УДК 537.2.21

ВАРИАЦИОННЫЕ ПРИНЦИПЫ, МАГНИТНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИЕ МУЛЬТИПОЛИ И ВЫСШИЕ МАГНИТНЫЕ ПОЛЯРИЗУЕМОСТИ В ТЕОРИИ ПОЛЯ

В.П.Казанцев*

На основе вариационных принципов введены новые для теоретической и математической физики понятия о характеристических магнитных мультиполях, представляющих собой систему базисных распределений токов по связной границе области пространства. Компоненты векторных потенциалов характеристических мультиполей ненулевого порядка внутри рассматриваемой области суть гармонические полиномы, степени которых определяют минимальный порядок отличного от нуля сферического мультипольного момента характеристического мультиполя. С помощью формализма характеристических мультиполей, в частности, решена проблема моментов в магнитостатике, построен Лагранжиан сверхпроводника, движущегося в постоянном магнитном поле.

В теории постоянного электромагнитного поля [1, 2] разложение электрического скалярного потенциала по сферическим мультиполям осуществляют, используя представление функции Грина уравнения Лапласа в свободном пространстве

$$\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|} = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{r'^l}{r^{l+1}} \sum_{m=-l}^{l} y_{lm}(\theta,\alpha) y_{lm}(\theta',\alpha') \ , \tag{1}$$

имеющее место при $r\,' < r$. Здесь r, θ, α – сферические координаты радиуса-вектора $\vec{r}$; $y_{lm}(\theta,\alpha)$ – вещественные сферические гармоники, связанные с применяемыми обычно в квантовой механике [3] сферическими функциями $Y_{lm}(\theta,\alpha)$ соотношениями:

$$y_{lm}(\theta,\alpha) = \sqrt{\frac{8\pi}{2l+1}} \begin{cases} \frac{1}{2}\big((-1)^m Y_{lm}(\theta,\alpha) + Y_{l-m}(\theta,\alpha)\big) \ ; & m>0 \ ; \\ \frac{1}{\sqrt{2}} Y_{lo}(\theta,\alpha) \ ; & m=0 \ ; \\ \frac{i}{2}\big(Y_{lm}(\theta,\alpha) - (-1)^m Y_{l-m}(\theta,\alpha)\big) \ ; & m<0 \ . \end{cases} \tag{2}$$

Если источником магнитного поля служит двойной слой плотности $\tau(\vec{r})$, который можно рассматривать как распределение по связной поверхности области V намагниченности

$$d\vec{M}(\vec{r}) = \tau(\vec{r})\vec{N}(\vec{r}) dS \quad \text{при} \quad \vec{r} \in \partial V \ ,$$

где $\vec{N}(\vec{r})$ – единичный вектор нормали к ∂V в точке $\vec{r}$, проведённый изнутри области V наружу, то вне поверхности ∂V магнитную индукцию $\vec{B}(\vec{r})$ можно выразить через скалярный потенциал

$$\psi(\vec{r}) = \frac{\mu_o}{4\pi} \int\limits_{\partial V} \frac{\tau(\vec{r}\,')\vec{N}(\vec{r}\,') \cdot (\vec{r}-\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|^3} \, dS\,' \tag{3}$$

как $\vec{B}(\vec{r}) = -\nabla\psi(\vec{r})$. Подставляя представление функции Грина (1) в выражение для потенциала $\psi(\vec{r})$ (3), получим

$$\psi(\vec{r}) = \frac{\mu_o}{4\pi} \sum_{l=1}^{\infty} \frac{1}{r^{l+1}} \sum_{m=-l}^{l} m_{lm} y_{lm}(\theta,\alpha); \ \ m_{lm} = \int\limits_{\partial V} \tau(\vec{r})\vec{N}(\vec{r}) \cdot \nabla\big(r^l y_{lm}(\theta,\alpha)\big)\, dS \ . \tag{4}$$

Естественно будет называть m_{lm} мультипольным моментом двойного слоя порядка $(l\,m)$ или, учитывая постановку задачи, магнитным мультипольным моментом порядка $(l\,m)$. Заметим, что мультипольный момент нулевого порядка, согласно второму равенству (4), равен нулю, поэтому разложения по мультиполям магнитного поля начинается с магнитного дипольного момента m_{1m}, компоненты которого совпадают с декартовыми компонентами обычного магнитного момента $\vec{m}$

[2]: $m_{11} = m_x$; $m_{10} = m_z$;; $m_{1\,-1} = m_y$. m_{lm} будут инвариантными относительно параллельного переноса системы координат, если все m_{km} с $k < l$ равны нулю.

Укажем также, что

$$\vec{m} = \int\limits_{\partial V} \tau(\vec{r})\vec{N}(\vec{r})\,dS\ . \tag{5}$$

Сферические магнитные мультипольные моменты в магнитостатике [1, 2, 4] не рассматриваются.

Задача о поляризуемости (поляризуемости первого порядка) сверхпроводника (идеального диамагнетика) может быть поставлена как вариационная задача о минимуме функционала энергии

$$W(\psi) = \frac{1}{2\mu_o} \int\limits_{\Omega-\partial V} (\nabla\psi)^2\,dV, \tag{6}$$

определённого на функциях $\psi(\vec{r})$, которые представимы как потенциалы двойного слоя (3) при условии постоянства магнитного момента (5) этого слоя. Здесь Ω – область всего пространства.

Чтобы найти потенциал $\psi_o(\vec{r})$, доставляющий минимум функционалу (6), рассмотрим непосредственно проверяемое тождество

$$W(\psi) = W(\psi_o) + W(\psi - \psi_o) + \frac{1}{\mu_o} \int\limits_{\Omega-\partial V} \nabla\psi_o \cdot \nabla(\psi - \psi_o)\,dV\ , \tag{7}$$

третье слагаемое I в правой части которого может быть с помощью формулы Остроградского-Гаусса преобразовано к виду

$$I = \int\limits_{\partial V} (\tau - \tau_o)\vec{N} \cdot \vec{B}_o\,dS\ .$$

I обращается в нуль, если $\vec{N}\cdot\vec{B}_o$ совпадает на ∂V с проекцией на $\vec{N}$ некоторого постоянного вектора. Обозначим его $-\vec{B}_{out}$, поскольку $\vec{B}_{out}$ можно интерпретировать как однородное поле магнитной индукции, в которое следует поместить сверхпроводник, чтобы на нём индуцировался магнитный момент $\vec{m}$. При выполнении сформулированного условия из тождества (7) следует

$$W(\psi) - W(\psi_0) = W(\psi - \psi_o) > 0\,, \tag{8}$$

а это и доказывает минимальность $W(\psi)$ на ψ_o.

В единственности минимизирующей функционал (6) функции ψ_o можно убедиться на основании соотношения (8), записав

$$W(\psi_o) - W(\psi_o') = W(\psi_o - \psi_o') = W(\psi_o') - W(\psi_o)\,, \tag{9}$$

где $\psi_o(\vec{r})$ и $\psi_o'(\vec{r})$ — два потенциала, удовлетворяющих условиям (3) и (5), правда, с возможно различными постоянными $\vec{B}_{out}$ для $\psi_(\vec{r})$ и $\psi'(\vec{r})$. Соотношения (9) будут, очевидно, иметь место, если $W(\psi_o - \psi_o') = 0$, то есть если $\nabla\psi_o(\vec{r}) = \nabla\psi_o'(\vec{r})$ или $\psi_o(\vec{r}) = \psi_o'(\vec{r})$, поскольку допустимые потенциалы согласно (3) нормированы на нуль в бесконечно удаленной точке.

Из единственности $\psi_o(\vec{r})$ следует и единственность $\vec{B}_{out}$. В силу линейности рассматриваемой задачи $\vec{B}_{out}$ и $\vec{m}$ должны быть связаны линейным однородным соотношением, поскольку $\vec{B}_{out}$ обращается в нуль вместе с $\vec{m}$. Эту линейную связь можно выразить в форме

$$\vec{B}_{out} = m_x\big(\vec{B}_{out}\big)_x + m_y\big(\vec{B}_{out}\big)_y + m_z\big(\vec{B}_{out}\big)_z\ , \tag{10}$$

где $\big(\vec{B}_{out}\big)_\alpha$ $(\alpha = x,\ y,\ z)$ – вектор внешней однородной магнитной индукции, при которой от нуля отлична и равна единице только α-я компонента вектора $\vec{m}$. Соотношение (10) можно переписать в матричном виде

$$\vec{B}_{out} = \hat{M}\cdot\vec{m}\ . \tag{11}$$

Здесь $\hat{M}$ составлена из векторов $\big(\vec{B}_{out}\big)_\alpha$ как из столбцов, она симметрична и отрицательно определена, поскольку

$$\frac{1}{\mu_o} \int\limits_{\Omega-\partial V} \nabla(m_\alpha\psi_{o\alpha})\cdot\nabla(m_\beta\psi_{o\beta})\,dV = -\vec{m}\cdot\hat{M}\cdot\vec{m}\,. \tag{12}$$

Естественным образом возникает задача об отыскании минимума функционала энергии (6), если входящий в него скалярный потенциал представляется в виде потенциала двойного слоя, все его моменты m_{kn} (4) при $k < l$ равны нулю, а моменты m_{lm} фиксированы.

1. Высшие магнитные поляризуемости уединённых сверхпроводников

Будем искать минимум функционала энергии (6) на представимых в виде потенциалов двойного слоя (3) функциях $\psi(\vec{r})$ при условиях

$$\int\limits_{\partial V} \tau(\vec{r})\vec{N}(\vec{r}) \cdot \nabla\big(r^k y_{km}(\theta,\alpha)\big)\, dS = \mu_{lm}\delta_{kl} \quad k \le l \; . \tag{13}$$

Пусть $\psi_o(\vec{r})$ – потенциал, минимизирующий функционал энергии (6) при условиях (13). Обратимся к непосредственно проверяемому тождеству (7). Интеграл в его правой части обратится в нуль, если

$$\vec{B}_o \cdot \vec{N} = -\vec{B}_{out} \cdot \vec{N} \; ; \quad \vec{B}_{out} = \nabla \sum_{k=1}^{l} r^k \vec{b}_k \cdot \vec{y}_k(\theta,\alpha) \; , \tag{14}$$

где $\vec{b}_k$ – некоторые постоянные векторы. $\vec{B}_{out}$ можно интерпретировать как магнитную индукцию внешнего поля, в которое следует поместить сверхпроводник, чтобы его мультипольные моменты удовлетворяли условиям (13).

Для $\psi(\vec{r})$ и $\psi_o(\vec{r})$ будет верно неравенство (8), доказывающее минимальность $W(\psi)$ на $\psi_o(\vec{r})$. Из равенств (9) делаем вывод о единственности $\psi_o(\vec{r})$, а вместе с ней и о единственности $\vec{b}_k$ во второй формуле (14).

Обозначим $\psi_{lm}(\vec{r})$ и $\tau_{lm}(\vec{r})$ потенциал $\psi_o(\vec{r})$ и порождающую его плотность двойного слоя $\tau_o(\vec{r})$ в случае, когда единственным отличным от нуля в условии (13) мультипольным моментом будет $\mu_{lm} = 1$. $\psi_{lm}(\vec{r})$ будет отвечать вектор $\vec{b}_{lm}$ во втором соотношении (14). Любой $\vec{b}_l$ может быть выражен через $\vec{b}_{lm}$ по формуле

$$\vec{b}_l = \sum_{m=-l}^{l} \mu_{lm}\vec{b}_{lm} = \hat{\delta}^{(l)} \cdot \vec{\mu}_l \; , \tag{15}$$

где матрица $\hat{\delta}^{(l)}$ составлена из векторов-столбцов $\vec{b}_{lm}$:

$$\hat{\delta}^{(l)} = \big(\vec{b}_{ll} \;\; \vec{b}_{l\,l-1} \;\; \ldots\ldots \;\; \vec{b}_{l\,-l}\big) \; .$$

С помощью равенств

$$\frac{1}{\mu_o}\int\limits_{\Omega-\partial V} \nabla\psi_{lm} \cdot \nabla\psi_{ln}\, dV = -\int\limits_{\partial V} \tau_{lm}\vec{N} \cdot \nabla\big(\vec{b}_{ln} \cdot r^l \vec{y}_l(\theta\alpha)\big)\, dS \; =$$

$$-\delta^{(l)}_{mn} = -\int\limits_{\partial V} \tau_{ln}\vec{N} \cdot \nabla\big(\vec{b}_{lm} \cdot r^l \vec{y}_l(\theta,\alpha)\big)\, dS \, , = -\delta^{(l)}_{nm}$$

убеждаемся в симметричности матрицы $\hat{\delta}^{(l)}$, а с помощью соотношения

$$\frac{1}{\mu_o}\int\limits_{\Omega-\partial V} \nabla(\vec{\mu}_l \cdot \vec{\psi}_l) \cdot \nabla(\vec{\mu}_l \cdot \vec{\psi}_l)\, dV = -\vec{\mu}_l \cdot \hat{\delta}^{(l)} \cdot \vec{\mu}_l \tag{16}$$

– в её отрицательной определённости.

Матрицу, обратную матрице $\hat{\delta}^{(l)}$, будем обозначать $\hat{\gamma}^{(l)}$. Матрица $\hat{\gamma}^{(l)}$, как и матрица $\hat{\delta}^{(l)}$, отрицательно определена и симметрична.

Поля $\nabla\psi_{lm}$ с различными l ортогональны в том смысле, что

$$\frac{1}{\mu_o}\int\limits_{\Omega-\partial V} \nabla\psi_{kn} \cdot \nabla\psi_{lm}\, dV = -\delta_{kl}\delta^{(l)}_{mn} \; . \tag{17}$$

Здесь δ_{kl} – символ Кронекера. Условие (17) может быть записано в иной форме:

$$\int\limits_{\partial V} \vec{\tau}_l\vec{N} \cdot \nabla\vec{\psi}_k\, dS = \delta_{lk}\hat{\delta}^{(l)} \; , \tag{18}$$

которая может оказаться полезной в приложениях аппарата высших поляризуемостей к конкретным задачам.

Иногда вместо системы потенциалов мультиполей $\vec{\psi}_l(\vec{r})$ удобнее использовать другую $\vec{\Psi}_l(\vec{r})$, связанную с первоначальной линейным соотношением

$$\vec{\Psi}_l(\vec{r}) = -\hat{\gamma}^{(l)} \cdot \vec{\psi}_l(\vec{r}) \; . \tag{19}$$

Такая же связь имеет место и между порождающими эти потенциалы плотностями двойных слоёв $\vec{\tau}_l(\vec{r})$ и $\vec{\Upsilon}_l(\vec{r})$:

$$\vec{\Upsilon}_l(\vec{r}) = -\hat{\gamma}^{(l)} \cdot \vec{\tau}_l(\vec{r}) \; . \tag{20}$$

Для $\vec{\psi}_l(\vec{r})$ и $\vec{\Psi}_l(\vec{r})$ условие ортогональности имеет вид

$$\frac{1}{\mu_o} \int\limits_{\Omega-\partial V} \nabla_i \vec{\Psi}_l \nabla_i \vec{\psi}_n \, dV = \delta_{ln} \hat{e}^{(l)} \; , \tag{21}$$

где $\hat{e}^{(l)}$ – единичная матрица размерности $(2l+1)$.

Обратим внимание на то, что, согласно полученному из вариационного принципа граничному условию (14), для $\vec{B}_{out}$ в области $V \quad \psi_{lm}(\vec{r})$ представляют собой гармонические многочлены от x, y, z степени l.

Базисные распределения двойных слоёв $\tau_{lm}(\vec{r})$ естественно будет называть характеристическими скалярными магнитными мультиполями порядка $(l\,m)$ поверхности ∂V. Каждому $\tau_{lm}(\vec{r})$ будет соответствовать распределение поверхностных токов

$$\vec{i}_{lm}(\vec{r}) = \nabla \tau_{lm}(\vec{r}) \times \vec{N}(\vec{r}) \, , \tag{22}$$

где " $\times$ " обозначает операцию векторного произведения, и векторный потенциал

$$\vec{A}_{lm}(\vec{r}) = \frac{\mu_o}{4\pi} \int\limits_{\partial V} \frac{\tau_{lm}(\vec{r}\,')\vec{N}(\vec{r}\,') \times (\vec{r} - \vec{r}\,')}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|^3} \, dS' = \frac{\mu_o}{4\pi} \int\limits_{\partial V} \frac{\vec{i}_{lm}(\vec{r}\,')dS'}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|} \; . \tag{23}$$

Поверхностные распределения токов $\vec{i}_{lm}(\vec{r})$ будем называть векторными магнитными характеристическими мультиполями порядка $(l\,m)$ поверхности ∂V.

Перейдём теперь к рассмотрению примеров построения высших поляризуемостей и соответствующих им потенциалов мультиполей.

2. Магнитные поляризуемости шара

Для сверхпроводников сложной формы задача определения $\hat{\gamma}^{(l)}$, $\psi_{lm}(\vec{r})$, $\tau_{lm}(\vec{r})$, $\vec{A}_{lm}(\vec{r})$ и $\vec{i}_{lm}(\vec{r})$ весьма трудна, поскольку даже $\hat{\gamma}^{(1)}$ (магнитная поляризуемость сверхпроводника) известна лишь для [2], различных модификаций эллипсоида. Магнитные поляризуемости более высокого порядка, чем 1, в магнитостатике до сих пор не рассматривались.

Относительно просто $\hat{\gamma}^{(l)}$, $\psi_{lm}(\vec{r})$, $\tau_{lm}(\vec{r})$, $\vec{A}_{lm}(\vec{r})$ и $\vec{i}_{lm}(\vec{r})$ могут быть построены для шара. С помощью соотношений (4),

$$\tau(\vec{r}) = \frac{1}{\mu_o}[\psi(\vec{r})]\Bigg|_{\vec{r}\in\partial V} \; ,$$

и условия непрерывности нормальной составляющей вектора $\nabla\psi_{lm}(\vec{r})$ можно установить,что

$$\psi_{lm}(\vec{r}) = \frac{\mu_o}{4\pi} y_{lm}(\theta,\alpha) \begin{cases} \dfrac{1}{r^{(l+1)}} & r > R \\ -\dfrac{l+1}{l}\dfrac{r^l}{R^{2l+1}} & r < R \end{cases} \; ;$$

$$\tau_{lm}(\vec{r}) = \frac{\mu_o(2l+1)y_{lm}(\theta,\alpha)}{4\pi l R^{l+1}} \quad ; \quad \hat{\delta}^{(l)} = -\frac{\mu_o(l+1)}{4\pi\, l\, R^{2l+1}}\hat{e}_l \; ;$$

$$\Upsilon_{lm}(\vec{r}) = \frac{(2l+1)R^l y_{lm}(\theta,\alpha)}{l+1} \quad ; \quad \hat{\gamma}^{(l)} = -\frac{4\pi l\, R^{2l+1}}{\mu_o(l+1)}\hat{e}_l \; ; \tag{24}$$

$$\Psi_{lm}(\vec{r}) = y_{lm}(\theta,\alpha)\begin{cases} \dfrac{l\,R^{2l+1}}{(l+1)r^{(l+1)}} & r > R \\ -r^l & r < R \end{cases} ;\vec{i}_{lm}(\vec{r}) = \frac{2l+1}{4\pi l R^{l+2}}\frac{1}{i}\hat{\vec{L}}\,y_{lm}(\theta,\alpha)\ ; \tag{25}$$

$$\vec{A}_{lm}(\vec{r}) = \frac{\mu_o}{4\pi l R^{2l+1}}\frac{1}{i}\hat{\vec{L}}\,y_{lm}(\theta,\alpha)\begin{cases} \dfrac{R^{2l+1}}{r^{l+1}} & \text{при} \quad r > R\ ; \\ r^l & \text{при} \quad r < R\ , \end{cases} \tag{26}$$

где $\hat{\vec{L}}$ – оператор вектора квантового углового момента [3]; R – радиус шара. Здесь также принято, что центр шара совпадает с началом координат.

Соответствующие характеристическим магнитным скалярным мультиполям $\Upsilon_{lm}(\vec{r})$ плотности поверхностных токов $\vec{I}_{lm}(\vec{r})$ и векторные потенциалы $\vec{a}_{lm}(\vec{r})$ определяем из

$$\vec{I}_{lm}(\vec{r}) = \frac{(2l+1)R^{l-1}}{\mu_o(l+1)}\frac{1}{i}\hat{\vec{L}}\,y_{lm}(\theta,\alpha)\ ; \tag{27}$$

$$\vec{a}_{lm}(\vec{r}) = \frac{1}{l+1}\frac{1}{i}\hat{\vec{L}}\,y_{lm}(\theta,\alpha)\begin{cases} \dfrac{R^{2l+1}}{r^{l+1}} & \text{при} \quad r > R\ ; \\ r^l & \text{при} \quad r < R\ . \end{cases} \tag{28}$$

Более сложна задача построения магнитных поляризуемостей для эллипсоида. В частности, для эллипсоидов вращения решение этой задачи дано в работе [5].

3. Идеальный сверхпроводник во внешнем магнитном поле. Характеристические магнитные мультиполи нулевого порядка

В случае, когда внешнее магнитное поле $\vec{B}_o(\vec{r})$ в области V сверхпроводника потенциально, а это всегда будет иметь место, если V гомеоморфна шару, магнитная индукция $\vec{B}(\vec{r})$ индуцированных внешним полем поверхностных токов сверхпроводника может быть найдена как сумма магнитных полей построенных выше характеристических магнитных мультиполей области V.

Действительно, внутри сверхпроводника магнитная индукция должна быть равна нулю. Поэтому положим

$$\vec{B}_o(\vec{r}) = \sum_{l=1}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l}\mu_{lm}\nabla\psi_{lm}(\vec{r}) \qquad \text{при} \qquad \vec{r}\in V\ ,$$

где правая часть равенства представляет собой взятую с обратным знаком магнитную индукцию наведённых внешним полем поверхностных токов. Вне сверхпроводника скалярный потенциал этих токов

$$\psi(\vec{r}) = \sum_{l=1}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l}\mu_{lm}\psi_{lm}(\vec{r})\ . \tag{29}$$

Характеристические магнитные моменты μ_{lm} могут быть найдены из имеющего место на поверхности сверхпроводника соотношения

$$\vec{B}_o(\vec{r})\cdot\vec{N}(\vec{r})\Bigg|_{\vec{r}\in\partial V} = \sum_{l=1}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l}\mu_{lm}\nabla\psi_{lm}(\vec{r})\cdot\vec{N}(\vec{r})\Bigg|_{\vec{r}\in\partial V}$$

и условия ортогональности (21), которое для удобства перепишем здесь в виде

$$-\int_{\partial V}\Upsilon_{lm}(\vec{r})\nabla\psi_{kn}(\vec{r})\cdot\vec{N}(\vec{r})dS = \delta_{kl}\delta_{mn}\ .$$

Используя приведённые соотношения, получаем

$$\mu_{lm} = -\int_{\partial V}\Upsilon_{lm}(\vec{r})\vec{B}_o(\vec{r})\cdot\vec{N}(\vec{r})dS\ . \tag{30}$$

Формулы (29) и (30) решают задачу о сверхпроводнике во внешнем магнитном поле $\vec{B}_o(\vec{r})$, если в области сверхпроводника $\vec{B}_o(\vec{r})$ потенциально. Это решение будет окончательным, если область сверхпроводника гомеоморфна шару. Если же сверхпроводник имеет форму тора или области, гомеоморфной тору, то по его поверхности могут протекать токи, создающие поле магнитной индукции только вне сверхпроводника. Распределение таких токов отвечает решению задачи о индуктивности сверхпроводящего тора (тороидальной области) [6] и может быть найдено путём минимизации функционала магнитной энергии

$$W(\vec{A}) = \frac{1}{2\mu_o}\int (\mathrm{rot}\,\vec{A})^2\,dV \tag{31}$$

при условиях

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_o}{4\pi}\int\limits_{\partial V}\frac{\vec{i}(\vec{r}\,')dS'}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\ ; \quad \int\limits_{\Gamma}\vec{i}(\vec{r})\cdot\vec{n}(\vec{r})\,dl = 1. \tag{32}$$

Во втором интеграле Γ — любой контур, лежащий на поверхности тороидальной области, стягиваемый в ней и однократно охватывающий её; $\vec{n}(\vec{r})$ — единичная поверхностная нормаль к контуру Γ, направление которой согласовано с направлением обхода контура правилом правого винта. Отвечающий решению вариационной задачи (31), (32) векторный потенциал обозначим $\vec{A}_o^{(s)}(\vec{r})$, соответствующее ему поверхностное распределение тока — $\vec{i}_o^{(s)}(\vec{r})$. Это распределение естественно назвать характеристическим магнитным мультиполем нулевого порядка. В области сверхпроводника и на его поверхности [6]

$$\vec{A}_o^{(s)}(\vec{r}) = \frac{L_s}{4\pi}\int\limits_{\gamma}\frac{d\vec{r}\,'\times(\vec{r}-\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|^3} \quad \text{при} \quad \vec{r}\in V+\partial V\ , \tag{33}$$

где γ – любой контур, лежащий вне тороидального сверхпроводника и однократно его охватывающий; L_s – индуктивность тороидального сверхпроводника. Заметим, что изменение контура γ приводит к градиентному преобразованию векторного потенциала $\vec{A}_o^{(s)}(\vec{r})$.

Поскольку магнитный характеристический мультиполь нулевого порядка может быть только векторным, то полное решение задачи о тороидальном сверхпроводнике во внешнем магнитном поле удобно представить суммой векторных потенциалов характеристических магнитных мультиполей

$$\vec{A}(\vec{r}) = I_o^{(s)}\vec{A}_o^{(s)}(\vec{r}) + \sum_{l=1}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l}\mu_{lm}\vec{A}_{lm}(\vec{r}), \tag{34}$$

где $I_o^{(s)}$ – сила поверхностного тока, отвечающего магнитному мультиполю $\vec{i}_o^{(s)}(\vec{r})$. Соотношения (34) и (30) полностью решают задачу о тороидальном сверхпроводнике во внешнем магнитном поле $\vec{B}_o(\vec{r})$. Первое слагаемое в правой части формулы (34) определяет собственное магнитное поле сверхпроводника в отсутствие внешнего поля.

Примером непотенциального внутри тороидального сверхпроводника поля $\vec{B}_o(\vec{r})$ может служить магнитная индукция, создаваемая током, протекающим по проводу, проходящему однократно через отверстие тороидального сверхпроводника. Для тора в качестве такого провода можно выбрать прямую, совпадающую с осью тора. Если сила тока в проводе I, то

$$\int\limits_{\gamma}\vec{B}_o(\vec{r})\cdot d\vec{r} = \mu_o I\ , \tag{35}$$

где γ – контур, лежащий внутри тороидальной области сверхпроводника и однократно охватывающий провод.

Пусть $\vec{i}_o^{(i)}(\vec{r})$ – решение вариационной задачи (31) и (32) при условии, что Γ – это контур, лежащий на поверхности сверхпроводника и переводимый в контур γ движением с растяжением в области сверхпроводника. $\vec{A}_o^{(i)}(\vec{r})$ – соответствующий магнитному характеристическому мультиполю $\vec{i}_o^{(i)}(\vec{r})$ векторный потенциал. В области вне сверхпроводника и на его поверхности

$$\vec{A}_o^{(i)}(\vec{r}) = \frac{L_i}{4\pi}\int\limits_{\gamma}\frac{d\vec{r}\,'\times(\vec{r}-\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|^3} \quad \text{при} \quad \vec{r}\in V+\partial V\ , \tag{36}$$

где L_i – внутренняя индуктивность поверхности тороидального сверхпроводника [5]; γ – такой же контур, как и в соотношении (35).

Магнитная индукция

$$\tilde{\vec{B}}_o(\vec{r}) = \vec{B}_o(\vec{r}) - I \operatorname{rot} \vec{A}_o^{(i)}(\vec{r})$$

будет потенциальной в области рассматриваемого сверхпроводника, поэтому векторный потенциал индуцированных внешним магнитным полем токов можно будет найти как

$$\vec{A}(\vec{r}) = -I\vec{A}_o^{(i)}(\vec{r}) + \sum_{l=1}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l} \mu_{lm}\vec{A}_{lm}(\vec{r}). \tag{37}$$

Постоянные μ_{lm}, как и раньше, можно получить с помощью соотношения (30), поскольку

$$\vec{N}(\vec{r}) \cdot \operatorname{rot} \vec{A}_o^{(i)}(\vec{r}) = 0\ .$$

Интересно, что

$$\vec{B}_o^{(i)}(\vec{r}) = \operatorname{rot} \vec{A}_o^{(i)}(\vec{r})\ ; \quad \vec{B}_o^{(s)}(\vec{r}) = \operatorname{rot} \vec{A}_o^{(s)}(\vec{r})$$

отличны от нуля внутри области сверхпроводника и вне его области соответственно. Распределения токов, создающие магнитные поля лишь в ограниченной области пространства, предложено [7] называть анапольными. Такими анапольными распределениями будут $\vec{i}_o^{(s)}(\vec{r})$ и $\vec{i}_o^{(i)}(\vec{r})$. Назовём их внутренним и внешним анаполями поверхности тороидальной области.

Распределения токов (22) совместно с внутренним и внешним анаполями представляют собой полную систему характеристических магнитных мультиполей поверхности тороидальной области. Так, если по поверхности тороидальной области распределён каким-либо образом стационарный ток с поверхностной плотностью $\vec{i}(\vec{r})$, то его векторный потенциал можно найти как сумму векторных потенциалов характеристических мультиполей

$$\vec{A}(\vec{r}) = I_o^{(s)}\vec{A}_o^{(s)}(\vec{r}) + I_o^{(i)}\vec{A}_o^{(i)}(\vec{r}) + \sum_{l=1}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l} \mu_{lm}\vec{A}_{lm}(\vec{r}) \tag{38}$$

с коэффициентами

$$I_o^{(s)} = \frac{1}{L^{(s)}}\int\limits_{\partial V} \vec{A}_o^{(s)}(\vec{r}) \cdot \vec{i}(\vec{r})\, dS\ ; \quad I_o^{(i)} = \frac{1}{L^{(i)}}\int\limits_{\partial V} \vec{A}_o^{(i)}(\vec{r}) \cdot \vec{i}(\vec{r})\, dS\ ;$$

$$\mu_{lm} = \int\limits_{\partial V} \vec{a}_{lm}(\vec{r}) \cdot \vec{i}(\vec{r})\, dS\ . \tag{39}$$

Заметим, что здесь удобно проводить разложение именно векторного потенциала, поскольку внутренний и внешний анаполи, по сути своей, являются векторными. В общем случае, когда граница сверхпроводника представляет собой связную поверхность, структура характеристических магнитных мультиполей принципиально не изменяется. На поверхности сверхпроводника можно выделить систему из N стягиваемых в области сверхпроводника и не стягиваемых вне его независимых контуров, не переводимых один в другой движением вдоль поверхности с растяжением. Каждому контуру можно отнести внешний магнитный мультиполь нулевого порядка (внутренний анаполь) $\vec{i}_{ok}^{(s)}(\vec{r})$. Внешних анаполей $\vec{i}_{ok}^{(i)}(\vec{r})$ также будет N. Им будут соответствовать N стягиваемых в области вне сверхпроводника и не стягиваемых внутри него независимых контуров. С внутренними и внешними анапольными распределениями токов связаны матрицы внешних $\hat{L}^{(s)}$ и внутренних $\hat{L}^{(i)}$ коэффициентов индуктивности. Теперь вместо формулы (38) будем иметь

$$\vec{A}(\vec{r}) = \sum_{k=1}^{N}\left(I_{ok}^{(s)}\vec{A}_{ok}^{(s)}(\vec{r}) + I_{ok}^{(i)}\vec{A}_{ok}^{(i)}(\vec{r})\right) + \sum_{l=1}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l} \mu_{lm}\vec{A}_{lm}(\vec{r})\ , \tag{40}$$

а вместо первых двух формул (39) –

$$I_{ok}^{(\gamma)} = \sum_{p=1}^{N}\left(\left(\hat{L}^{(\gamma)}\right)^{-1}\right)_{kp}\int\limits_{\partial V} \vec{A}_{op}^{(\gamma)}(\vec{r}) \cdot \vec{i}(\vec{r})\, dS\ . \tag{41}$$

Здесь $\gamma = s,\, i$. Магнитная энергия поверхностных токов при этом будет равна

$$W\big(\vec{A}(\vec{r})\big) = \frac{1}{2}\left(\vec{I}^{(s)} \cdot \hat{L}^{(s)} \cdot \vec{I}^{(s)} + \vec{I}^{(i)} \cdot \hat{L}^{(i)} \cdot \vec{I}^{(i)} - \sum_{l=1}^{\infty} \vec{\mu}_l \cdot \hat{\delta}_l \cdot \vec{\mu}_l\right) . \tag{42}$$

Таким образом, система характеристических магнитных мультиполей, построенная в предыдущем разделе, будет полной для сверхпроводников, гомеоморфных шару. Для сверхпроводников тороидальной и более сложных форм она должна быть дополнена системами внешних и внутренних анаполей (характеристических магнитных мультиполей нулевого порядка).

4. Примеры использования аппарата характеристических магнитных мультиполей

В предыдущем разделе с помощью аппарата характеристических магнитных мультиполей получено решение задачи об идеальном сверхпроводнике во внешнем магнитном поле. Здесь будут рассмотрены ещё некоторые примеры.

Разложения по характеристическим магнитным мультиполям. Пусть все токи, создающие магнитное поле, расположены в области V, тогда векторный потенциал

$$\tilde{\vec{A}}(\vec{r}) = \frac{\mu_o}{4\pi} \int\limits_{\partial V} \frac{\vec{j}(\vec{r}\,')}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|}\, dV\,' \tag{43}$$

может отличаться от своего представления (40) вне области V лишь на градиент скалярной гармонической функции. Коэффициенты разложения в правой части (40) теперь находим по формулам

$$I_{ok}^{(\gamma)} = \int\limits_{\partial V} \vec{I}_{ok}^{(\gamma)}(\vec{r}) \cdot \tilde{\vec{A}}(\vec{r})\, dS\ ; \quad \mu_{lm} = \int\limits_{\partial V} \vec{I}_{lm}(\vec{r}) \cdot \tilde{\vec{A}}(\vec{r}) dS\ , \tag{44}$$

где

$$\vec{I}_{ok}^{(\gamma)}(\vec{r}) = \sum_{p=1}^{N} \left(\big(\hat{L}^{(\gamma)}\big)^{-1}\right)_{k\,p} \vec{i}_{op}^{(\gamma)}(\vec{r})\ ; \quad \vec{I}_{lm}(\vec{r}) = -\sum_{n=-l}^{l} \gamma_{mn} \vec{i}_{ln}(\vec{r})\ .$$

Учитывая в соотношениях (44), что

$$\vec{a}_{ok}^{(\gamma)}(\vec{r}\,') = \frac{\mu_o}{4\pi} \int\limits_{\partial V} \frac{\vec{I}_{ok}^{(\gamma)}(\vec{r})}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|}\, dS\ ; \quad \vec{a}_{lm}(\vec{r}\,') = \frac{\mu_o}{4\pi} \int\limits_{\partial V} \frac{\vec{I}_{lm}(\vec{r})}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|}\, dS\ ,$$

будем иметь

$$I_{ok}^{(\gamma)} = \int\limits_{\partial V} \vec{a}_{ok}^{(\gamma)}(\vec{r}) \cdot \vec{j}(\vec{r})\, dV\ ; \quad \mu_{lm} = \int\limits_{\partial V} \vec{a}_{lm}(\vec{r}) \cdot \vec{j}(\vec{r}) dV\ . \tag{45}$$

Формулы (40) и (45) решают задачу мультипольного разложения векторного потенциала токов, сосредоточенных в области V.

Обратим внимание на то, что характеристические магнитные мультипольные моменты могут быть выражены через сферические магнитные мультипольные моменты $m_{l\,m}$:

$$\mu_{lm} = m_{l\,m} + \sum_{k=1}^{l-1} \sum_{n=-k}^{l} A_{k\,n}^{(l\,m)} m_{k\,n}\ . \tag{46}$$

Проблема моментов в магнитостатике. В окрестности бесконечно удалённой точки векторный потенциал любой системы токов, распределённых по конечной области пространства, может быть записан в виде

$$\vec{A}(\vec{r}) = \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{m=-l}^{l} m_{l\,m} A_{l\,m}(\vec{r})\ , \tag{47}$$

где $A_{l\,m}(\vec{r})$ – векторные потенциалы сферических магнитных мультиполей, определяемые формулой (26), а

$$m_{l\,m} = \frac{1}{l+1} \frac{1}{i} \int r^l \vec{j}(\vec{r}) \cdot \hat{\vec{L}} y_{lm}(\theta\,, \alpha)\, dV\ . \tag{48}$$

Представляет интерес и обратная задача, когда известны $m_{l\,m}$, а нужно определить, могут ли содержаться источники векторного потенциала (47) внутри сферы радиуса R. Для решения этой задачи найдём энергию магнитного поля, предполагая, что все его источники находятся на сфере радиуса R:

$$W = -\frac{1}{2}\sum_{l=1}^{\infty} \vec{m}_l \cdot \hat{\delta}^{(l)} \cdot \vec{m}_l = \frac{\mu_o}{8\pi}\sum_{l=1}^{\infty} \frac{l+1}{l}\frac{\vec{m}_l^2}{R^{2l+1}} \,. \tag{49}$$

Здесь использовано выражение для $\hat{\delta}^{(l)}$ из формулы (24). Если значение энергии (49) будет конечно, то источники $\vec{A}(\vec{r})$ могут содержаться внутри сферы радиуса R. Если же W (49) расходится, то существуют источники $\vec{A}(\vec{r})$, лежащие вне сферы.

Минимальное значение R, при котором ряд энергии мультиполей всё ещё сходится, можно определить, например при $\vec{m}_1 \neq 0$, по формуле

$$R = \overline{\lim_{l\to\infty}} \sqrt[2l]{\vec{m}_{l+1}^2/\vec{m}_1^2} \,,$$

весьма напоминающей формулу Адамара для радиуса сходимости степенного ряда [8].

В случае, когда область V гомеоморфна шару, в разложение векторного потенциала (40) следует положить $I_{ok}^{(\gamma)} = 0$, поэтому при известных m_{lm} можно формально определить μ_{lm} с помощью (46). Ответ на вопрос: могут ли источники магнитного поля лежать в области V, - будет положительным, если магнитная энергия, рассчитанная по формуле

$$W = -\frac{1}{2}\sum_{l=1}^{\infty} \vec{\mu}_l \cdot \hat{\delta}^{(l)} \cdot \vec{\mu}_l \,, \tag{50}$$

будет конечной. При этом распределение токов по ∂V, порождающее векторный потенциал (47),

$$\vec{i}(\vec{r}) = \sum_{l=1}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l} \mu_{lm}\vec{i}_{lm}(\vec{r}) \,. \tag{51}$$

Для тороидальной области решение проблемы моментов более сложно. Сначала осуществляем переход к формальному разложению по характеристическим магнитным мультиполям как самого векторного потенциала

$$\vec{A}(\vec{r}) = \sum_{l=1}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l} \mu_{lm}\vec{A}_{lm}(\vec{r}) \,, \tag{52}$$

так и векторного потенциала магнитного мультиполя нулевого порядка

$$\vec{A}_o^{(s)}(\vec{r}) = \sum_{l=1}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l} \mu_{lm}^{(os)}\vec{A}_{lm}(\vec{r}) \,. \tag{53}$$

Если энергия (50) при этом окажется конечной, то потенциал (52) может иметь своими единственными источниками токи, протекающие в области V, а магнитная индукция вне V будет потенциальной функцией.

Если же $W = \infty$, то можно попытаться выделить из векторного потенциала (52) потенциал мультиполя нулевого порядка, то есть принять

$$\vec{A}(\vec{r}) = I_o^{(s)}\vec{A}_o^{(s)}(\vec{r}) + \sum_{l=1}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l} (\mu_{lm} - I_o^{(s)}\mu_{lm}^{(os)})\vec{A}_{lm}(\vec{r}) \,, \tag{54}$$

Значение $I_o^{(s)}$ следует выбрать так, чтобы магнитная энергия

$$W = -\frac{1}{2}\sum_{l=1}^{\infty} (\vec{\mu}_l - I_o^{(s)}\vec{\mu}_l^{(os)}) \cdot \hat{\delta}^{(l)} \cdot (\vec{\mu}_l - I_o^{(s)}\vec{\mu}_l^{(os)}) \tag{55}$$

была конечной величиной. Для этого будем минимизировать

$$W_L = -\frac{1}{2}\sum_{l=1}^{L} (\vec{\mu}_l - I_o^{(s)}\vec{\mu}_l^{(os)}) \cdot \hat{\delta}^{(l)} \cdot (\vec{\mu}_l - I_o^{(s)}\vec{\mu}_l^{(os)})$$

по $I_o^{(s)}$. В результате получим

$$I_{oL}^{(s)} = \sum_{l=1}^{L} \vec{\mu}_l \cdot \hat{\delta}^{(l)} \cdot \vec{\mu}_l^{(os)} \Bigg/ \sum_{l=1}^{L} \vec{\mu}_l^{(os)} \cdot \hat{\delta}^{(l)} \cdot \vec{\mu}_l^{(os)} \ .$$

Если предельное значение

$$I_o^{(s)} = \lim_{L\to\infty} I_{oL}^{(s)}$$

окажется конечным, а вместе с ним окажется конечным и значение

$$W = \lim_{L\to\infty} W_L,$$

то распределение поверхностных токов, порождающих векторный потенциал (51), найдём как

$$\vec{i}(\vec{r}) = I_o^{(s)} \vec{i}_o^{(s)}(\vec{r}) + \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{m=-l}^{l} (\vec{\mu}_l - I_o^{(s)} \vec{\mu}_l^{(os)}) \vec{i}_{lm}(\vec{r}) \ , \tag{56}$$

то есть получим решение проблемы моментов для тороидальной области.

Интересно, что по поведению магнитного поля в окрестности бесконечно удалённой точки можно определить, даёт ли вклад в поле анапольное распределение тока в тороидальной области.

Для областей более сложного вида проблема моментов решается аналогичным образом.

Функция Лагранжа сверхпроводящего тела, движущегося в стационарном магнитном поле. Поскольку кинетическая энергия сверхпроводящего тела может быть определена как кинетическая энергия абсолютно твёрдого тела [9], то задача построения функции Лагранжа для сверхпроводника, движущегося во внешнем стационарном магнитном поле, сводится к определению его потенциальной функции, отличающейся от соответствующей магнитной энергии лишь знаком.

Магнитная энергия взаимодействия сверхпроводника складывается из двух частей: из энергии взаимодействия собственных токов сверхпроводника с внешним полем

$$W_1 = \sum_{k=1}^{N} I_{ok}^{(s)} \int\limits_{\partial V} \vec{i}_{ok}^{(s)}(\vec{\xi}) \cdot \vec{A}_o(\vec{r})\, dS \ , \tag{57}$$

где $\vec{A}_o(\vec{r})$ – векторный потенциал магнитной индукции внешнего поля, и энергии взаимодействия внешнего поля с наведёнными им на поверхности сверхпроводника токами

$$W_2 = -\frac{1}{2} \int\limits_{\partial V} \int\limits_{\partial V} \vec{A}_o(\vec{r}) \cdot \hat{K}(\xi, \xi') \cdot \vec{A}_o(\vec{r}')\, dS\, dS' \ , \tag{58}$$

где

$$\hat{K}(\vec{\xi}, \vec{\xi}') = \sum_{k=1}^{N} \vec{i}_{ok}^{(i)}(\vec{\xi}) \vec{I}_{ok}^{(i)}(\vec{\xi}') + \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{m=-l}^{l} \vec{i}_{lm}(\vec{\xi}) \vec{I}_{lm}(\vec{\xi}') \ .$$

Здесь удобно магнитные мультиполи представлять в системе координат $\vec{\xi}$, жёстко связанной со сверхпроводящим телом, а радиус-вектор $\vec{r}$ в лабораторной системе координат выражать через радиус-вектор центра масс сверхпроводника $\vec{R}$ и матрицу поворота $\hat{T}$, совмещающего направления осей систем координат $\vec{r}$ и $\vec{\xi}$, по формуле

$$\vec{r} = \vec{R} + \hat{T} \cdot \vec{\xi} \ ,$$

тем самым выделяя зависимость потенциальной функции

$$\Pi(\vec{R}, \hat{T}) = -W_1(\vec{R}, \hat{T}) - W_2(\vec{R}, \hat{T})$$

от положения центра масс сверхпроводника и его пространственной ориентации.

Нетрудно показать [10], что имеет место неравенство

$$\Delta_{\vec{R}}\, \Pi(\vec{R}, \hat{T}) > 0 \ .$$

Из него, в частности, следует, что у сверхпроводника во внешнем магнитном поле могут существовать точки устойчивого равновесия. Например, для сверхпроводящего шара в квадрупольном магнитном поле со скалярным потенциалом

$$\psi_o(\vec{r}) = -\frac{1}{2}\vec{r} \cdot \hat{k} \cdot \vec{r}$$

точкой такого равновесия будет служить начало координат.

Отметим, что, как свидетельствуют рассмотренные здесь примеры, понятия характеристических магнитных мультиполей и высших магнитных поляризуемостей позволяют не только по новому взглянуть на известные задачи, но и получать новые результаты, коими в настоящей работе являются решение проблемы моментов в магнитостатике и получение функции Лагранжа для сверхпроводника в магнитостатическом поле, а также конструктивное решение задачи о сверхпроводнике (идеальном диамагнетике) во внешнем магнитном поле.

Список литературы

[1] Джексон Дж. *Классическая электродинамика*/ Дж.Джексон. – М.: Мир, 1965. – 702 с.

[2] Ландау Л.Д. *Теория поля*/ Л.Д.Ландау, Е.М.Лифшиц. – М.: Наука, 1982. – 504 с.

[3] Варшалович Д.А. *Квантовая теория углового момента*/ Д.А.Варшалович, А.Н.Москалев, В.К.Херсонский. – Л.: Наука, 1975. – 440 с.

[4] Ландау Л.Д. *Электродинамика сплошных сред* / Л.Д.Ландау, Е.М.Лифшиц. – М.: Наука, 1982. – 532 с.

[5] Казанцев В.П. *Вариационные принципы, характеристические мультиполи и высшие поляризуемости в теории поля*/ В.П.Казанцев // Деп. в ВИНИТИ N 2098 - В97, – Красноярск: 1997. – 133 с.

[6] Золотов О.А. *Вариационные принципы магнитостатики сверхпроводников 1*/ О.А.Золотов, В.П.Казанцев // Изв. вузов. Физика. – 1991.– №9. – С. 97-103.

[7] Физическая энциклопедия// Советская энциклопедия, 1988. – Т. 1.

[8] Лаврентьев М.А. *Теория функций комплексного переменного*/ М.А.Лаврентьев, Б.В.Шабат. – М.: Наука, 1965. – 716 с.

[9] Голдстейн Г. / Г.Голдстейн. – М.: Наука, 1974. – 415 с.

[10] Казанцев В.П. *О квадрупольной магнитной поляризуемости и вариационных принципах*/ В.П.Казанцев // ДАН – 1999. – Т. 369. – № 5. – С. 617-620.

VARIATIONAL PRINCIPLES, MAGNETIC CHARACTERISTIC MULTIPOLES AND HIGHER POLARIZABILITIES ON THE FIELD THEORY

V.P.Kazantsev

The concepts of magnetic characteristic multipoles are introduced on the basis of variational principles. This concepts are new for the theoretical and mathematical physics. The magnetic characteristic multipoles represent the system of the basis distributions of electrical currents over the bound of the domain. The characteristic multipoles vector potential's components are harmonic polynomials into the domain. The polinomical exponents define the minimum (not equal zero) order of spherical magnetic multipole momentum of the characteristic multipole. Using of characteristic multipole formalism the momentum magnetostatics problem was solved and the Lagrange function of the superconductor moving across the magnetostatics field was constructed. It is shown that there are the points of stable equilibrium for the superconductor into the magnetosnatics field.