УДК 517.55

О НАХОЖДЕНИИ СУММ НЕКОТОРЫХ КРАТНЫХ РЯДОВ

Т.И.Качаева*

С помощью формул для нахождения степенных сумм отрицательной степени корней (и полюсов) систем уравнений, состоящих из некоторых видов целых, рациональных и мероморфных функций многих комплексных переменных, найдены суммы некоторых кратных рядов, не известные ранее.

В работе [1] получены формулы для нахождения степенных сумм корней систем мероморфных функций. Эти формулы позволяют найти суммы некоторых кратных рядов, не известные ранее. В [2] с помощью результатов работы [1] были найдены суммы некоторых двойных рядов.

Напомним основные результаты из [1]. Рассматривается система функций $f_1(z),\ f_2(z),\dots,f_n(z)$, голоморфных в окрестности точки $0\in\mathbb{C}^n$, $z=(z_1,z_2,\dots,z_n)$ и имеющих следующий вид

$$f_j(z)=z^{\beta^j}+Q_j(z),\quad j=1,2,\dots,n, \tag{1}$$

где $\beta^j=(\beta^j_1,\beta^j_2,\dots,\beta^j_n)$ — мультииндекс с целыми неотрицательными координатами, $z^{\beta^j}=z_1^{\beta^j_1}\cdot z_2^{\beta^j_2}\cdots z_n^{\beta^j_n}$ и $\|\beta^j\|=\beta^j_1+\beta^j_2+\ldots+\beta^j_n=k_j$, $j=1,2,\dots,n$. Функции Q_j разлагаются в окрестности нуля в ряд Тейлора, сходящийся абсолютно и равномерно, вида

$$Q_j(z)=\sum_{\|\alpha\|\geqslant 0}a^j_\alpha z^\alpha, \tag{2}$$

где $\alpha=(\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n)$, $\alpha_j\geqslant 0$, $\alpha_j\in\mathbb{Z}$, а $z^\alpha=z_1^{\alpha_1}\cdot z_2^{\alpha_2}\cdots z_n^{\alpha_n}$.

В дальнейшем считается, что степени всех мономов (по совокупности переменных), входящих в Q_j, строго больше чем k_j, $j=1,2,\dots,n$ ($\|\alpha\|=\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_n>k_j$).

Рассмотрим циклы $\gamma(r)=\gamma(r_1,r_2,\dots,r_n)$, являющиеся остовами поликругов:

$$\gamma(r)=\{z\in\mathbb{C}^n:|z_s|=r_s, s=1,2,\dots,n\},\quad r_1>0,\dots,r_n>0.$$

Как показано в [1], в некоторой достаточно малой окрестности нуля система

$$\begin{cases} f_1(z)=0,\\ f_2(z)=0,\\ \dots\dots\dots\dots\dots\\ f_n(z)=0\end{cases} \tag{3}$$

может иметь корни только на координатных плоскостях $\{z:z_s=0\}$, $s=1,2,\dots,n$.

Поэтому при достаточно малых r_j, определены интегралы вида

$$\int\limits_{\gamma(r)}\frac{1}{z^{\beta+I}}\cdot\frac{df}{f}=\int\limits_{\gamma(r_1,r_2,\dots,r_n)}\frac{1}{z_1^{\beta_1+1}\cdot z_2^{\beta_2+1}\cdots z_n^{\beta_n+1}}\cdot\frac{df_1}{f_1}\wedge\frac{df_2}{f_2}\wedge\ldots\wedge\frac{df_n}{f_n},$$

где $\beta_1\geqslant 0,\ \beta_2\geqslant 0,\dots,\beta_n\geqslant 0$, $\beta_j\in\mathbb{Z}$, $I=(1,1,\dots,1)$. Обозначим

$$J_\beta=\frac{1}{(2\pi i)^n}\int\limits_{\gamma(r)}\frac{1}{z^{\beta+I}}\cdot\frac{df}{f}.$$

Теорема 1 ([1]). *При сделанных предположениях для функции f_j вида (1), (2) справедливы формулы:*

$$J_\beta=\sum_{\|\alpha\|\leqslant\|\beta\|+\min(n,k_1+\ldots+k_n)}\frac{(-1)^{\|\alpha\|}}{(\beta+(\alpha_1+1)\beta^1+\ldots+(\alpha_n+1)\beta^n)!}\times\frac{\partial^k(\Delta\cdot Q^\alpha)}{\partial z^{\beta+(\alpha_1+1)\beta^1+\ldots+(\alpha_n+1)\beta^n}}\Bigg|_{z=0}=$$

$$= \sum_{\|\alpha\|\leqslant\|\beta\|+\min(n,k_1+\ldots+k_n)} (-1)^{\|\alpha\|}\mathfrak{M}\left[\frac{\Delta\cdot Q^\alpha}{z^{\beta+(\alpha_1+1)\beta^1+\ldots+(\alpha_n+1)\beta^n}}\right],$$

где $k=\|\beta+(\alpha_1+1)\beta^1+\ldots+(\alpha_n+1)\beta^n\|$, $\beta!=\beta_1!\cdot\beta_2!\cdots\beta_n!$, Δ *— якобиан системы (3),* $Q^\alpha = Q_1^{\alpha_1}\cdot Q_2^{\alpha_2}\cdots Q_n^{\alpha_n}$, $\dfrac{\partial^{\|\beta\|}}{\partial z^\beta}=\dfrac{\partial^{\|\beta\|}}{\partial z_1^{\beta_1}\partial z_2^{\beta_2}\cdots\partial z_n^{\beta_n}}$ *и, наконец,* $\mathfrak{M}$ *— линейный функционал, сопоставляющий ряду Лорана его свободный член.*

Отметим, что в указанные в теореме 1 формулы входит лишь конечное число коэффициентов функций $Q_j(z)$.

Следствие 1 ([1]). *Если все* $\beta^j=(0,0,\ldots,0)$, *то интеграл*

$$J_\beta=\sum_{\|\alpha\|\leqslant\|\beta\|}(-1)^{\|\alpha\|}\mathfrak{M}\left[\frac{\Delta\,Q^\alpha}{z^\beta}\right]=\sum_{\|\alpha\|\leqslant\|\beta\|}\frac{(-1)^{\|\alpha\|}}{\beta!}\frac{\partial^{\|\beta\|}}{\partial z^\beta}(\Delta\,Q^\alpha)\bigg|_{z=0}.$$

Далее в работе [1] рассмотренные интегралы связываются со степенными суммами корней системы (3). Для этого нужно сузить класс функций f_j. Сначала в качестве функций Q_j $(j=1,2,\ldots,n)$ берут многочлены вида

$$Q_j(z)=\sum_{\alpha\in M_j}a^j_\alpha z^\alpha, \tag{4}$$

где $\mathcal{M}_j$ — конечное множество мультииндексов такое, что при $\alpha\in\mathcal{M}_j$ координаты $\alpha_k\leqslant\beta^j_k$, $k=1,2,\ldots,n$, $k\neq j$. (Но по-прежнему предполагается, что $\|\alpha\|>k_j$ для всех $\alpha\in\mathcal{M}_j$.)

Обозначим

$$\sigma_{\beta+I}=\sigma_{(\beta_1+1,\beta_2+1,\ldots,\beta_n+1)}=\sum_{k=1}^{M}\frac{1}{z_{1(k)}^{\beta_1+1}\cdot z_{2(k)}^{\beta_2+1}\cdots z_{n(k)}^{\beta_n+1}}.$$

Данное выражение является степенной суммой корней $z_{(k)}$ системы (3), не лежащих на координатных плоскостях, но в отрицательной степени (либо степенной суммой от обратных величин корней). Число таких корней (с учетом их кратностей) обозначается через M.

Теорема 2 ([1]). *Для системы (3) с многочленами* f_j *вида (1) и многочленами* Q_j *вида (4) справедливы формулы*

$$J_\beta=(-1)^n\sigma_{\beta+I},$$

т.е.

$$\sigma_{\beta+I}=\sum_{\|\alpha\|\leqslant\|\beta\|+\min(n,k_1+\ldots+k_n)}(-1)^{\|\alpha\|+n}\mathfrak{M}\left[\frac{\Delta\cdot Q^\alpha}{z^{\beta+(\alpha_1+1)\beta^1+\ldots+(\alpha_n+1)\beta^n}}\right]. \tag{5}$$

Далее в [1] рассматривается более общая ситуация. Пусть функции f_j имеют вид

$$f_j(z)=\frac{f_j^{(1)}(z)}{f_j^{(2)}(z)},\quad j=1,2,\ldots,n, \tag{6}$$

где $f_j^{(1)}(z)$ и $f_j^{(2)}(z)$ — целые функции в $\mathbb{C}^n$, разлагающиеся в бесконечные произведения (равномерно и абсолютно сходящиеся в $\mathbb{C}^n$)

$$f_j^{(1)}(z)=\prod_{s=1}^{\infty}f_{js}^{(1)}(z),\quad f_j^{(2)}(z)=\prod_{s=1}^{\infty}f_{js}^{(2)}(z),$$

причем каждый из сомножителей имеет форму $z^{\beta^j}+Q_j(z)$, а $Q_j(z)$ — функции вида (4).

Для каждого набора индексов $j_1,\ldots,j_n$, где $j_1,\ldots,j_n\in\mathbb{N}$ и каждого набора чисел $i_1,\ldots,i_n$, где $i_1,\ldots,i_n$ равны 1 или 2, системы нелинейных алгебраических уравнений

$$f_{1j_1}^{(i_1)}(z)=0,\quad f_{2j_2}^{(i_2)}(z)=0,\ \ldots,\ f_{nj_n}^{(i_n)}(z)=0 \tag{7}$$

имеют конечное число корней, не лежащих на координатных плоскостях.

Корни всех таких систем (не лежащие на координатных плоскостях) составляют не более чем счетное множество. Перенумеруем их (с учетом кратностей): $z_{(1)},\ z_{(2)}, \ldots, z_{(l)}, \ldots$. Будем предполагать, что ряд

$$\sum_{l=1}^{\infty} \frac{1}{|z_{1(l)}| \cdot |z_{2(l)}| \cdots |z_{n(l)}|} \tag{8}$$

сходится.

Обозначим через $\sigma_{\beta+I}$ выражение

$$\sigma_{\beta+I} = \sum_{l=1}^{\infty} \frac{\varepsilon_l}{z_{1(l)}^{\beta_1+1} \cdot z_{2(l)}^{\beta_2+1} \cdots z_{n(l)}^{\beta_n+1}}.$$

Здесь $\beta_1, \ldots, \beta_n$, как и прежде, неотрицательные целые числа, а знак ε_l равен $+1$, если в систему вида (7), корнем которой является $z_{(l)}$, входит четное число функций $f_{js}^{(2)}$; и равен -1, если в систему вида (7), корень которой $z_{(l)}$, входит нечетное число функций $f_{js}^{(2)}$.

Ряды, определяющие суммы $\sigma_{\beta+I}$ сходятся, в силу условия, наложенного на ряд (8).

Для системы (3), составленной из функций вида (6), точки $z_{(l)}$ служат корнями или особыми точками (полюсами).

Теорема 3 ([1]). *Для системы (3) с функциями вида (6) справедливы равенства*

$$J_\beta = (-1)^n \sigma_{\beta+I}.$$

Отметим, что если $f_j(z)$ — целые функции, разлагающиеся в бесконечные произведения, то они сами имеют вид (1) с функциями $Q_j(z)$ вида (2). Поэтому интегралы J_β вычисляются по теореме 1.

Пример 1. Рассмотрим систему уравнений от трех комплексных переменных

$$\begin{cases} f_1(z_1, z_2, z_3) = 1 + a_1 z_1 = 0, \\ f_2(z_1, z_2, z_3) = 1 + b_1 z_1 + b_2 z_2 = 0, \\ f_3(z_1, z_2, z_3) = 1 + c_2 z_2 + c_3 z_3 = 0. \end{cases} \tag{9}$$

Здесь функции не удовлетворяют условиям теоремы 2, но удовлетворяют условиям теоремы 1. Найдем интегралы $J_{(\beta,0,0)}$. Имеем

$$J_{(\beta,0,0)} = \frac{1}{(2\pi i)^3} \int\limits_{\gamma(r)} \frac{1}{z_1^{\beta+1} z_2 z_3} \cdot \frac{df_1 \wedge df_2 \wedge df_3}{f_1 \cdot f_2 \cdot f_3} =$$

$$= \frac{1}{(2\pi i)^3} \int\limits_{\gamma(r)} \frac{1}{z_1^{\beta+1} z_2 z_3} \cdot \frac{a_1 b_2 c_3\, dz_1 \wedge dz_2 \wedge dz_3}{(1 + a_1 z_1)(1 + b_1 z_1 + b_2 z_2)(1 + c_2 z_2 + c_3 z_3)} =$$

$$= \frac{a_1 b_2 c_3}{\beta!} \cdot \frac{\partial^{\beta+1}}{\partial z_1^\beta \partial z_2} \left[\frac{1}{(1 + a_1 z_1)(1 + b_1 z_1 + b_2 z_2)(1 + c_2 z_2)} \right]_{z_1 = z_2 = 0}.$$

Для вычисления последней производной преобразуем выражение

$$\frac{1}{(1 + a_1 z_1)(1 + b_1 z_1 + b_2 z_2)(1 + c_2 z_2)} =$$

$$= \frac{1}{b_1 c_2 - a_1 c_2 + a_1 b_2} \cdot \left(\frac{b_1 c_2}{1 + c_2 z_2} \cdot \frac{1}{1 + b_1 z_1 + b_2 z_2} - \frac{a_1 c_2}{1 + a_1 z_1} \cdot \frac{1}{1 + c_2 z_2} + \frac{a_1 b_2}{1 + a_1 z_1} \cdot \frac{1}{1 + b_1 z_1 + b_2 z_2} \right).$$

Тогда

$$J_{(\beta,0,0)} = \frac{a_1 b_2 c_3}{(b_1 c_2 - a_1 c_2 + a_1 b_2)\beta!} \cdot \frac{\partial^\beta}{\partial z_1^\beta} \left[\frac{b_1 c_2}{1 + b_1 z_1} - \frac{a_1 c_2}{1 + a_1 z_1} + \frac{a_1 b_2}{1 + a_1 z_1} \cdot \frac{1}{1 + b_1 z_1} \right].$$

Применяя формулу Лейбница дифференцирования произведения двух функций, получим

$$\frac{1}{\beta!} \cdot \frac{\partial^\beta}{\partial z_1^\beta} \left(\frac{1}{1 + a_1 z_1} \cdot \frac{1}{1 + b_1 z_1} \right) = \sum_{j=0}^{\beta} (-1)^\beta a_1^j \cdot b_1^{\beta - j} = (-1)^\beta \cdot \frac{a_1^{\beta+1} - b_1^{\beta+1}}{a_1 - b_1}.$$

Тогда

$$J_{(\beta,0,0)} = \frac{(-1)^\beta a_1 b_2 c_3}{b_1 c_2 - a_1 c_2 + a_1 b_2} \cdot \left[c_2 \left(b_1^{\beta+1} - a_1^{\beta+1} \right) + a_1 b_2 \cdot \frac{a_1^{\beta+1} - b_1^{\beta+1}}{a_1 - b_1} \right].$$

Корень системы (9) равен $z_1 = -\frac{1}{a_1}$, $z_2 = \frac{b_1 - a_1}{a_1 b_2}$, $z_3 = \frac{a_1 c_2 - c_2 b_1 - a_1 b_2}{a_1 b_2 c_3}$. Поэтому степенная сумма

$$\sigma_{(\beta+1,1,1)} = \frac{(-1)^{\beta+1} a_1^{\beta+3} b_2^2 c_3}{(b_1 - a_1)(a_1 c_2 - c_2 b_1 - a_1 b_2)},$$

т.е.

$$I_{(\beta,0,0)} = -\sigma_{(\beta+1,1,1)} - \frac{(-1)^\beta a_1^2 b_2^2 c_3 b_1^{\beta+1}}{(b_1 - a_1)(a_1 c_2 - c_2 b_1 - a_1 b_2)} + \frac{(-1)^{\beta+1} a_1 b_2 c_2 c_3 \left(a_1^{\beta+1} - b_1^{\beta+1} \right)}{a_1 c_2 - c_2 b_1 - a_1 b_2}. \qquad (10)$$

Так что теорема 2 действительно для системы (9) не верна. Тем не менее проведенные вычисления и теорема 2 позволяют находить суммы некоторых кратных рядов.

Напомним известные разложения синуса в бесконечное произведение и степенной ряд:

$$\frac{\sin\sqrt{z}}{\sqrt{z}} = \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{k^2 \pi^2}\right) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k z^k}{(2k+1)!},$$

которые равномерно и абсолютно сходятся на комплексной плоскости.

Рассмотрим систему уравнений

$$\begin{cases} f_1(z_1, z_2, z_3) = \dfrac{\sin\sqrt{z_1}}{\sqrt{z_1}} = \prod\limits_{k=1}^{\infty} \left(1 - \dfrac{z_1}{k^2 \pi^2}\right) = 0, \\ f_2(z_1, z_2, z_3) = \dfrac{\sin\sqrt{z_2 - z_1}}{\sqrt{z_2 - z_1}} = \prod\limits_{m=1}^{\infty} \left(1 - \dfrac{z_2 - z_1}{m^2 \pi^2}\right) = 0, \\ f_2(z_1, z_2, z_3) = \dfrac{\sin\sqrt{z_3 - z_2}}{\sqrt{z_3 - z_2}} = \prod\limits_{s=1}^{\infty} \left(1 - \dfrac{z_3 - z_2}{s^2 \pi^2}\right) = 0. \end{cases} \qquad (11)$$

Каждая из функций этой системы разлагается в бесконечное произведение функций из системы (9). Корнями системы (11) являются точки $(\pi^2 k^2, \pi^2(k^2+m^2)), \pi^2(k^2+m^2+s^2)$, $k, m, s \in \mathbb{N}$. Поэтому степенная сумма $\sigma_{(\beta+1,1,1)}$ равна сумме ряда

$$\sigma_{(\beta+1,1,1)} = \frac{1}{\pi^{2(\beta+3)}} \sum_{k,m,s=1}^{\infty} \frac{1}{k^{2(\beta+1)}(k^2+m^2)(k^2+m^2+s^2)},$$

который, очевидно, сходится.

Для системы (11) верна теорема 1, поскольку

$$f_1 = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k z_1^k}{(2k+1)!},$$

$$f_2 = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (z_2 - z_1)^k}{(2k+1)!} = \sum_{m,n=0}^{\infty} \frac{(-1)^m (m+n)! z_1^n z_2^m}{m! n! (2m+2n+1)!},$$

а

$$f_3 = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (z_3 - z_2)^k}{(2k+1)!} = \sum_{m,n=0}^{\infty} \frac{(-1)^m (m+n)! z_2^n z_3^m}{m! n! (2m+2n+1)!}.$$

Рассмотрим интеграл $J_{(\beta,0,0)}$ для системы (11). Используя равенство (10) и вид корней системы (11), получим, что

$$J_{(\beta,0,0)} = -\sigma_{(\beta+1,1,1)} + (-1)^{\beta+1} \sum_{k,m,s=1}^{\infty} \frac{1}{\pi^{2(\beta+3)} m^{2(\beta+1)} (k^2+m^2)(k^2+m^2+s^2)} +$$

$$+ \frac{(-1)^{\beta+1}}{\pi^{2(\beta+3)}} \sum_{k,m,s=1}^{\infty} \frac{1}{s^2(k^2+m^2+s^2)} \left[\frac{1}{m^{2(\beta+1)}} + \frac{(-1)^\beta}{k^{2(\beta+1)}} \right].$$

Таким образом, для нечетных β интеграл $I_{(\beta,0,0)} = 0$, а для четных $\beta = 2n$ получим следующую формулу для нахождения суммы ряда

Теорема 4. *Справедливы формулы*

$$J_{(2n,0,0)} = \sum_{\|\alpha\|\leqslant 2n} \mathfrak{M}\left[\frac{\Delta \cdot Q^{\alpha}}{z_1^{2n}}\right] = -2\sigma_{(2n+1,1,1)} - \frac{2}{\pi^{2(2n+3)}} \sum_{k,m,s=1}^{\infty} \frac{1}{k^{2(2n+1)} \cdot s^2(k^2+m^2+s^2)}. \quad (12)$$

где Δ, Q *и* $\mathfrak{M}$ *определены в теореме 1.*

Вычислим, например, $J_{(0,0,0)}$. Якобиан

$$\Delta = \frac{\partial f_1}{\partial z_1} \cdot \frac{\partial f_2}{\partial z_2} \cdot \frac{\partial f_3}{\partial z_3} = -\frac{1}{(3!)^3} + \dots,$$

тогда

$$\mathfrak{M}[\Delta] = -\frac{1}{216}.$$

Применяя тождество

$$\frac{1}{k^2(k^2+m^2)} + \frac{1}{m^2(k^2+m^2)} = \frac{1}{k^2m^2},$$

получим, что

$$2\sigma_{(0,0,0)} = \sum_{k,m,s=1}^{\infty} \frac{1}{k^2 \cdot m^2(k^2+m^2+s^2)}.$$

Таким образом, из теоремы 4 при $n = 0$ получаем

Следствие 2. *Справедлива формула*

$$\sum_{k,m,s=1}^{\infty} \frac{1}{k^2(k^2+m^2)(k^2+m^2+s^2)} = \frac{\pi^6}{1296}.$$

Ряд такого вида отсутствует в монографии [3].

Список литературы

[1] Кытманов А.М. *Формулы для нахождения степенных сумм корней систем мероморфных функций*/ А.М.Кытманов, З.Е.Потапова // Известия вузов. Математика. – 2004 (в печати).

[2] Мысливец С.Г. *Формулы для нахождения сумм некоторых двойных рядов*/ С.Г.Мысливец, З.Е.Потапова // Вопросы математического анализа: Сб. науч. тр. – Красноярск: КрасГТУ, 2004. Вып. 7. – С. 45–53.

[3] Прудников А.П. *Интегралы и ряды. Элементарные функции*/ А.П.Прудников, Ю.А.Брычков, О.И.Маричев. – М.: Наука, 1981.

ON EVALUATION OF SUM OF SOME MULTIPLE SERIES

T.I.Kachaeva

With the help of formulas for finding of power sum of negative degree of roots (and poles) of the systems of equations, consisting from some kindes of entire, rational and meromorphic functions of many complex variables, it is obtained the sums of some multiple series unknown earlier.