ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ

УДК 517.98, 517.95

РЕГУЛЯРИЗАЦИЯ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ КОМПЛЕКСОВ[1]

А.А.Шлапунов*

В настоящей работе получены формулы для решений задачи Коши для эллиптических комплексов. Решения даются в виде суммы ряда, слагаемые которого суть итерации псевдодифференциальных операторов, построенные с помощью функций Грина лапласианов комплекса на многообразиях с трещиной. Для комплекса Дольбо в степени $(0,0)$ *эти операторы сродни интегралу Мартинелли-Бохнера.*

Некорректная задача Коши для голоморфных функций является одним из частных случаев задачи Коши для комплекса Дольбо (в степени $(0,0)$). Условиям разрешимости и регуляризации этой задачи посвящено большое количество работ (см., например, библиографию к книге [1]). Задача Коши для комплекса Дольбо в классе бесконечно дифференцируемых форм в произвольных степенях подробно изучена в [2]. В этой работе показано, что разрешимость задачи Коши эквивалентна исчезновению некоторого класса когомологий. Более поздняя работа [3] проливает некоторый свет на вопросы регуляризации задачи Коши для комплекса Дольбо в положительных степенях.

С этой точки зрения некорректная задача для систем с инъективным символом — один из частных случаев задачи Коши для произвольных эллиптических комплексов. Конечно, и эта задача тоже интенсивно исследовалась на протяжении второй половины XX столетия (см., например, библиографию к книге [4]). Задача Коши для произвольных эллиптических комплексов в классе бесконечно дифференцируемых форм в произвольных степенях изучалась в [5]; в частности там показано, что разрешимость задачи Коши эквивалентна исчезновению некоторого класса когомологий.

В настоящей заметке для регуляризации задачи Коши для эллиптических комплексов предлагается применить другой метод. Именно, здесь используются итерации интегралов Грина (ср. [6] для эллиптических систем и [7] для эллиптических комплексов с постоянными коэффициентами).

1. Формула Грина

Пусть X — (компактное) C^∞-многообразие размерности n с гладким (возможно пустым) краем ∂X, вложенное в некоторое гладкое многообразие $\tilde{X}$ той же размерности. Рассмотрим некоторый эллиптический комплекс $\{A_i, E_i\}$ на X (здесь E_i — векторные расслоения на X, а A_i — дифференциальные операторы типа $E_i \to E_{i+1}$ и порядка $m_i \geq 1$, см., например, [5]).

Зафиксируем $i \geq 0$ и будем изучать задачу Коши для комплекса $\{A_i, E_i\}$ в степени i. Кроме того, дополнительно предположим, что порядки операторов A_i и A_{i-1} совпадают и равны m. Так как комплекс $\{A_i, E_i\}$ эллиптичен, то при этом условии (главный) символ оператора $\mathfrak{A}_i = A_i + A_{i-1}^* \in \mathrm{Diff}_m(E_i \to E_{i+1} \oplus E_{i-1})$ инъективен, а значит, лапласиан $\Delta_i = A_i^* A_i + A_{i-1} A_{i-1}^* \in \mathrm{Diff}_{2m}(E_i \to E_i)$ эллиптичен.

Пусть Γ — компактное подмножество во внутренности $\mathring{X}$ многообразия X, лежащее на какой-нибудь гладкой гиперповерхности $\tilde{\Gamma}$ в $\mathring{X}$ и пусть $Y = X \setminus \Gamma$. Многообразие $Y \setminus \Gamma$ обычно называют многообразием с трещиной.

Обозначим через $L^2(Y, E_i)$ пространство Лебега сечений расслоения E_i со скалярным произведением $\int_X (u, v)_{x,i} dx$, где dx — форма объема на X, а через $H^m(Y, E_i)$ обозначим соответствующее пространство Соболева. Кроме того пусть $\mathring{H}^m(Y, E_i)$ будет замыкание в пространстве $H^m(Y, E_i)$ множества гладких сечений с компактными носителями в $\mathring{Y}$ (т.е. $\mathcal{D}(Y, E_i)$), а

$$\mathcal{H}_i(Y) = \{u \in \mathring{H}^m(Y, E_i) : A_{i-1}^* u = 0 \text{ на } \mathring{Y},\ A_i u = 0 \text{ на } \mathring{Y}\}.$$

Как хорошо известно, пространство $\mathcal{H}_i(Y)$ конечномерно.

---

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке гранта научных школ НШ-1212.2003.1

Следуя [6], обозначим через $H^{-m}(Y,E_i)$ двойственное пространство к $\overset{\circ}{H}{}^m(Y,E_i)$ относительно спаривания в $L^2(Y,E_i)$. Другими словами, это пополнение $\mathcal{D}(Y,E_i)$ по норме

$$\|u\|_{H^{-m}(Y,E_i)} = \sup_{v\in\mathcal{D}(Y,E_i)} \frac{|(u,v)_{L^2(X,E_i)}|}{\|v\|_{H^m(Y,E_i)}}.$$

Для всех $u \in H^m(Y,E_i)$ соответствие

$$v \mapsto \int_Y (\mathfrak{A}_i u, \mathfrak{A}_i v)_x\, dx$$

задает непрерывный сопряженно линейный функционал на пространстве $\overset{\circ}{H}{}^m(Y,E_i)$. Итак, лапласиан Δ_i продолжается до отображения $H^m(Y,E_i) \to H^{-m}(Y,E_i)$.

Зафиксируем какую-нибудь окрестность U границы многообразия Y, расслоения $F_j^{(i)}$ над U и систему Дирихле $\{B_j^{(i)}\}_{j=0}^{m-1}$ на ∂D, $B_j^{(i)} \in \mathrm{Diff}_{m_j}(E_{i|U} \to F_j^{(i)})$ (см., например, [5]). Положим $t_i = \oplus_{j=0}^{m-1} B_j^{(i)}$.

Следующая задача есть обобщение классической задачи Дирихле (см., например, [6]). Обычно ее называют задачей Дирихле для оператора Δ_i на многообразии X с трещиной Γ.

Задача 1. *Для заданного $w \in H^{-m}(Y,E_i)$, найти сечение $u \in H^m(E_i)$, такое, что*

$$\begin{cases} \Delta_i u &= w \quad \text{в} \quad \overset{\circ}{Y}, \\ t_i(u) &= 0 \quad \text{на} \quad \partial Y. \end{cases}$$

Как показано, например, в [6], задача 1 является фредгольмовой, разность между любыми двумя ее решениями лежит в $\mathcal{H}_i(Y)$, а разрешима она в том и только том случае, когда $w \in \mathcal{H}_i^{\perp}(Y)$.

Кроме того, для этой задачи можно построить теорию Ходжа (см. [6]), т.е. найдутся линейные ограниченные операторы

$$\Pi_i : H^{-m}(Y,E_i) \to \mathcal{H}_i(Y), \quad \mathfrak{G}_i : H^{-m}(Y,E_i) \to \overset{\circ}{H}{}^m(Y,E_i) \cap \mathcal{H}_i^{\perp}(Y),$$

такие, что

1) Π_i есть $L^2(Y,E_i)$-ортогональный проектор на пространство $\mathcal{H}_i(Y)$, с ядром Шварца $K_{\Pi_i}(x,y) = \sum_j h_j(x) \otimes *_E h_j(y)$, где $\{h_j\}_{j=1}^{\dim \mathcal{H}_i(Y)}$ — некоторый ортогональный базис в $\mathcal{H}_i(Y)$;

2) $\mathfrak{A}_i \Pi_i = 0$ и $\mathfrak{G}_i \Pi_i = \Pi_i \mathfrak{G}_i = 0$;

3) $$\begin{array}{rcll} \mathfrak{G}_i \Delta_i u &=& u - \Pi_i u & \text{для всех} \quad u \in \overset{\circ}{H}{}^m(Y,E_i), \\ \Delta_i \mathfrak{G}_i w &=& w - \Pi_i w & \text{для всех} \quad w \in H^{-m}(Y,E_i). \end{array}$$

Отметим, что краевые задачи на многообразиях с трещиной рассматриваются достаточно часто (см., например, [8] о задаче Коши для уравнения Лапласа на плоскости с разрезами). Для операторов с постоянными коэффициентами в $\mathbb{R}^n$ естественно считать, что $X = \mathbb{R}^n$. В этом случае нужно рассмотреть несколько иную задачу Дирихле (см. [7], [8] и пример 1 ниже).

Пример 1. Зафиксируем какие-нибудь число $N \in \mathbb{N}$ и объединение интервалов $\Gamma = \cup_{j=1}^N (a_j, b_j)$ на действительной оси. Рассмотрим следующую задачу Дирихле на плоскости $\mathbb{C}$ ($\cong \mathbb{R}^2$) с трещинами вдоль Γ: по заданной функции $u_0 \in C_{\mathrm{loc}}(\Gamma)$ найти гармоническую функцию u в $\mathbb{C} \setminus \bar\Gamma$, такую, что u непрерывно продолжается на Γ как из нижней, так и из верхней полуплоскостей, $u^{\pm} = u_0$ на Γ и существует конечный предел $\lim_{|z|\to\infty} u(z)$.

Приведем пример функции Грина области $\mathbb{C} \setminus \Gamma$, пользуясь формулой [8, (46.25)]. С этой целью, зафиксируем $z \in \mathbb{C} \setminus \bar\Gamma$. и положим

$$\delta_a(z) = \sqrt{\Pi_{k=1}^N (z-a_k)}, \qquad \delta_b(z) = \sqrt{\Pi_{k=1}^N (z-b_k)}.$$

Как следует из одного замечания в [8, с. 478], следующее выражение дает единственную гармоническую (относительно ζ) функцию в $\mathbb{C} \setminus \bar\Gamma$, равную нулю в бесконечно удаленной точке и такую, что $R(z,\zeta) = \frac{1}{2\pi} \ln \left(\frac{|z-\zeta|}{(\Pi_{k=1}^N |a_k-\zeta|)^{1/N}} \right)$ на Γ:

$$R(z,\zeta) = \mathrm{Re} \left(\frac{1}{4\pi^2\sqrt{-1}} \frac{\delta_b(\zeta)}{\delta_a(\zeta)} \int_\Gamma \frac{\delta_a(\tau)}{\delta_b(\tau)} \ln \left(\frac{|z-\tau|}{(\Pi_{k=1}^N |a_k-\tau|)^{1/N}} \right) \frac{d\tau}{\tau-\zeta} \right),$$

где $\mathrm{Re}\,(w)$ означает действительную часть комплексного числа w.

Ясно, что $R(z,\zeta)$ есть C^∞-функция параметра z со значениями в $C^\infty_{\mathrm{loc}}(\mathbb{C}\setminus\bar\Gamma)$. Разность

$$\mathfrak{G}(z,\zeta)=\frac{1}{2\pi}\ln\left(\frac{|z-\zeta|}{(\Pi_{k=1}^N|a_k-\zeta|)^{1/N}}\right)-R(z,\zeta)$$

и есть функция Грина области $\mathbb{C}\setminus\bar\Gamma$.

При фиксированных $z\neq\zeta$, $\mathfrak{G}(z,\zeta)$ есть C^∞-функция вплоть до Γ с обеих сторон этого интервала. Значит, единственные особенности $\mathfrak{G}(z,\zeta)$ вне диагонали лежат в точках $\partial\Gamma$.

Функция Грина $\mathfrak{G}(z,\zeta)$ позволяет построить решение задачи Дирихле в $\mathbb{C}\setminus\bar\Gamma$ по формуле

$$u(z)=\frac{1}{\sqrt{-1}}\left(\int_\Gamma\partial_\zeta\mathfrak{G}(z,\cdot)^+\,(u^+)\,d\zeta-\int_\Gamma\partial_\zeta\mathfrak{G}(z,\cdot)^-\,(u^-)\,d\zeta\right),$$

где $u^\pm$ суть предписанные значения функции u на Γ из верхней и нижней полуплоскостей соответственно.

В самом деле, зафиксируем $z\in\mathbb{C}\setminus\Gamma$. Тогда в шаре $\mathcal{B}(z,\rho)$ для $\rho>\sup_{s\in\Gamma}|z-s|$ мы имеем:

$$u(z)=\frac{1}{\sqrt{-1}}\left(\int_{\partial(B(z,\rho)\setminus\Gamma)}\partial_\zeta\mathfrak{G}(z,\cdot)\,u\,d\zeta+\mathfrak{G}(z,\cdot)\,\overline{\partial}u\,d\overline{\zeta}\right)\tag{1}$$

По построению, для всякой фиксированной точки $z\notin\overline{\Gamma}$ функции $R(z,\zeta)$ и $\ln\left(\frac{|z-\zeta|}{(\Pi_{k=1}^N|a_k-\zeta|)^{1/N}}\right)$ гармоничны и ограничены в дополнении круга $B(z,\rho)$. Следовательно и функция $\mathfrak{G}(z,\zeta)$ обладает этими свойствами.

Теперь, так как функции $u(\zeta)$, $\mathfrak{G}(z,\zeta)$ гармоничны и ограничены в дополнении некоторого круга, то из разложения Лорана для гармонических функций (см. [9, теорема 7.25]) следует, что их производные имеют в бесконечно удаленной точке нуль второго порядка. Значит, переходя в (1) к пределу по $\rho\to\infty$ мы получаем

$$u(z)=\frac{1}{\sqrt{-1}}\left(\int_\Gamma\partial_\zeta\mathfrak{G}(z,\cdot)^+\,(u^+)\,d\zeta-\int_\Gamma\partial_\zeta\mathfrak{G}(z,\cdot)^-\,(u^-)\,d\zeta\right)+$$

$$+\frac{1}{\sqrt{-1}}\lim_{\rho\to\infty}\left(\int_{|z-\zeta|=\rho}\partial_\zeta\mathfrak{G}(z,\cdot)\,u\,d\zeta+\mathfrak{G}(z,\cdot)\,\overline{\partial}u\,d\overline{\zeta}\right)=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{-1}}\left(\int_\Gamma\partial_\zeta\mathfrak{G}(z,\cdot)^+\,(u^+)\,d\zeta-\int_\Gamma\partial_\zeta\mathfrak{G}(z,\cdot)^-\,(u^-)\,d\zeta\right),$$

что и требовалось. □

Пусть теперь $D\Subset\overset{\circ}{X}$ будет область (т.е. открытое связное множество), $H^m(D,E_i)$ обозначает пространство Соболева сечений расслоения E_i над D, а Λ^r будет расслоение комплекснозначных внешних дифференциальных форм степени r ($r=0,1,\dots$) на X.

Будем говорить, что граница ∂D области D принадлежит классу C^r ($r\in\mathbb{N}$), если локально D может быть задана неравенством $\rho(x)<0$, где ρ — вещественнозначная функция класса C^r, а $|\nabla\rho|\neq0$ в некоторой окрестности ∂D.

Зададим функцию $\rho(x)$ через $\pm dist(x,\partial D)$, где символ "$-$" соответствует случаю, когда $x\in D$, а "$+$" — случаю, когда $x\in X\setminus\overline{D}$. Тогда, если окрестность U границы $\partial D\in C^r$ ($2\le r\le\infty$) достаточно мала, $\rho\in C^r_{loc}(U)$, а $|d\rho|=1$ в U. Следовательно, для малых $|\varepsilon|$, области $D_\varepsilon=\{x\in D:\rho(x)<-\varepsilon\}$ имеют границы класса C^r, и аппроксимируют D изнутри (снаружи) при $\varepsilon\to+0(-0)$. При этом единичный вектор $\nu(x)$ внешней нормали к поверхности ∂D в точке x дается градиентом $\nabla\rho(x)$. Внутреннее произведение $ds=d\rho\rfloor dx$ обеспечивает форму объема на каждой из поверхностей ∂D_ε, индуцированную объемом dx на X.

Пусть $\Phi_i(.,.)$ обозначает ядро Шварца оператора $\mathfrak{G}_i$. Для $u\in C^\infty(E_i)$, $w\in C^\infty(E_{i-1})$, $g\in C^\infty(E_{i+1})$, равных нулю в окрестности Γ, положим:

$$(\mathcal{G}^{(i,1)}u)(x)=-\int_{\partial D}G_{A_i}({}^tA_i^*\Phi_i(x,.),u),\ (\mathcal{G}^{(i,2)}u)(x)=-\int_{\partial D}G_{A_{i-1}^*}({}^tA_{i-1}\Phi_i(x,.),u),$$

$$\mathcal{G}^{(i)} = \mathcal{G}^{(i,1)} + \mathcal{G}^{(i,2)}, \quad (T^{(i,1)}f)(x) = \int_D < {}^tA_i^*\Phi_i(x,.), f >_{x,i+1} dx,$$

$$(T^{(i,2)})w(x) = \int_D < {}^tA_{i-1}\Phi_i(x,.), w >_{x,i-1} dx,$$

где χ_D — характеристическая функция области D, $< .,. >_{x,i}$ — естественное спаривание между элементами E_i и дуального расслоения E_i^*, ${}^tB \in \mathrm{Diff}_m(F^* \to E^*)$ – транспонированный оператор, а $G_B(.,.) \in \mathrm{Diff}_{m-1}((F^*, E) \to \Lambda^{n-1})$ — оператор Грина для дифференциального оператора $B \in \mathrm{Diff}_m(E \to F)$ (см., например, [5], §9). Интегралы $\mathcal{G}^{(i,k)}$ будем называть интегралами Грина для комплекса $\{A_i, E_i\}$ в степени i.

В следующем утверждении $H^m_\Gamma(D, E_i)$ суть замкнутое подпространство в $H^m(D, E_i)$, состоящее из сечений, производные которых до порядка $(m-1)$ включительно равны нулю на Γ.

Лемма 1. *Интегралы $T^{(i,1)}$, $T^{(i,2)}$, $\mathcal{G}^{(i)}$ порождают ограниченные линейные операторы $T^{(i,1)} : L^2(D, E_{i+1}) \to H^m_\Gamma(D, E_i)$, $T^{(i,2)} : L^2(D, E_{i-1}) \to H^m_\Gamma(D, E_i)$, $\mathcal{G}^{(i)} : H^m_\Gamma(D, E_i) \to H^m_\Gamma(D, E_i)$. Кроме того, для любого сечения $u \in H^m_\Gamma(D, E_i)$ справедлива формула Грина:*

$$(\chi_D u)(x) = (\mathcal{G}^{(i)}u)(x) + (T^{(i,1)}A_i u)(x) + (T^{(i,2)}A^*_{i-1}u)(x). \tag{2}$$

Доказательство. Грубо говоря, формула (2) получается в результате применения формулы Стокса с учетом сингулярностей, которые имеет ядро $\Phi_i(x,y)$ на $\partial\Gamma$ (ср. §4 в [6]). Поскольку для любых фиксированных $f \in L^2(D, E_{i+1})$, $w \in L^2(D, E_{i-1})$ интегралы $\int_D (f, A_i v)_x\, dx$ и $\int_D (w, A^*_{i-1}v)_x dx$ определяют непрерывные линейные функционалы на $\tilde{H}^m_\Gamma(Y, E_i)$, то

$$A_i^*\chi_D : L^2(D, E_{i+1}) \to \tilde{H}^{-m}_\Gamma(Y, E_i), \qquad A_{i-1}\chi_D : L^2(D, E_{i-1}) \to \tilde{H}^{-m}_\Gamma(Y, E_i)$$

суть линейные непрерывные операторы. Поэтому операторы

$$T^{(i,1)} = \mathfrak{G}_i A_i^* \chi_D : L^2(D, E_{i+1}) \to H^m_\Gamma(D, E_i),$$

$$T^{(i,2)} = \mathfrak{G}_i A_{i-1} \chi_D : L^2(D, E_{i-1}) \to H^m_\Gamma(D, E_i)$$

непрерывны.

Справедливость формулы (2) для гладких сечений на X, равных нулю в окрестности Γ, вытекает из формулы Стокса. Поскольку такие сечения плотны в $H^m_\Gamma(D, E_i)$, то отсюда следует, что оператор $\mathcal{G}^{(i)}$ продолжается по непрерывности на $H^m_\Gamma(D, E_i)$ как $\mathcal{G}^{(i)} = I - T^{(i,1)}A_i - T^{(i,2)}A^*_{i-1}$. □

2. Итерации интегралов Грина

Обозначим через $S^m(\Delta_i, X \setminus \bar{D}, \partial X)$ гильбертово пространство, состоящее из всех $u \in H^m(X \setminus \overline{D}, E_i)$, таких, что $\Delta_i u = 0$ в $\mathring{X} \setminus \overline{D}$ и $t_i(u) = 0$ на ∂X; топология в нем индуцируется скалярным произведением пространства $H^m(X \setminus \overline{D}, E_i)$.

Поскольку, как мы видели выше, задача Дирихле для лапласиана Δ_i вне $\overline{D}$:

$$\begin{cases} \Delta_i u = 0 & \text{на} \quad \mathring{X} \setminus \overline{D}, \\ t_i u = \oplus u_j & \text{на} \quad \partial D, \\ t_i u = 0 & \text{на} \quad \partial X, \end{cases}$$

является фредгольмовой в пространствах Соболева, то мы получаем следующий изоморфизм $S^m(\Delta_i, X \setminus \bar{D}, \partial X) \xrightarrow{t_{+,i}} \oplus_{j=0}^{m-1} H^{m-m_j-1/2}(\partial D, E_{i|\partial D})$, задаваемый при помощи оператора сужения $u \mapsto t_i(u)|_{\partial D}$. Наконец, композиция обратного оператора $t^{-1}_{+,i}$ с оператором следа $H^m(D, E_i) \xrightarrow{t_i} \oplus_{j=0}^{m-1} H^{m-m_j-1/2}(\partial D, E_{i|\partial D})$ дает нам непрерывное линейное отображение $H^m(D, E_i) \ni u \mapsto \mathcal{E}_i(u) \in S^m(\Delta_i, X \setminus \bar{D}, \partial X)$.

Для $u \in H^m(D, E_i)$ положим

$$e_i(u)(x) = \begin{cases} u(x), & \text{если} \quad x \in D, \\ \mathcal{E}_i(u)(x), & \text{если} \quad x \in X \setminus \bar{D}. \end{cases}$$

Введем в рассмотрение эрмитову форму

$$h_D^{(i)}(u,v) = \int_X (\mathfrak{A}_i e_i(u), \mathfrak{A}_i e_i(v))_x dx$$

на пространстве $H_\Gamma^m(D,E_i)$. Как доказано в [6, теорема 6.1], она задает скалярное произведение на пространстве $H_\Gamma^m(D,E_i)$, определяющее топологию, эквивалентную исходной.

Лемма 2. *Операторы $A_i : H_\Gamma^m(D,E_i) \to L^2(D,E_{i+1})$, $T^{(i,1)} : L^2(D,E_{i+1}) \to H_\Gamma^m(D,E_i)$ являются сопряженными друг другу относительно скалярного произведения $h_D^{(i)}(\cdot,\cdot)$ в $H_\Gamma^m(D,E_i)$ и стандартного скалярного произведения в $L^2(D,E_{i+1})$, а их нормы не превосходят единицы.*

Доказательство. Введем в рассмотрение оператор $T^{(i)} = (T^{(i,1)}, T^{(i,2)}) : L^2(D,E_{i+1}) \oplus L^2(D,E_{i+1}) \to H_\Gamma^m(D,E_i)$. По определению, $T^{(i)} = \Phi_i(A_i + A_{i-1}^*)^* \chi_D$. Поэтому из [6, теорема 6.2] следует, что

$$h_D^{(i)}\left(T^{(i)}F, u\right) = \int_D (F, (A_i + A_{i-1}^*)u)_x dx \tag{3}$$

для всех $F \in L^2(D,E_{i+1}) \oplus L^2(D,E_{i+1})$, $u \in H_\Gamma^m(D,E_i)$.

Для завершения доказательства нам осталось применить равенство (3) для пар вида $(f,0)$, где $f \in L^2(D,E_{i+1})$, и заметить, что по определению $\|A_i u\|^2_{L^2(D,E_i)} \le h_D^{(i)}(u,u)$ для всех $u \in H_\Gamma^m(D,E_i)$. □

Следствие 1. *Операторы $A_i T^{(i,1)} : L^2(D,E_{i+1}) \to L^2(D,E_{i+1})$, $T^{(i,1)}A_i : H_\Gamma^m(D,E_i) \to H_\Gamma^m(D,E_i)$, $(\mathcal{G}^{(i)} + T^{(i,2)}A_{i-1}^*) : H_\Gamma^m(D,E_i) \to H_\Gamma^m(D,E_i)$ являются самосопряженными неотрицательными относительно обычных скалярных произведений в $L^2(D,E_{i+1})$ и скалярного произведения $h_D^{(i)}(\cdot,\cdot)$ соответственно, а нормы их не превосходят единицы.*

Доказательство немедленно вытекает из леммы 2. □

Пусть $\mathcal{L}(H)$ обозначает пространство всех непрерывных линейных операторов на банаховом пространстве H. Кроме топологии банахова пространства в $\mathcal{L}(H)$ можно рассматривать и другие топологии; например, сильную операторную топологию, задающую поточечную сходимость.

Для заданного замкнутого подпространства Σ в $H_\Gamma^m(D,E_i)$, будем писать π_Σ для ортогональной проекции из $H_\Gamma^m(D,E_i)$ на Σ относительно скалярного произведения $h_D^{(i)}(\cdot,\cdot)$. Кроме того, пусть $S_\Gamma^m(A_i,D)$ обозначает замкнутое подпространство в $H_\Gamma^m(D,E_i)$, состоящее из слабых решений уравнения $A_i u = 0$ в D; другими словами говоря, $S_\Gamma^m(A_i,D)$ представляет коциклы комплекса $\{A_i, E_i\}$ в степени i на пространстве $H_\Gamma^m(D,E_i)$. Ясно, что $S_\Gamma^m(A_i,D)$ тривиально, если $i=0$, а внутренность Γ не пуста.

Следствие 2. *В сильной операторной топологии пространства $\mathcal{L}(H_\Gamma^m(D,E_i))$ мы имеем*

$$\lim_{N\to\infty}\left(\mathcal{G}^{(i)} + T^{(i,2)}A_{i-1}^*\right)^N = \pi_{S_\Gamma^m(A_i,D)},$$

а в сильной операторной топологии пространства $\mathcal{L}(L^2(D,E_{i+1}))$ мы имеем

$$\lim_{N\to\infty}\left(I - A_i T^{(i,1)}\right)^N = \pi_{\ker T^{(i,1)}}.$$

Доказательство. Как следует из [10, теорема 3.2], для всякого неотрицательного самосопряженного неотрицательного оператора L в гильбертовом пространстве H существует предел итераций $\lim_{k\to\infty} L^k = \Pi(\ker(I-L))$, если только $\|L\| \le 1$.

Значит, из следствия 1 вытекает, что

$$\lim_{N\to\infty}\left(\mathcal{G}^{(i)} + T^{(i,2)}A_{i-1}^*\right)^N = \pi_{\ker(I-\mathcal{G}^{(i)}-T^{(i,2)}A_{i-1}^*)}, \quad \lim_{N\to\infty}\left(I - A_i T^{(i,1)}\right)^N = \pi_{\ker A_i T^{(i,1)}}$$

в сильных операторных топологиях пространств $\mathcal{L}(H_\Gamma^m(D,E_i))$ и $\mathcal{L}(L^2(D,E_{i+1}))$ соответственно. Учитывая лемму 2 и формулу (2), мы заключаем, что

$$\ker T^{(i,1)}A_i = S_\Gamma^m(A_i,D), \quad \ker A_i T^{(i,1)} = \ker T^{(i,1)},$$

что и доказывает следствие. □

Теорема 1. *В сильной операторной топологии пространства $\mathcal{L}(H^m_\Gamma(D,E_i))$ мы имеем*

$$I = \pi_{S^m_\Gamma(A_i,D)} + \sum_{\nu=0}^{\infty} \left(\mathcal{G}^{(i)} + T^{(i,2)}A^*_{i-1}\right)^\nu T^{(i,1)}A_i, \qquad (4)$$

а в сильной операторной топологии пространства $\mathcal{L}(L^2(D,E_{i+1}))$ мы имеем

$$I = \pi_{\ker T^{(i,1)}} + \sum_{\nu=0}^{\infty} A_i \left(\mathcal{G}^{(i)} + T^{(i,2)}A^*_{i-1}\right)^\nu T^{(i,1)}. \qquad (5)$$

Доказательство. Тождество $L + (I - L) = I$ влечет, что

$$I = L^\nu + \sum_{\mu=0}^{\nu-1} L^\mu (I-L) = (I-L)^\nu + \sum_{\mu=0}^{\nu-1}(I-L)^\mu L \qquad (6)$$

для всех $\nu \in \mathbb{N}$.

Используя следствие 2 для $L = T^{(i,1)}A_i$, можно перейти к пределу по $\nu \to \infty$ в (6) и получить (4). Доказательство другого тождества проводится аналогично. □

3. О задаче Коши для комплекса $\{A_i, E_i\}$

Рассмотрим следующий вариант задачи Коши для комплекса $\{A_i, E_i\}$ (о его связи с другими формулировками этой задачи см., например, [5], §19).

Задача 2. *Для заданного $f \in L^2(D,E_{i+1})$, найти (если это возможно) сечение $u \in H^m_\Gamma(D,E_i)$, удовлетворяющее $A_i u = f$ в D.*

Поскольку $A_{i+1}A_i \equiv 0$, то задача 2 может быть неразрешима для каких-то $f \in L^2(D,E_{i+1})$. Кроме того, при $\Gamma \neq \emptyset$ и $i = 0$ она превращается в некорректную задачу Коши для систем с инъективным символом. Как показывает [10, пример 8.4] для комплекса Дольбо, эта задача, вообще говоря, некорректна даже для случая $\Gamma = \emptyset$. Более точно, для $\overline{\partial}$-замкнутых дифференциальных форм с коэффициентами класса $L^2(D)$ в строго псевдовыпуклой области D всегда существует решение $u \in H^{1/2}(D)$ уравнения $\overline{\partial} u = f$, но для всякого $\epsilon > 0$ найдется ($\overline{\partial}$-замкнутая дифференциальная) форма класса $L^2(D)$, для которой не существует $H^{1/2+\epsilon}(D)$-решения этого уравнения. Конечно, задача 2 корректна для комплекса де Рама.

Теорема 2. *Задача 2 разрешима тогда и только тогда, когда f ортогональна $\ker T^{(i,1)}$ и ряд $R^{(i,D)}_\Gamma f = \sum_{\nu=0}^{\infty}\left(\mathcal{G}^{(i)} + T^{(i,2)}A^*_{i-1}\right)^\nu T^{(i,1)} f$ сходится в $H^m_\Gamma(D,E_i)$. Более того, если эти условия выполнены, то $R^{(i,D)}_\Gamma f$ есть решение задачи 2.*

Доказательство. Необходимость утверждения вытекает из следствия 2 и теоремы 1.

Обратно, пусть оба условия теоремы выполнены. Тогда из (5) следует, что $f = \sum_{\nu=0}^{\infty} A_i \left(\mathcal{G}^{(i)} + T^{(i,2)}A^*_{i-1}\right)^\nu T^{(i,1)} f$. Поскольку ряд $R^{(i,D)}_\Gamma f$ сходится в $H^m_\Gamma(D,E_i)$, то $f = A_i R^{(i,D)}_\Gamma f$ в D, что и требовалось. □

Следствие 2 показывает, что решение $u = R^{(i,D)}_\Gamma f$ лежит в ортогональном (относительно $h^{(i)}_D(\cdot,\cdot)$) дополнении подпространства $S^m_\Gamma(A_i,D)$ в $H^m_\Gamma(D,E_i)$. Очевидно, задача 2 имеет не более одного решения, принадлежащего этому ортогональному дополнению. Частичные суммы $R^{(i,D)}_{\Gamma,p} f$ ряда $R^{(i,D)}_\Gamma f$ можно трактовать как приближенные решения задачи 2, если только $f \perp \ker T^{(i,1)}$.

Поскольку A_i включен в некоторый эллиптический комплекс, то условия теоремы 2 можно уточнить. Именно, для $g \in H^m_{loc}(D,E_{i+1})$ будем говорить, что $\nu_i(g) = 0$ на Γ если для всех $u \in C^\infty(X,E_i)$, для которых $\operatorname{supp} u \subset \Gamma$, мы имеем:

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \int_{\partial D_\varepsilon} G_{A_i^*}(*u, g) = 0.$$

Положим $\mathcal{H}^{i+1}_\Gamma(D) = \{g \in L^2(D,E_{i+1}) : A_{i+1} f = 0 \text{ в } D, A_i^* f = 0 \text{ в } D,\ \nu_i(g) = 0 \text{ на } \partial D \setminus \overline{\Gamma}\}$. Будем называть $\mathcal{H}^{i+1}_\Gamma(D)$ *гармоническими пространствами* задачи Коши для комплекса $\{A_i, E_i\}$ в D с данными на Γ (ср., например, [5] для $\Gamma = \emptyset$). В силу эллиптичности комплекса элементы $\mathcal{H}^{i+1}_\Gamma(D)$ принадлежат $C^\infty(D,E_{i+1})$.

Следствие 3. *Задача* 2 *разрешима тогда и только тогда, когда 1)* $f \perp \mathcal{H}^{i+1}_{\Gamma}(D)$*; 2)* $A_{i+1} f = 0$ *в* D*; 3) ряд* $R^{(i,D)}_{\Gamma} f$ *сходится в* $H^m_{\Gamma}(D, E_i)$.

Доказательство. Пусть $S^0(A_{i+1}, D)$ состоит из слабых решений уравнения $A_{i+1} f = 0$ в D из класса Лебега $L^2(D, E_{i+1})$. Основой доказательства является следующая лемма.

Лемма 3. $\ker T^{(i,1)} \cap S^0(A_{i+1}, D) = \mathcal{H}^{i+1}_{\Gamma}(D)$.

Доказательство. Пусть $g \in \ker T^{(i,1)} \cap S^0(A_{i+1}, D)$. Из следствия 2 вытекает, что $A_i^* g = 0$ в смысле распределений в D. В частности, $g \in S^0(A_{i+1} + A_i^*, D)$. В силу эллиптичности комплекса $\{A_i, E_i\}$ мы заключаем, что $g \in C^\infty(D, E_{i+1})$.

Покажем теперь, что $\nu_i(g) = 0$ слабо на $\partial D \setminus \overline{\Gamma}$. Поскольку $g \in C^\infty(D, E_{i+1})$, мы видим, что для всех $u \in C^\infty(\overline{D}, E_i)$, равных нулю в окрестности $\overline{\Gamma}$, справедливо следующее:

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\partial D_\varepsilon} G_{A_i^*}(*u, g) = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{D_\varepsilon} (g, A_i u)_x \, dx = \int_D (g, A_i u)_x \, dx = h_D^{(i)}(T^{(i,1)} g, u) = 0$$

(здесь первое равенство получено с помощью формулы Стокса и равенства $A_i^* g = 0$, второе является следствием того факта, что $g \in L^2(D, E_{i+1})$, а третье вытекает из следствия 2). Мы доказали, что $\ker T^{(i,1)} \cap S^0(A_{i+1}, D)$ есть подмножество в $\mathcal{H}^{i+1}_{\Gamma}(D)$.

Докажем обратное включение. Возьмем $g \in \mathcal{H}^{i+1}_{\Gamma}(D) \subset S^0(A_{i+1}, D)$. В силу эллиптичности комплекса $\{A_i, E_i\}$, $g \in C^\infty(D, E_{i+1})$. Кроме того, для всех $u \in C^\infty(\bar{D}, E_i)$, равных нулю на Γ, мы имеем

$$h_D^{(i)} \left(T^{(i,1)} g, u \right) = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{D_\varepsilon} (g, A_i u)_x \; dx = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\partial D_\varepsilon} G_{A_i^*}(*u, g) = 0.$$

Поскольку такие сечения u плотны в $H^m_{\Gamma}(D, E_i)$, то $T^{(i,1)} g = 0$, что и требовалось. □

Продолжим доказательство следствия.

Необходимость его условий следует из теоремы 2 и леммы 3.

Из (5) следует, что $A_{i+1} \pi_{\ker T^{(i,1)}} f = 0$, если $f \in S^0(A_{i+1}, D)$. Значит,

$$f = \sum_{\nu=0}^{\infty} A_i \left(\mathcal{G}^{(i)} + T^{(i,2)} A^*_{i-1} \right)^{\nu} T^{(i,1)} f \tag{7}$$

для всех $f \in S^0(A_{i+1}, D)$, ортогональных $\left(\ker T^{(i,1)} \cap S^0(A_{i+1}, D)\right)$. Наконец, поскольку ряд $R^{(i,D)}_{\Gamma} f$ сходится в $H^m_{\Gamma}(D, E_i)$, то $f = A_i R^{(i,D)}_{\Gamma} f$ в D, что и требовалось. □

Теперь для $u \in H^m_{loc}(D, E_i)$ будем говорить, что $\tau_i(u) = 0$ на Γ если для всех $g \in C^\infty(\overline{D}, E_{i+1})$, для которых $\operatorname{supp} g \subset \Gamma$, мы имеем:

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\partial D_\varepsilon} G_{A_i}(*g, u) = 0.$$

Далее, положим $\mathcal{H}^{i+1}_{\Gamma,\tau}(D) = \{ g \in \mathcal{H}^{i+1}_{\Gamma}(D) : \; \tau_{i+1}(g) = 0 \text{ на } \Gamma \}$.

Эти пространства также естественно называть *гармоническими пространствами* задачи Коши в области D с данными на Γ.

Следствие 4. *Задача* 2 *разрешима тогда и только тогда, когда выполнены условия* 2), 3) *следствия* 3, $f \perp \mathcal{H}^{i+1}_{\Gamma,\tau}(D)$ *и* $\tau(f) = 0$ *на* Γ.

Доказательство. Необходимость условий 2) и 3) следствия 3 нами уже доказана. Тот факт, что условие "$f \perp \mathcal{H}^{i+1}_{\Gamma,\tau}(D)$" является необходимым, следует из условия 1) следствия 3. Что же касается условия "$\tau(f) = 0$ на Γ", то

$$\lim_{\varepsilon \to +0} \int_{\partial D_\varepsilon} G_{A_{i+1}}(w, f) = \lim_{\varepsilon \to +0} \int_{D_\varepsilon} (A_i u, A^*_{i+1} *^{-1} w)_x dx = \lim_{\varepsilon \to +0} \int_{\partial D_\varepsilon} G_{A_i}(* A^*_{i+1} *^{-1} w, u) = 0$$

для всех $w \in \mathcal{D}(X, E^*_{i+2})$, таких, что $\operatorname{supp} w \cap \partial D \subset \Gamma$, если только существует сечение $u \in H^m_{\Gamma}(D, E_i)$, удовлетворяющее $A_i u = f$ в D.

Обратно, пусть выполнены условия 2), 3), следствия 3, $f \perp \mathcal{H}^{i+1}_{\Gamma,\tau}(D)$ и $\tau(f) = 0$ на Γ. Тогда из (5) следует, что $A_{i+1} \pi_{\ker \mathfrak{T}^{(i,1)}_D} f = 0$ в D и $\tau(\pi_{\ker \mathfrak{T}^{(i,1)}_D} f) = 0$ на Γ, т.е. $\pi_{\ker \mathfrak{T}^{(i,1)}_D} f \in \mathcal{H}^{i+1}_{\Gamma,\tau}(D)$.

Значит, формула (7) справедлива для таких сечений f. Наконец, поскольку ряд $R^{(i,D)}_{\Gamma} f$ сходится в $H^m(D, E_i)$, то $f = A_i R^{(i,D)}_{\Gamma} f$, что и требовалось. $\square$

Уместно отметить, что пространства $\mathcal{H}^{i+1}_{\Gamma}(D)$ и $\mathcal{H}^{i+1}_{\Gamma,\tau}(D)$, вообще говоря, не являются конечномерными.

Пусть теперь $x_0 \in \Gamma$, а Ω — такая односторонняя окрестность x_0, что $\partial\Omega \cap \Gamma$ есть открытое подмножество Γ. Как следует из формулы (5) и теоремы 2, если $f \perp \mathcal{H}^{i+1}_{\Gamma}(\Omega)$ и ряд $R^{(i,\Omega)}_{\Gamma\cap\partial\Omega} f$, построенный с помощью ядра $\Phi^{(\Gamma\cap\partial\Omega)}_i$ сходится в $H^m_{\Gamma}(\Omega, E_i)$, то он является решением уравнения $A_i u = f$ в Ω. Обратно, если существуют такая односторонняя окрестность Ω и $u \in H^m_{\Gamma}(\Omega, E_i)$, такие, что $t_i(u) = 0$ на $\Gamma\cap\partial\Omega$ и $A_i u = f$ в Ω, то ряд $R^{(i,\Omega)}_{\Gamma\cap\partial\Omega} f$ сходится в $H^m_{\Gamma}(\Omega, E_i)$. Все вышесказанное позволяет надеяться, что ряды вида $R^{(i)} f$ станут естественным заменителем разложения Тейлора, которое играет ключевую роль в доказательстве теоремы Коши-Ковалевской для вещественно аналитической задачи Коши (наш метод не требует, чтобы Γ и f были вещественно аналитическими!).

Наконец, затронем вопрос о теореме единственности задачи Коши для комплекса $\{A_i, E_i\}$. С точки зрения когомологий, естественной теоремой единственности было бы утверждение о том, что сечения из $S^m_{\Gamma}(A_i, D)$ являются A_{i-1}-точными. Хорошо известно, что это утверждение верно всегда, если внутренность Γ не пуста, $i = 0$, а коэффициенты оператора A вещественно аналитичны (в этом случае $S^m_{\Gamma}(A_i, D) = \{0\}$). В [3] указаны некоторые (достаточные) условия на $\partial D \setminus \Gamma$, при которых можно говорить о такой теореме единственности для комплекса Дольбо в $\mathbb{C}^n$ для $i > 0$. Именно, в этой работе доказано, что если $\partial D \setminus \Gamma$ есть часть границы псевдовыпуклой области G содержащей D, то $\overline{\partial}$-замкнутые формы класса $C^1(\overline{D})$, исчезающие на Γ, на самом деле $\overline{\partial}$-точны.

Список литературы

[1] Айзенберг Л.А. *Формулы Карлемана в комплексном анализе. Первые приложения* / Л.А.Айзенберг. – Новосибирск: Наука, 1990.

[2] Andreotti A. *E.E.Levi convexity and the Hans Lewy problem. Part 1. Reduction to vanishing theorems*/ A.Andreotti, D.Hill // Ann. Scuola Norm. Super. Pisa. – 1972. – V. 26. – №. 3. – P. 325–363.

[3] Nacinovich M. *Carleman formulas for the Dolbeault cohomologies*/ M.Nacinovich, B.-W.Schulze, N.N.Tarkhanov// Ann. Univ. Ferrara. Sez. VII. Sc. Mat. – 1999. – Suppl. V. XLV. – P.153 –262.

[4] Tarkhanov N.N. The Cauchy Problem for Solutions of Elliptic Equations/ N.N.Tarkhanov. – Berlin: Akademie-Verlag, 1995.

[5] Тарханов Н.Н. *Метод параметрикса в теории дифференциальных комплексов* /Н.Н.Тарханов. – Новосибирск: Наука, 1990.

[6] Schulze B.-W. *Green integrals on manifolds with cracks* / B.-W.Schulze, A.A.Shlapunov, N.N.Tarkhanov // Annals Global Analysis and Geometry. – 2003. – V. 24. – P. 131–160.

[7] Шлапунов А.А. *О задаче Коши для некоторых эллиптических комплексов с постоянными коэффициентами* / А.А.Шлапунов // Вестник КрасГУ. – Красноярск, 2003. – Сер. физ.-мат. науки. Вып. 1. – С. 62-72.

[8] Гахов Ф.Д. Краевые задачи/ Ф.Д.Гахов. – М: Наука, 1977.

[9] Тарханов Н.Н. *Ряд Лорана для решений эллиптических систем*/ Н.Н.Тарханов. – Новосибирск: Наука, 1991.

[10] Nacinovich M. *On iterations of Green's integrals and their applications to elliptic complexes*/ M.Nacinovich, A.A.Shlapunov // Mathem. Nach. – 1996. – V. 180. – P. 243–284.

REGULARIZARION OF THE CAUCHY PROBLEM FOR ELLIPTIC COMPLEXES

A.A.Shlapunov

I obtain a formula for solutions of the Cauchy problem for an elliptic complex. The solutions are represented as a sum of series. The summands of the series are iterations of potential operators constructed with the use of Green functions of the corresponding Laplacians of the complex on manifold with crack. For the Dolbeault complex at bidegree $(0,0)$ *these operators are related to Martinelli-Bochner integral.*