. Множество G в $\mathbb{R}_+^n$ называется *полным* в $\mathbb{R}_+^n$, если с каждой точкой x содержит множество, $\Pi_x^+ = \{u \in \mathbb{R}_+^n : 0 \leqslant u_i \leqslant x_i, \, i = 1, \dots , n\}$. Множество $G \subset \mathbb{R}_+^n$ называется *октантообразным*, если $\{u \in \mathbb{R}_+^n : u_i \geqslant x_i, \, i = 1, \dots , n\} \subset G$ для всех $x \in G$.

Сформулируем обобщение предложения 6.
Предложение 6′ (А.А.Гольдберг [3]). *Пусть $\Phi \in \mathfrak{U}$ и пусть $\mathfrak{B} = \{G\}$ — класс замкнутых ограниченных областей, полных в $\mathbb{R}_+^n$. В обозначениях предложения* 6 *и формулы* (3) *порядок $\rho = \rho(G)$ функции* $\ln M_\Phi(R; G)$ *равен порядку $\rho(\Phi)$ функции* Φ (см. (3)), *какова бы ни была область $G \in \mathfrak{B}$.*

А.А.Гольдберг [3] показал, что тип этой функции зависит от области G.

2. Гиперповерхность сопряженных порядков

Понятие гиперповерхности сопряженных порядков для целой функции двух переменных было введено Л.Баумгартнером в 1914 г. В течение долгого времени работа Л.Баумгартнера была забыта математиками. Для различных подклассов эти и близкие понятия, связанные с различными методами исчерпания $\mathbb{R}_+^n$, рассматривались М.М.Джрбашяном, Л.И.Ронкиным и А.А.Гольдбергом.

Пусть $\Phi \in \mathfrak{U}$. Рассмотрим множество $B(\Phi)$ всех точек $a \in \mathbb{R}^n_+$ со свойством

$$\Phi(r) < r_1^{a_1} + \cdots + r_n^{a_n}, \ |r| > r_0 = r_0(a; \Phi). \tag{4}$$

Если множество $B(\Phi)$ не пусто, оно является октантообразным (см. определение 7) и выпуклым.
Определение 8. Если множество $B(\Phi)$ не пусто, тогда его граница $S = S(\Phi)$ называется *гиперповерхностью сопряженных порядков* функции Φ, а набор координат $(\gamma_1, \ldots, \gamma_n)$ произвольной точки $\gamma \in S$ называется *системой сопряженных порядков* Φ.
Предложение 9 ([2],[3]). *В предположениях определения* 8 *пусть* $(\gamma_1, \ldots, \gamma_n)$ *— система положительных сопряженных порядков функции* Φ (см. (4)). *Тогда*

$$\varlimsup_{|r|\to\infty} \frac{\ln^+ \Phi(r)}{\ln\, (r_1^{\gamma_1} + \cdots + r_n^{\gamma_n})} = 1.$$

Эта формула остается справедливой, если $\ln\ r_1 : \cdots : \ln\ r_n \to \gamma_1^{-1} : \cdots : \gamma_n^{-1}$.

3. Порядок-функция и порядок-гиперповерхность

Все утверждения этого раздела можно найти в [3, гл. 6].

Естественно рассмотреть все направления роста функции Φ на бесконечности. Они могут быть описаны с помощью системы параболических лучей в $\mathbb{R}^n_0$, т.е. системы лучей в логарифмической системе координат. Тогда рост Φ характеризуется некоторой функцией специального вида.
Определение 10. *Порядок-функция* функции $\Phi \in \mathfrak{U}$ — это функция в $\mathbb{R}^n$, определяемая соотношением

$$\rho_\Phi(u) = \varlimsup_{R\to\infty}\ (\ln R)^{-1} \ln^+ \Phi(R^{u_1}, ..., R^{u_n}),\ u \in \mathbb{R}^n. \tag{5}$$

Множество $T_\Phi = \{u \in \mathbb{R}^n :\ \rho_\Phi(u) = 1\}$ называется *порядок-гиперповерхностью* Φ.

Для фиксированного $x \in \mathbb{R}^n_0$ величина (5) ("x-порядок") была введена А.А.Гольдбергом. Если $n = 1$, тогда $\rho_\Phi(u) = \max\{0, \gamma u\}$, где γ — порядок $\Phi(t)$, т.е. порядок-функция $\rho_\Phi(u)$ и порядок γ определяют друг друга. Заметим, что $\rho_i(\Phi) = \rho_\Phi(e_i)$ для $i = 1, ..., n$, $\rho(\Phi) = \rho(1, \ldots, 1)$ (см. определение 4).

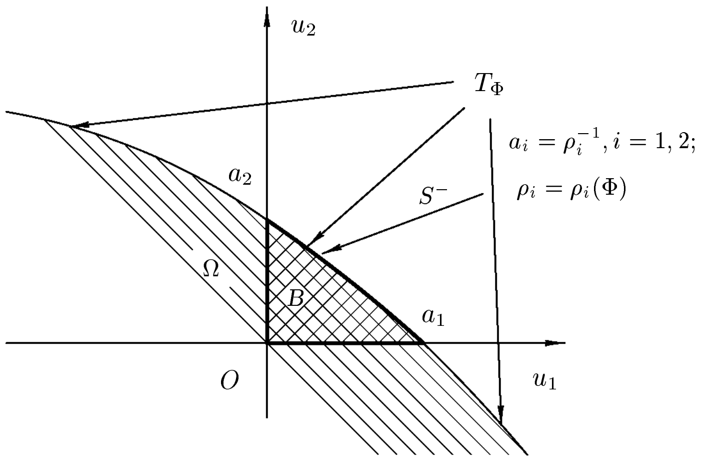

Рис. 1

Теорема 11. *Пусть* $\Phi \in \mathfrak{U}$. *Порядок-функция* $\rho_\Phi(u)$ *— неотрицательная сублинейная функция в* $\mathbb{R}^n$, *неубывающая по каждой переменной. Обозначим через* Y *класс конечных функций в* $\mathbb{R}^n$, *неравных тождественно 0 и обладающих теми же свойствами. Тогда* $\{\rho_\Phi :\ \Phi \in \mathfrak{M}_n\} = Y$, *где в обозначениях определения* 4

$$\mathfrak{M}_n = \{\Phi \in \mathfrak{U} : \quad 0 < \rho(\Phi) < \infty\}. \tag{6}$$

Поэтому, если $\Phi \in \mathfrak{M}_n$, то совокупность всех направлений $\{u \in \mathbb{R}^n :\ \rho_\Phi(u) > 0\}$ ненулевого порядка роста функции Φ — вогнутый конус в $\mathbb{R}^n$.

Следующее утверждение показывает взаимосвязь между гиперповерхностью сопряженных порядков $S(\Phi)$ и порядок-гиперповерхностью T_Φ.

Предложение 12. *Если* $\Phi \in \mathfrak{U}$, $S(\Phi) \cap \mathbb{R}_0^n \neq \varnothing$ *и*

$$S^- = \{(\gamma_1^{-1}, \dots, \gamma_n^{-1}) : \gamma \in S(\Phi) \cap \mathbb{R}_0^n\},$$

тогда $T_\Phi \cap \mathbb{R}_0^n = S^-$ (см. рис. 1).

Объясним геометрический смысл порядок-функции.

Пусть $\Phi \in \mathfrak{M}_n$ (см. (6)) и пусть $V(u) = \ln^+ \Phi(e^u)$ — выпуклая функция. Обозначим через $A(V)$ асимптотический конус выпуклого множества

$$\text{epi } V = \{(u, u_{n+1}) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} : \ u \in \mathbb{R}^n, \ u_{n+1} \geqslant V(u)\},$$

т.е. $A(V)$ — максимальный элемент (по отношению к операции вложения) множества всех конусов $\{X\}$ в $\mathbb{R}^{n+1}$ с вершиной в 0, удовлетворяющих условию $X + v \subset \text{epi } V$ для каждого $v \in \text{epi } V$. Тогда $A(V) = \text{epi } \rho_\Phi$, где ρ_Φ – порядок-функция Φ (см., например, [3, глава 1]). В общем случае порядок-функция ρ_Φ играет подобную роль.

Определение 13. Пусть $\Phi \in \mathfrak{M}_n$ и пусть $V(u) = \ln^+ \Phi(e^u)$, $u \in \mathbb{R}^n$. Обозначим символом Ω_V набор всех конусов K с вершиной в $0 \in \mathbb{R}^{n+1}$ таких, что сдвиг K может быть помещен в надграфик epi V функции V on $\mathbb{R}^n$. *Асимптотическим конусом* $\Pi(V)$ *надграфика* epi V назовем множество $\overline{\bigcup K | K \in \Omega_V}$.

Теорема 14. *Пусть* Φ *— произвольная функция класса* $\mathfrak{U}$ *конечного порядка* $\rho(\Phi)$ (см. определение 4). *Тогда асимптотический конус* $\Pi(V)$ *надграфика* epi V *функции* $V(u) = \ln^+ \Phi(e^u)$ *— выпуклое множество и* $\Pi(V) = \text{epi } \rho_\Phi$.

Если $V(u) = \ln^+ \Phi(e^u)$, где $\Phi \in \mathfrak{M}_n$, — выпуклая функция, тогда функция $V(u)$ мажорируется порядок-функцией ρ_Φ (см. [3, глава 1]): $V(u) \leqslant V(0) + \rho_\Phi(u) \ \forall \ u \in \mathbb{R}^n$. Подобное утверждение справедливо в общем случае.

Теорема 15. *Пусть* Φ *— произвольная функция в* $\mathfrak{M}_n$. *Для каждого* $\varepsilon > 0$ *существует постоянная* $C_\varepsilon > 0$ *такая, что*

$$\Phi(e^u) < C_\varepsilon \exp\{\rho_\Phi(u) + \varepsilon|u|\} \quad \forall \, u \in \mathbb{R}^n.$$

С помощью порядок-функции можно построить следующую шкалу роста для функций класса $\mathfrak{M}_n$ (см. (6)):

$$M_n = \{H(r; \varphi) = \tilde{\varphi}(r), \ r \in \mathbb{R}_+^n : \ \ \varphi \in Y\},$$

где Y — класс функций, встречающийся в теореме 11, а

$$\tilde{\varphi}(r) = \exp \, \{\varphi(\ln r_1, \dots, \ln r_n)\}, \quad r \in \mathbb{R}_0^n.$$

Каждая функция $\tilde{\varphi}(r)$ имеет следующее представление:

$$\tilde{\varphi}(r) = \sup \, \{r_1^{\alpha_1} \dots r_n^{\alpha_n} : \ \alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in K\}, \ r \in \mathbb{R}_0^n,$$

где K — некоторый фиксированный компакт в $\mathbb{R}_+^n$.

Для $n = 1$ мы получим $M_1 = \{\max\{r^\gamma, 1\} : \gamma > 0\}$; эта шкала эквивалентна при $r \to \infty$, шкале $\{r^\gamma : \gamma > 0\}$. Для $n > 1$ параметр шкалы M_n — функция, а не число или система чисел. Для $\varphi \in Y$ обозначим $D_\varphi = \{u \in \mathbb{R}^n : \ \varphi(u) > 0\}$ и $S^n = \{u \in \mathbb{R} : \ |u| = 1\}$. Функция $H(r; \varphi)$ шкалы класса M_n назовем *асимптотически эквивалентной* $\Phi \in \mathfrak{U}$, если $T_\varphi(y) \equiv 1$ для $y \in S^n \cap D_\varphi$, где

$$T_\varphi(y) = \overline{\lim_{|u| \to \infty; \ \frac{u}{|u|} \to y}} \quad [\varphi(u)]^{-1} \cdot \ln^+ \Phi(e^u).$$

Упомянем следующий факт.

Теорема 16. *Пусть* $\Phi \in \mathfrak{M}_n$, *и пусть* ρ_Φ *— порядок-функция функции* Φ. *Тогда* $H(r; \rho_\Phi)$ *— единственный элемент шкалы* M_n, *асимптотически эквивалентный* Φ, *и* $\{H(r; \rho_\Phi) : \Phi \in \mathfrak{M}_n = M_n\}$, *т.е.* M_n *— полная шкала роста для класса* $\mathfrak{M}_n$.

С.Боус и Д.Шарма [4], Дж.Кришна и И.Рао рассматривали функции сравнения вида $Ar_1^{y_1} \dots r_n^{y_n}$, близкие к порядок-функции.

4. Порядок-функция и коэффициенты Тейлора целой функции

Теорема 17. *Пусть* $D = \{u \in \mathbb{R}^n : \max\{u_1, \ldots, u_n\} > 0\}$. *Для целой функции* $f(z) = \sum\limits_{\|k\| \geq 0} a_k z^k$, $z^k = z_1^{k_1} \ldots z_n^{k_n}$ *мы полагаем*

$$\beta_f(u) = \varlimsup_{\langle k,u\rangle \to \infty} \langle k, u\rangle \ln\langle k, u\rangle (-\ln|a_k|)^{-1}, \ u \in D,$$

где $(-\ln|a_k|)^{-1} = 0$ *if* $a_k = 0$. *Тогда порядок-функция* $\rho_f(u)$ *совпадает с* $\beta_f(u)$, $u \in D$.

Эта формула для $x \in \mathbb{R}_0^n$ принадлежит А.А.Гольдбергу, а для $x \in \mathbb{R}^n$ — автору [3].

Следствие 18. *Система* $(\gamma_1, \ldots, \gamma_n)$ *положительных чисел — система сопряженных порядков целой функции* $f(z) = \sum\limits_{\|k\| \geqslant 0} a_k z^k$ *тогда и только тогда, когда*

$$\varlimsup_{\|k\| \to \infty} (-\ln|a_k|)^{-1} \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{k_i}{\gamma_i} \ln k_i \right) = 1.$$

5. Сравнительный рост функций, ассоциированных с целой функцией

Рассмотрим следующие функции, ассоциированные с целой функцией f: максимум модуля M_f, максимальный член

$$\mu_f(r) = \max\{|a_k| r_1^{k_1} \ldots r_n^{k_n} : \ \ k \in \mathbb{Z}_+^n\},$$

функцию

$$S_f(r) = \sum_{\|k\| \geqslant 0} |a_k| r_1^{k_1} \ldots r_n^{k_n}, \qquad r \in \mathbb{R}_+^n$$

и характеристику Неванлинны $m(r, f)$ (см. (2)).

Теорема 19 ([3, гл. 7]). *Для каждой целой функции* f *функции*

$$\ln^+ M_f(r), \ \ln^+ \mu_f(r), \ m(r, f), \ \ln^+ S_f(r),$$

имеют одну и ту же порядок-функцию и общую порядок-гиперповерхность.

Список литературы

[1] Borel E. *Leçons sur les séries a termes positifs.* / E. Borel. – Paris, 1902.

[2] Ронкин Л.И. *Введение в теорию целых функций многих переменных* / Л.И.Ронкин. – М.: Наука, 1971.

[3] Маергойз Л.С. *Асимптотические характеристики целых функций и их приложения в математике и биофизике* / Л.С. Маергойз. – Новосибирск: Наука, 1991.

[4] Bose S.K. *Integral function of two complex variables* / S.K.Bose, D.Sharma // Comp. Math. – 1963. – V. 15. – P. 210–226.

GROWTH ORDERS OF ENTIRE FUNCTIONS OF MANY VARIABLES

L.S.Maergoiz

The growth theory of entire functions of many variables has a fairly long history, counting now precisely 100 years if we start with the publication of the monograph [1] by E. Borel. The present paper is devoted to this anniversary and contains a short survey of the most complete section of the asymptotic characterisics theory. It is the theory of growth orders of entire functions of many variables. In concentrating entirely on the subject matter of the title, we are ignoring the standard body of the important work that has been done on the entire functions of many variables. In order to present the material fluently we do not proceed to chronological order of discovery. The paper contains the talk of the author on the international conferences on complex analysis in Krasnoyarsk and Yerevan in 2002.