

ГИДРОДИНАМИКА

УДК 532.5.013

О ДВИЖЕНИИ ПЛОСКОГО СЛОЯ ЖИДКОСТИ СО СВОБОДНОЙ ГРАНИЦЕЙ ПОД ДЕЙСТВИЕМ ЭФФЕКТА СОРЕ¹

В.К. Андреев, А.Е. Картошкина*

Исследовано движение плоского слоя со свободными границами, когда коэффициент поверхностного натяжения зависит от температуры и концентрации. Приведены результаты расчетов скорости, границы, температуры и концентрации.

1. Основные уравнения и граничные условия

Рассмотрим движение бинарной смеси в отсутствие внешних сил (условие полной невесомости) [1]:

$$\mathbf{u}_t + \mathbf{u} \nabla \mathbf{u} = -\frac{1}{\varrho} \nabla p + \nu \Delta \mathbf{u}, \quad (1)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{u} = 0, \quad (2)$$

$$\theta_t + \mathbf{u} \cdot \nabla \theta = \chi \Delta \theta, \quad (3)$$

$$c_t + \mathbf{u} \cdot \nabla c = d \Delta c + \alpha \Delta \theta, \quad (4)$$

где $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ — вектор скорости смеси; $\theta(\mathbf{x}, t)$, $c(\mathbf{x}, t)$ — отклонения от средних значений температуры и концентрации; ϱ, ν, χ, d — постоянные плотность, кинематическая вязкость, температуропроводность и коэффициент диффузии смеси, а $\alpha = \operatorname{const}$ — коэффициент Соре. Система (1)–(4) называется системой уравнений термодиффузионного движения. Она учитывает диффузионный поток вещества и за счет градиентов температуры [2].

Сформулируем для системы (1)–(4) задачу со свободной границей [3]. Пусть Γ — свободная граница области Ω , в которой ищут решение системы (1)–(4). Тогда на ней выполнены динамическое условие

$$(p_{\text{gas}} - p)\mathbf{n} + 2\varrho\nu D(\mathbf{u})\mathbf{n} = 2\sigma H\mathbf{n} + \nabla_{\Gamma}\sigma \quad (5)$$

и кинематическое условие ($f(\mathbf{x}, t) = 0$ есть уравнение Γ)

$$f_t + \mathbf{u} \cdot \nabla f = 0. \quad (6)$$

В (5) p_{gas} — давление в газе, $\mathbf{n}$ — внешняя нормаль к Γ , $D(\mathbf{u})$ — тензор скоростей деформации, H — средняя кривизна Γ , $\sigma(\theta, c)$ — коэффициент поверхностного натяжения, причем для многих смесей он хорошо аппроксимируется линейной зависимостью:

$$\sigma(\theta, c) = \sigma_0 - \alpha(\theta - \theta_0) - \alpha_1(c - c_0), \quad (7)$$

где σ_0, θ_0, c_0 — значения σ, θ и c в некоторой контрольной точке Γ , а α, α_1 — постоянные.

Условие теплообмена смеси с газом запишется так:

$$k \frac{\partial \theta}{\partial n} + \gamma(\theta - \theta_{\text{gas}}) = Q, \quad (8)$$

где k — постоянный коэффициент теплопроводности, γ — постоянный коэффициент теплообмена.

¹Работа поддержана грантом РФФИ № 02-01-00934.

*© В.К. Андреев, А.Е. Картошкина, Институт вычислительного моделирования СО РАН, 2004.

Еще одно условие на Γ

$$d \frac{\partial c}{\partial n} + \alpha \frac{\partial \theta}{\partial n} = 0 \quad (9)$$

есть отсутствие потока вещества через свободную поверхность. Тем самым не учитывается влияние поверхностно-активных веществ на Γ .

Если имеется неподвижная твердая стенка Σ , то на ней задаются условия прилипания

$$\mathbf{u}|_{\Sigma} = 0, \quad (10)$$

отсутствия потока вещества (9) и одно из условий для температуры

$$\theta|_{\Sigma} = \theta_{cm} \quad \text{либо} \quad \frac{\partial \theta}{\partial n} \Big|_{\Sigma} = Q_{cm}. \quad (11)$$

Для полной определенности решения необходимо задать и начальные условия

$$\mathbf{u}|_{t=0} = \mathbf{u}_0, \quad \operatorname{div} \mathbf{u}_0 = 0, \quad \theta|_{t=0} = \theta_0, \quad c|_{t=0} = c_0, \quad f|_{t=0} = f_0. \quad (12)$$

В данной работе будут рассматриваться только двумерные движения смеси. Поэтому приведем уравнения (1)–(4) для этого случая в координатном виде. Пусть $u_1(x, y, t)$, $u_2(x, y, t)$ — координаты вектора скорости. Тогда система (1)–(4) запишется так:

$$\begin{aligned} u_{1t} + u_1 u_{1x} + u_2 u_{1y} + \frac{1}{\rho} p_x &= \nu(u_{1xx} + u_{1yy}), \\ u_{2t} + u_1 u_{2x} + u_2 u_{2y} + \frac{1}{\rho} p_y &= \nu(u_{2xx} + u_{2yy}), \\ u_{1x} + u_{2y} &= 0, \\ \theta_t + u_1 \theta_x + u_2 \theta_y &= \chi(\theta_{xx} + \theta_{yy}), \\ c_t + u_1 c_x + u_2 c_y &= d(c_{xx} + c_{yy}) + \alpha(\theta_{xx} + \theta_{yy}). \end{aligned} \quad (13)$$

2. Задача о движении плоского слоя

Основная алгебра Ли группы непрерывных преобразований для системы (13) вычислена в работе [4]. Рассмотрим ее четырехмерную подалгебру $\langle \partial_x, t\partial_x + \partial_u, \partial_\theta, \partial_c \rangle$. Следуя [5], можно показать, что инвариантных решений на этой подалгебре система (13) не имеет. Однако существуют частично инвариантные решения вида

$$u_1 = u_1(x, y, t), \quad u_2 = v(y, t), \quad p = q(y, t), \quad \theta = \theta(x, y, t), \quad c = c(x, y, t). \quad (14)$$

Из уравнения сохранения массы (третье уравнение в системе (13)) следует, что u_1 есть линейная функция от x . Положим для простоты

$$u_1 = xu(y, t). \quad (15)$$

Общий вид инвариантного многообразия группы, порожденной указанной выше подалгеброй, в пространстве $\{x, y, t\}$ есть $y = l(t)$ с произвольной функцией $l(t)$. Она и будет описывать положение свободной границы. В этом случае средняя кривизна $H = 0$, $\mathbf{n} = (0, 1)$, $D\mathbf{n} = (xu_y/2, v_y)$, $\nabla_\Gamma \sigma = (\sigma_x, 0)$. Поэтому динамическое условие (5) с учетом соотношения (7) дает два равенства при $y = l(t)$:

$$\rho \nu x u_y = -\varkappa \theta_x - \varkappa_1 c_x, \quad p_{\text{gas}} - q + 2\rho \nu v_y = 0. \quad (16)$$

Из первого граничного условия (16) вытекает, что температура и концентрация есть квадратичные функции переменной x , которые возьмем в виде

$$\theta = a(y, t)x^2 + b(y, t), \quad c = h(y, t)x^2 + g(y, t). \quad (17)$$

Подстановка выражений (14), (15), (17) в (13) приводит к системе уравнений

$$u_t + vu_y + u^2 = \nu u_{yy}, \quad (18)$$

$$u + v_y = 0, \quad (19)$$

$$a_t + va_y + 2au = \chi a_{yy}, \quad (20)$$

$$h_t + vh_y + 2hu = dh_{yy} + \alpha a_{yy}, \quad (21)$$

$$\varrho^{-1} q_y = \nu v_{yy} - vv_y - v_t, \quad (22)$$

$$b_t + vb_y = \chi b_{yy} + 2\chi a, \quad (23)$$

$$g_t + vg_y = dg_{yy} + \alpha b_{yy} + 2dh + 2\alpha a, \quad (24)$$

которую требуется решить при $t > 0$, $0 < y < l(t)$. Краевые условия на неизвестной границе $y = l(t)$ для системы (18)–(24) следуют из (6), (8), (9), (16) и имеют вид

$$\frac{dl}{dt} = v(l(t), t), \quad (25)$$

$$da_y + \gamma a = \gamma a_{\text{gas}}, \quad (26)$$

$$kb_y + \gamma b = \gamma b_{\text{gas}} + Q, \quad (27)$$

$$dh_y + \alpha a_y = 0, \quad (28)$$

$$dg_y + \alpha b_y = 0, \quad (29)$$

$$\varrho \nu u_y = -2\alpha a - 2\alpha_1 h, \quad (30)$$

$$p_{\text{gas}} - q + 2\varrho \nu v_y = 0. \quad (31)$$

Предположим, что u , q , a , b , h , g являются четными, а v — нечетной функцией переменной y . Тогда поверхность $y = -l(t)$ можно принять за вторую свободную границу, а к (25)–(31) следует добавить условия симметрии

$$u_y = 0, \quad v = 0, \quad a_y = 0, \quad h_y = 0 \quad (t \geq 0, y = 0), \quad (32)$$

$$q_y = 0, \quad b_y = 0, \quad g_y = 0, \quad (t \geq 0, y = 0) \quad (33)$$

и начальные данные при $t = 0$

$$\begin{aligned} l = l_0 > 0, \quad u = u_0(y), \quad v = v_0(y), \quad a = a_0(y), \quad h = h_0(y), \\ g = g_0(y), \quad b = b_0(y) \quad (0 \leq y \leq l_0). \end{aligned} \quad (34)$$

Здесь l_0 — заданная постоянная; u_0 , v_0 , a_0 , h_0 , b_0 , g_0 — заданные функции от y , причем $dv_0/dy = -u_0$.

Отметим, что для решения (14), (15) градиент давления всегда убывает, поскольку из (22)

$$q_{yy} + 2\varrho u^2 = 0.$$

При надлежащих условиях гладкости и согласования входных данных можно доказать существование и единственность решения задачи (18)–(34). Это доказательство следует работе [6] и здесь опускается ввиду его громоздкости. Основной интерес представляет численное решение указанной задачи. Для этого необходимо знание каких-либо точных (тестовых) решений.

3. Решения специального вида

Предположим, что в сформулированной выше задаче (18)–(34) функция u зависит только от времени: $u = u(t)$. Тогда из (18)

$$u = \frac{m}{1 + mt} \quad (35)$$

с произвольной постоянной m , а из (19)

$$v = -\frac{m}{1 + mt} y. \quad (36)$$

Здесь учтено условие симметрии (32) для функции $v(y, t)$.

Подстановка $v(y, t)$ в (22) и интегрирование по y дает представление для давления

$$p = q(y, t) = -\rho m^2 (1 + mt)^{-2} y^2 + \mu(t) \quad (37)$$

с произвольной функцией $\mu(t)$.

Из граничного условия (25) находим положение свободной поверхности

$$l(t) = l_0 (1 + mt)^{-1}, \quad (38)$$

где $l_0 > 0$ — постоянная.

Условие (31) для нормального напряжения позволяет определить функцию $\mu(t)$ в (37) по формуле

$$\mu(t) = p_{\text{gas}} + \rho m^2 l_0^2 (1 + mt)^{-2} - 2\rho \nu m (1 + mt)^{-1}. \quad (39)$$

Здесь давление в газе может зависеть только от времени.

Таким образом, в смеси имеется линейное поле скоростей

$$u_1 = m(1 + mt)^{-1} x, \quad u_2 = -m(1 + mt)^{-1} y.$$

Давление дается формулами (37), (39), а эволюция свободной границы описывается соотношением (38). Все эти величины определяются только гидродинамикой движения. Что касается температуры и концентрации, то для их определения необходимо решить краевые задачи (20), (21), (23), (24), (26), (27), (29) с условиями симметрии (32), (33) и начальными данными (34) для этих функций. В общем случае получаются очень громоздкие формулы для решения данных задач. Поэтому положим в (26), (27) $\gamma = 0$, $Q = 0$, так что

$$a_y = b_y = 0 \quad (y = l_0 (1 + mt)^{-1}). \quad (40)$$

Далее, согласно (35) $u_y = 0$, и условие (30) сводится к следующему:

$$\mathfrak{x}a = -\mathfrak{x}_1 h \quad (y = l_0 (1 + mt)^{-1}). \quad (41)$$

Всюду ниже считаем $m > 0$; при этом $l(t) \rightarrow 0$ для $t \rightarrow \infty$. Случай $m < 0$ физически менее интересен.

Естественно начать с определения функции $a(y, t)$, удовлетворяющей параболическому уравнению (20), первому условию (40), условию симметрии $a_y = 0$ (32) и начальному условию (34) $a = a_0(y)$. Подстановка явных выражений (35) для u и (36) для v в (20) приводит к линейному уравнению

$$a_t - \frac{m}{1 + mt} y a_y + \frac{2m}{1 + mt} a = \chi a_{yy},$$

которое необходимо решить в области $t > 0$, $0 < y < l_0 (1 + mt)^{-1}$. Поэтому здесь уместно ввести лагранжеву переменную η с помощью равенства $y = \eta (1 + mt)^{-1}$, тогда $0 < \eta < l_0$. Если обозначить $a(y, t) = a(\eta, t)$, то $A_t = a_t - m(1 + mt)^{-1} y a_y$, $a_y = (1 + mt) A_\eta$ и уравнение для $A(\eta, t)$ примет вид

$$A_t + \frac{2m}{1 + mt} A = \chi (1 + mt)^2 A_{\eta\eta}$$

уже в фиксированной области $0 < \eta < l_0$.

Если сделать еще одну замену $A_1 = (1 + mt)^2 A$, $\tau = [(1 + mt)^3 - 1]/(3m)$, то последнее уравнение сведется к уравнению теплопроводности

$$A_{1\tau} = \chi A_{1\eta\eta}$$

с граничными условиями $A_{1\eta} = 0$ при $\eta = 0$, $\eta = l_0$ и начальными данными $A_1(\eta) = a_0(\eta)$ при $\tau = 0$. Решение этой второй начально-краевой задачи хорошо известно [7]. Приведем сразу вид функции $a(y, t)$:

$$a(y, t) = \frac{1}{(1 + mt)^2} \sum_{n=0}^{\infty} a_n \exp(-\chi \lambda_n^2 \tau) \cos[\lambda_n(1 + mt)y], \quad (42)$$

где

$$a_n = \frac{2}{l_0} \int_0^{l_0} a_0(\eta) \cos \lambda_n \eta d\eta, \quad \lambda_n = \frac{n\pi}{l_0}, \quad n \in N, \quad \tau = \frac{(1 + mt)^3 - 1}{3m}.$$

Ряд (42) очень быстро сходится [7] благодаря наличию экспоненциального сомножителя.

Точно так же находится функция $b(y, t)$ как решение уравнения (23) со вторым краевым условием (40), условием симметрии $b_y = 0$ при $y = 0$ и начальным условием (34) $b(y, 0) = b_0(y)$. С учетом (42) после простых вычислений получим представление для $b(y, t)$:

$$b(y, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(b_n + \frac{2\chi a_n t}{1 + mt} \right) \exp(-\chi \lambda_n^2 \tau) \cos[\lambda_n(1 + mt)y], \quad (43)$$

$$b_n = \frac{2}{l_0} \int_0^{l_0} b_0(\eta) \cos \lambda_n \eta d\eta.$$

Функция $h(y, t)$ есть решение неоднородного уравнения (21) с граничным условием (28), которое сводится к $h_y = 0$, условием симметрии (32) $h_y = 0$ при $y = 0$ и начальным условием (34) $h(y, 0) = h_0(y)$. Именно,

$$h(y, t) = \frac{1}{(1 + mt)^2} \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ h_n \exp(-d \lambda_n^2 \tau) + \frac{\alpha a_n}{\chi - d} [\exp(-\chi \lambda_n^2 \tau) - \exp(-d \lambda_n^2 \tau)] \right\} \cos[\lambda_n(1 + mt)y], \quad h_n = \frac{2}{l_0} \int_0^{l_0} h_0(\eta) \cos \lambda_n \eta d\eta, \quad \chi \neq d; \quad (44)$$

$$h(y, t) = \frac{1}{(1 + mt)^2} \sum_{n=0}^{\infty} (h_n - \alpha \lambda_n^2 a_n \tau) \exp(-d \lambda_n^2 \tau) \cos[\lambda_n(1 + mt)y], \quad \chi = d. \quad (45)$$

Наконец, функция $g(y, t)$ определяется из (24), (33), (34) с учетом формул (42)–(45):

$$g(y, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \left[g_n + \int_0^{\tau} f_n(\tau) d\tau \right] \exp(-d \lambda_n^2 \tau) \cos[\lambda_n(1 + mt)y],$$

$$f_n(\tau) = \frac{2dz_n(\tau)}{(1 + mt)^4} + \alpha \left\{ \frac{2a_n}{1 + mt} \left[\frac{1}{(1 + mt)^3} - \chi \lambda_n^2 t \right] - \lambda_n^2 b_n \right\} \exp[\lambda_n \tau (d - \chi)], \quad (46)$$

$$z_n(\tau) = \begin{cases} h_n + \frac{\alpha a_n}{\chi - d} \{ \exp[\lambda_n^2 \tau (d - \chi)] - 1 \}, & d \neq \chi, \\ h_n - \alpha \lambda_n^2 a_n \tau, & d = \chi. \end{cases}$$

По известным функциям $a(y, t)$, $b(y, t)$, $h(y, t)$, $g(y, t)$ поля температуры и концентрации восстанавливаются с помощью равенств (17). Нетрудно видеть из (44), (45) и (41), что должно быть $\alpha = \alpha_1 = 0$, т.е. это решение возможно лишь при постоянном поверхностном натяжении: $\sigma = \sigma_0$. Другой вид решения можно получить, если потребовать $a = h = 0$ при $y = l_0(1 + mt)^{-1}$. Это равносильно тому, что на свободной границе задана температура, а не теплообмен с окружающей средой (8).

Ниже решение (35), (36), (38), (42)–(46) будет использовано в качестве теста при отработке схемы численного решения.

4. Преобразование исходной задачи

Можно видеть, что первые четыре уравнения системы (18)–(24) не зависят от остальных: (22)–(24). Они образуют вместе с (25), (26), (28), (30), (32), (34) замкнутую начально-краевую задачу для определения функций $u(y, t)$, $v(y, t)$, $a(y, t)$, $h(y, t)$ и $l(t)$. После ее решения функция $q(y, t)$ однозначно восстанавливается квадратурой из (22) и соотношения (31); при этом равенство $q_y = 0$ при $y = 0$ выполняется автоматически. Если $a(y, t)$, $h(y, t)$, $l(t)$ известны, то функции $b(y, t)$, $g(y, t)$ определяются единственным образом как решения вторых краевых задач (23), (27), (33), (34) и (24), (29), (33), (34) для линейных параболических уравнений. Поэтому будем решать задачу (18)–(21), (25), (26), (28), (30), (32), (34).

В свою очередь эту задачу можно свести к задаче об отыскании только функций $u(y, t)$, $a(y, t)$, $h(y, t)$, $l(t)$. Для этого проинтегрируем уравнение (19) с учетом $v(0, t) = 0$ и исключим функцию $v(y, t)$ в уравнениях (18), (20), (21).

Если еще в полученной системе для u , a , h , l ввести безразмерные переменные и функции равенствами

$$\tau = \frac{\nu}{l_0^2} t, \quad z = \frac{y}{l(t)}, \quad U(z, \tau) = \frac{l_0^2}{\nu} u, \quad A(z, \tau) = \frac{l_0^2}{T_0} a, \quad H(z, \tau) = \frac{l_0^2}{c_0} h, \quad L(\tau) = \frac{l}{l_0}, \quad (47)$$

где T_0 — характерная температура, c_0 — характерная концентрация, то получим задачу уже в фиксированной области $0 < z < 1$:

$$M(U, L) \equiv U_\tau - (\ln L)_\tau z U_z - U_z \int_0^z U(z, \tau) dz + U^2 - \frac{1}{L^2} U_{zz} = 0, \quad (48)$$

$$F(U, A, L) \equiv A_\tau - (\ln L)_\tau z A_z - A_z \int_0^z U(z, \tau) dz + 2AU - \frac{1}{\text{Pr} L^2} A_{zz} = 0, \quad (49)$$

$$\begin{aligned} R(U, A, H, L) \equiv & H_\tau - (\ln L)_\tau z H_z - H_z \int_0^z U(z, \tau) dz + 2HU - \\ & - \frac{1}{\text{Pe} L^2} H_{zz} - \frac{\text{Sr}}{L^2} A_{zz} = 0. \end{aligned} \quad (50)$$

В (48)–(50) введены обозначения: $\text{Pr} = \nu/\chi$ — число Прандтля, $\text{Pe} = \nu/d$ — число Пекле, $\text{Sr} = \alpha T_0/(\nu c_0)$ — число Соре.

При $z = 0$ выполнены условия симметрии $A_z = U_z = H_z = 0$, а на свободной границе $z = 1$ имеем

$$A_z + L\text{Bi}(A - A_{\text{gas}}) = 0, \quad (51)$$

$$-\frac{1}{2L} U_z = \text{Ma}A + \text{Mc}H, \quad (52)$$

$$H_z + \text{Pr Sr} A_z = 0, \quad (53)$$

где $\text{Bi} = \gamma l_0/k$ — число Био, $\text{Ma} = \alpha T_0 l_0/(\rho \nu^2)$ — тепловое число Марангони, а $\text{Mc} = \alpha_1 c_0 l_0/(\rho \nu^2)$ — концентрационное число Марангони.

Эволюция свободной границы находится из уравнения (25). В безразмерных переменных (47) оно запишется так:

$$\frac{dL}{d\tau} = -L \int_0^1 U(z, \tau) dz. \quad (54)$$

Для полного завершения постановки задачи необходимо поставить начальные условия при $\tau = 0$:

$$U = U_0(z), \quad A = A_0(z), \quad H = H_0(z), \quad L = 1. \quad (55)$$

5. Численное решение

Решение задачи (48)–(55) определялось методом Галёркина. В качестве базисных функций были взяты полиномы Лежандра. Причем, как следует из условий симметрии, достаточно ограничиться только четными полиномами $P_{2m}(z)$, $m = 0, \dots$. Приближенное решение ищут в виде

$$U_n(z, \tau) = \sum_{m=0}^n U^m(\tau) P_{2m}(z), \quad A_n(z, \tau) = \sum_{m=0}^n A^m(\tau) P_{2m}(z),$$

$$H_n(z, \tau) = \sum_{m=0}^n H^m(\tau) P_{2m}(z). \quad (56)$$

При этом интересующее нас положение свободной границы (функция $L(\tau)$) определяется для всех n из уравнения (в силу ортогональности $P_{2m}(z)$ к единице при $m > 0$)

$$\frac{dL}{d\tau} = -L U^0(\tau). \quad (57)$$

Функции $U^m(\tau)$, $A^m(\tau)$, $H^m(\tau)$ ($m = 0, 1, \dots$) находят из системы

$$\int_0^1 M(U_n, L) P_{2m}(z) dz = 0, \quad \int_0^1 F(U_n, A_n, L) P_{2m}(z) dz = 0,$$

$$\int_0^1 R(U_n, A_n, H_n, L) P_{2m}(z) dz = 0, \quad (58)$$

$$\sum_{m=0}^n m(2m+1) A^m(\tau) + \text{Bi} L \left[\sum_{m=0}^n A^m(\tau) - A_{\text{gas}}(\tau) \right] = 0, \quad (59)$$

$$-\frac{1}{2L} \sum_{m=0}^n m(2m+1) U^m(\tau) = \text{Ma} \sum_{m=0}^n A^m(\tau) + \text{Mc} \sum_{m=0}^n H^m(\tau), \quad (60)$$

$$\sum_{m=0}^n m(2m+1) H^m(\tau) + \text{Pr Sr} \sum_{m=0}^n m(2m+1) A^m(\tau) = 0. \quad (61)$$

Здесь использованы свойства полиномов $P_{2m}(z)$ [8].

Систему (57)–(61) можно преобразовать в нормальную систему обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка относительно $3n+1$ неизвестной функции $U^m(\tau)$, $A^m(\tau)$, $H^m(\tau)$, $L(\tau)$, $m = 0, \dots, n-1$.

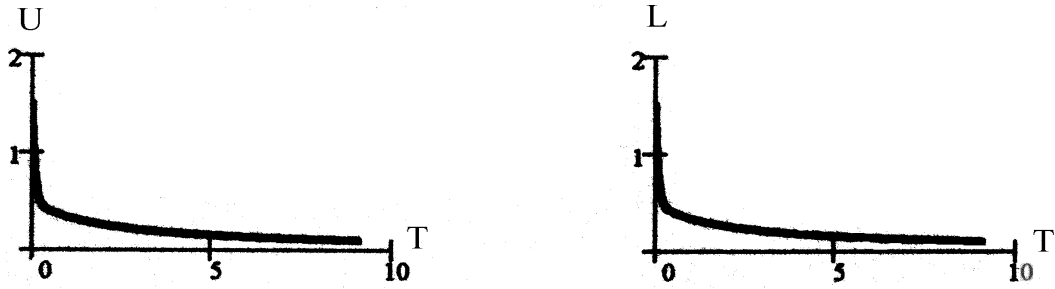


Рис. 1. Поведение функций $U(\tau)$ и $L(\tau)$ в случае точного решения

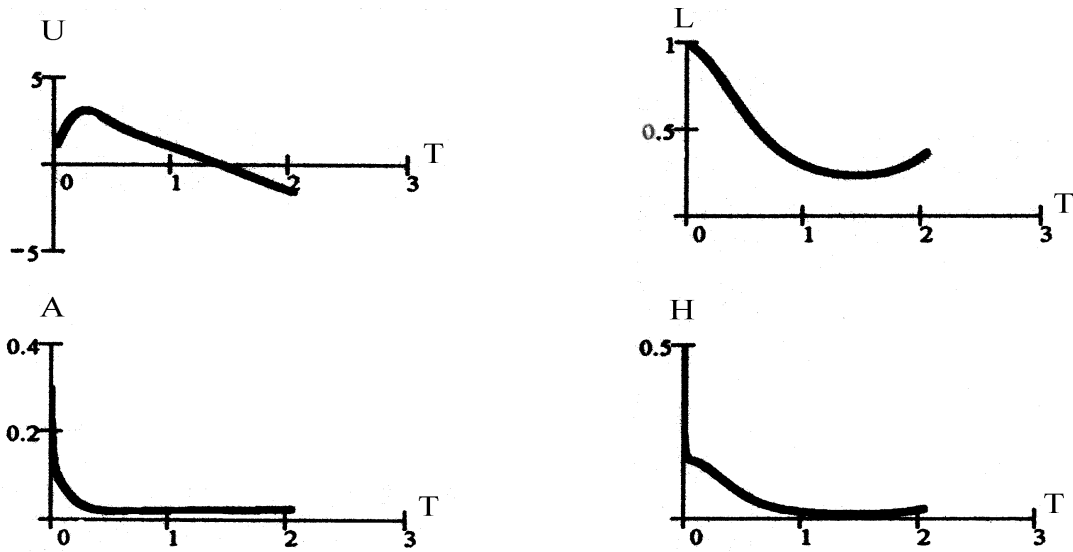


Рис. 2. Поведение функций $U(1, \tau)$, $L(\tau)$, $A(1, \tau)$, $H(1, \tau)$

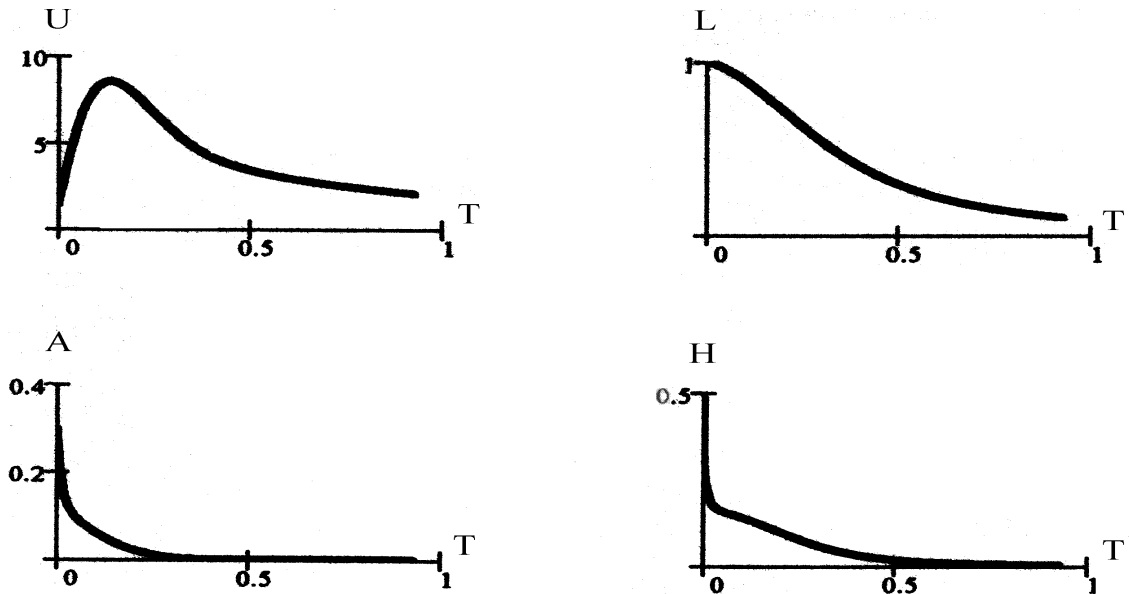


Рис. 3. Поведение функций $U(1, \tau)$, $L(\tau)$, $A(1, \tau)$, $H(1, \tau)$ при $Mc = -60$

Действительно, функции $U_n(\tau)$, $A_n(\tau)$, $H_n(\tau)$ можно найти через $U^m(\tau)$, $A^m(\tau)$, $H^m(\tau)$, $m =$

$0, \dots, n-1$, из конечных соотношений (59)–(61). После подстановки в (58) и возникает упомянутая выше система. Она очень громоздкая и здесь не приводится. Начальные данные для нее следуют из (55):

$$U^m(0) = U_0^m, \quad A^m(0) = A_0^m, \quad H^m(0) = H_0^m, \quad L(0) = 1, \quad (62)$$

где U_0^m, A_0^m, H_0^m — коэффициенты в разложениях $U_0(z), A_0(z), H_0(z)$ по полиномам $P_{2m}(z)$.

Можно показать, что решение (35), (38), (42), (45) является точным решением системы галёркинских приближений (58) для любого n . В безразмерных переменных (47), например, функции U и L имеют вид

$$U = U_0(1 + U_0\tau)^{-1}, \quad L = (1 + U_0\tau)^{-1}, \quad U_0 = l_0^2 m / \nu. \quad (63)$$

Расчеты задачи Коши для полученной системы $3n+1$ уравнения велись методом Рунге–Кутты четвертого порядка точности. Результаты расчетов при $n=2$ и $n=3$ совпадают с точностью до пятого знака.

На рис. 1 представлены графики функций $U(\tau), L(\tau)$, полученные численно методом Галёркина, когда в качестве данных было взято точное решение (42), (42), (63) при $U_0 = 1$. Видно, что метод точно воспроизводит это тестовое решение. Остальные параметры имели следующие значения: $Ma = 50$, $Mc = -100$, $Pr = 0.2$, $Bi = 2$, $Sr = 3$, $Pe = 100$. Начальные данные таковы: $U_0 = 1.5$, $A_0 = 0.3$, $H_0 = 0.5$, температура газа $A_{\text{gas}} = 0$.

Из рис. 2 видно, что минимальные значения границы и концентрации наблюдаются при смене знака $U(1, \tau)$. Скорость сначала возрастает, потом убывает и меняет свое направление, жидкость начинает протекать вдоль поверхности к точке $x = 0$. Это объясняется тем, что поверхностное натяжение сначала уменьшается и жидкость начинает отток от точки $x = 0$, потом поверхностное натяжение увеличивается и жидкость снова начинает протекать, т.е. течение жидкости происходит из области малых в область больших поверхностных натяжений.

Концентрация после изменения направления скорости начинает увеличиваться, жидкость притекает и приносит концентрацию. Функция $A(1, \tau)$ убывает и стремится к A_{gas} .

На рис. 3 при $Mc = -60$ скорость монотонно убывает и стремится к нулю; аналогично ведут себя и свободная граница, температура и концентрация. Такая задача без учета концентрации была решена в [9].

При увеличении концентрационного и теплового чисел Марангони, числа Прандтля и числа Пекле интенсивность течения уменьшается, а при увеличении числа Био и числа Соре — увеличивается.

Список литературы

- [1] ГЕРШУНИ Г.З. *Устойчивость конвективных течений* / Г.З. Гершуни, Е.М. Жуховицкий, А.А. Непомнящий. — М.: Наука, 1989.
- [2] ЛАНДАУ Л.Д. *Гидродинамика* / Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц. — М.: Наука, 1986.
- [3] АНДРЕЕВ В.К. *Задача о малых возмущениях термодиффузионного движения с поверхностью раздела* / В.К. Андреев // Институт вычислительного моделирования СО РАН: Препринт № 5-02. — Красноярск, 2002. — 26 с.
- [4] АНДРЕЕВ В.К. *Об инвариантных решениях уравнений термодиффузии* / В.К. Андреев // Труды III Межд. конф. "Симметрия и дифференциальные уравнения". — Красноярск: ИВМ СО РАН, 2002. — С. 13–17.
- [5] ОВСЯННИКОВ Л.В. *Групповой анализ дифференциальных уравнений* / Л.В. Овсянников. — М.: Наука, 1978.
- [6] ПУХНАЧЕВ В.В. *Неустановившееся движение вязкой жидкости со свободной границей, описываемые частично-инвариантными решениями уравнений Навье–Стокса* / В.В. Пухначев // Динамика сплошной среды. Вып. 10. Институт гидродинамики СО АН СССР. — Новосибирск, 1972. — С. 125–137.
- [7] ТИХОНОВ А.Н. *Уравнения математической физики* / А.Н. Тихонов, А.А. Самарский. — М.: Наука, 1972.

- [8] ГРАДШТЕЙН И.С. *Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений* / И.С. Градштейн, И.М. Рыжик. — М.: Физматгиз, 1965.
- [9] АНДРЕЕВ В.К. *Инвариантные решения уравнений термокапиллярного движения* / В.К. Андреев, В.В. Пухначев // Численные методы механики сплошной среды. — Новосибирск: ИТПМ СО АН СССР, 1983. — Т. 14, № 5. — С. 3–23.

**ON MOTION OF A PLANE LIQUID LAYER WITH FREE SURFACE UNDER SORET
EFFECT ACTION**

V.K. Andreev, A.E. Kartoshkina

The motion of a plane liquid layer with free boundary when surface tension depends on temperature and concentration is investigated. The calculations results of velocity, boundary, temperature and concentration are given.