ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА

УДК 519.5

СЛУЧАЙНЫЕ СОБЫТИЯ: НЕРАВЕНСТВА ФРЕШЕ И КОРРЕЛЯЦИИ ФРЕШЕ

О.Ю. Воробьёв*

Доказывается многомерное обобщение неравенств Фреше для вероятности пересечения событий и для арной ковариации множества событий. Вводится новое понятие корреляции Фреше случайных событий, определяемое как арная ковариация, нормированная границами Фреше.

Рассматривается скорее всего ранее не встречавшаяся в литературе нормированная мера взаимозависимости случайных событий, значения которой не выходят за пределы интервала $[-1, 1]$ и достигают его границ всякий раз, когда ковариация событий достигает наиболее или наименее возможного для неё значения среди всех значений, разрешенных данными вероятностями этих событий. Предлагается назвать эту меру *корреляцией Фреше*[1], поскольку в основу её определения положены неравенства, ограничивающие снизу и сверху вероятность пересечения произвольного множества событий, которые очевидным образом обобщают известные *неравенства Фреше* для вероятности пересечения двух событий. Предлагаемые в работе результаты принадлежат новому направлению — *статистической эвентологии*, или *теории случайных событий* [1, 2] — вершине современной теории вероятностей и теоретической основе статистической метафизики, а также многих наук о природе и обществе.

1. Неравенства Фреше для вероятности пересечения событий

Неравенства Фреше скорее известны как неравенства для функции распределения $F(u, v)$ двумерного случайного вектора $\boldsymbol{\xi} = (\xi_1, \xi_2)$:

$$\max\Big\{0,\ F_1(u) + F_2(v) - 1\Big\} \le F(u,v) \le \min\Big\{F_1(u),\ F_2(v)\Big\}, \quad u,\ v \in \mathbf{R}, \qquad (1)$$

ограничивающие её сверху и снизу так называемыми *границами Фреше*, которые выражаются через индивидуальные функции распределения: $F_1(x)$ и $F_2(y)$ компонент случайного вектора — случайных величин ξ_1 и ξ_2 соответственно.

[1] *Фреше Морис Рене (Fréchet Maurice René, 1878–1973)* — французский математик, основные труды его по топологии и функциональному анализу. Ввел современные понятия метрического пространства, компактности, полноты и др. Работал также в области теории вероятностей.

В основе неравенств Фреше (1) лежат более фундаментальные неравенства для вероятности пересечения двух событий x и y из алгебры некоторого вероятностного пространства $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$:

$$\max\Big\{0,\ \mathbf{P}(x)+\mathbf{P}(y)-1\Big\} \le \mathbf{P}(x\cap y) \le \min\Big\{\mathbf{P}(x),\ \mathbf{P}(y)\Big\}, \quad x,\ y\in\mathcal{F}. \qquad (0)$$

Эквивалентность этих двух видов неравенств Фреше сразу следует из определения функции распределения, если в качестве событий x и y взять события вида

$$x=\Big\{\xi_1<u\Big\}, \quad y=\Big\{\xi_2<v\Big\}.$$

Правое неравенство в (0) совершенно очевидно, а левое следует из того, что

$$\mathbf{P}(x)+\mathbf{P}(y)-1 \le \mathbf{P}(x)+\mathbf{P}(y)-\mathbf{P}(x\cup y)=\mathbf{P}(x\cap y).$$

2. Неравенства Фреше для ковариации событий

Поскольку *парная ковариация* событий x и y из алгебры $\mathcal{F}$ определяется как величина

$$\mathsf{Kov}_{xy}=\mathbf{P}(x\cap y)-\mathbf{P}(x)\mathbf{P}(y),$$

которая выражается через вероятность их пересечения и индивидуальные вероятности, то неравенства Фреше для вероятности пересечения событий влекут аналогичные неравенства для ковариации:

$$\max\Big\{0,\ \mathbf{P}(x)+\mathbf{P}(y)-1\Big\}-\mathbf{P}(x)\mathbf{P}(y) \le \mathsf{Kov}_{xy} \le \min\Big\{\mathbf{P}(x),\ \mathbf{P}(y)\Big\}-\mathbf{P}(x)\mathbf{P}(y). \quad (2')$$

Простые[2] преобразования позволяют получить из (2′) более симметричный вид:

$$-\min\Big\{\mathbf{P}(x)\mathbf{P}(y),\ \mathbf{P}(x^c)\mathbf{P}(y^c)\Big\} \le \mathsf{Kov}_{xy} \le \min\Big\{\mathbf{P}(x)\mathbf{P}(y^c),\ \mathbf{P}(x^c)\mathbf{P}(y)\Big\}. \qquad (2)$$

3. Неравенства Фреше для вероятности пересечения множества событий

Рассмотрим три события x, y и z из алгебры $\mathcal{F}$ и попытаемся найти правую и левую границу Фреше для вероятности их тройного пересечения $\mathbf{P}(x\cap y\cap z)$. Вид правой границы Фреше очевиден, поскольку:

$$\mathbf{P}(x\cap y\cap z) \le \min\Big\{\mathbf{P}(x),\ \mathbf{P}(y),\ \mathbf{P}(z)\Big\},$$

а левая граница Фреше на основании неравенства (0) для двух событий $x\cap y$ и z может быть записана в виде:

$$\max\Big\{0,\ \mathbf{P}(x\cap y)+\mathbf{P}(z)-1\Big\} \le \mathbf{P}(x\cap y\cap z).$$

Применяя ещё раз к вероятности пересечения $\mathbf{P}(x\cap y)$ неравенство (0), получим

$$\max\Big\{0,\ \mathbf{P}(x\cap y)+\mathbf{P}(z)-1\Big\} \ge \max\Big\{0,\ \max\Big\{0,\ \mathbf{P}(x)+\mathbf{P}(y)-1\Big\}+\mathbf{P}(z)-1\Big\} =$$

[2]Если преобразования справа очевидны, то преобразования слева следуют из очевидного тождества: $\mathbf{P}(x)+\mathbf{P}(y)-1-\mathbf{P}(x)\mathbf{P}(y)\equiv-\mathbf{P}(x^c)\mathbf{P}(y^c)$.

$$= \max\Big\{0,\ \max\big\{\mathbf{P}(z) - 1,\ \mathbf{P}(x) + \mathbf{P}(y) + \mathbf{P}(z) - 2\big\}\Big\} =$$

$$= \max\Big\{0,\ \mathbf{P}(x) + \mathbf{P}(y) + \mathbf{P}(z) - 2\Big\},$$

где последний переход объясняется тем, что всегда $\mathbf{P}(z) - 1 \leq 0$. Таким образом, неравенства Фреше для вероятности пересечения трёх событий имеют вид

$$\max\Big\{0,\ \mathbf{P}(x) + \mathbf{P}(y) + \mathbf{P}(z) - 2\Big\} \leq \mathbf{P}(x \cap y \cap z) \leq \min\Big\{\mathbf{P}(x),\ \mathbf{P}(y),\ \mathbf{P}(z)\Big\}, \qquad (3)$$

на основании которого можно сделать предположение о виде неравенств Фреше для вероятности пересечения произвольного множества событий $X \subseteq \mathcal{F}$:

$$\max\left\{0,\ \sum_{x\in X} \mathbf{P}(x) - |X| + 1\right\} \leq \mathbf{P}\left(\bigcap_{x\in X} x\right) \leq \min_{x\in X} \mathbf{P}(x), \qquad (4)$$

чтобы доказать их индукцией по мощности $|X|$ множества событий X.

Не будем делать полагающегося здесь индукционного перехода, а заменим его одним замечанием, которое хотя и не доказывает неравенства Фреше для вероятности пересечения множества событий, но делает их ещё более правдоподобными.

Во-первых, левая граница Фреше в неравенстве, которое превращается в равенство для вероятности "пересечения одного события", имеет очевидный вид

$$\max\Big\{0,\ 1 - \mathbf{P}(x^c)\Big\} = 1 - \mathbf{P}(x^c) = \mathbf{P}(x). \qquad (5)$$

Во-вторых, заметим, что левые границы Фреше в (2) и (3) можно переписать в эквивалентных видах

$$\max\{0,\ 1 - \mathbf{P}(x^c) - \mathbf{P}(y^c)\} \leq \mathbf{P}(x \cap y), \qquad (6)$$

$$\max\{0,\ 1 - \mathbf{P}(x^c) - \mathbf{P}(y^c) - \mathbf{P}(z^c)\} \leq \mathbf{P}(x \cap y \cap z). \qquad (7)$$

Учитывая (5), (6) и (7), легко предположить, что для вероятности пересечения произвольного множества событий левая граница имеет вид

$$\max\left\{0,\ 1 - \sum_{x\in X} \mathbf{P}(x^c)\right\} \leq \mathbf{P}\left(\bigcap_{x\in X} x\right), \qquad (8')$$

который эквивалентен левой границе в (4), поскольку

$$1 - \sum_{x\in X} \mathbf{P}(x^c) = \sum_{x\in X} \mathbf{P}(x) - |X| + 1.$$

Таким образом, неравенства Фреше (4) для вероятности пересечения произвольного множества событий можно записать ещё и так:

$$\max\left\{0,\ 1 - \sum_{x\in X} \mathbf{P}(x^c)\right\} \leq \mathbf{P}\left(\bigcap_{x\in X} x\right) \leq \min_{x\in X} \mathbf{P}(x), \quad X \subseteq \mathcal{F}. \qquad (8)$$

4. Неравенства Фреше для вероятности объединения событий

Неравенствам Фреше (8) для вероятности пересечения произвольного множества событий очевидным образом соответствуют неравенства Фреше для вероятности объединения произвольного множества событий $X \subseteq \mathcal{F}$:

$$\max_{x \in X} \mathbf{P}(x) \le \mathbf{P}\left(\bigcup_{x \in X} x\right) \le \min\left\{1, \sum_{x \in X} \mathbf{P}(x)\right\}, \tag{8''}$$

которые мгновенно получаются из (8), если воспользоваться известным теоретико-множественным соотношением

$$\bigcap_{x \in X} x^c = \left(\bigcup_{x \in X} x\right)^c.$$

5. Неравенства Фреше для арной ковариации

Арная ковариация множества событий $X \subseteq \mathcal{F}$ определяется как величина

$$\mathsf{Kov}_X = \mathbf{P}\left(\bigcap_{x \in X} x\right) - \prod_{x \in X} \mathbf{P}(x).$$

Из (8) получаем неравенства Фреше для арной ковариации произвольного множества событий $X \subseteq \mathcal{F}$:

$$\max\left\{-\prod_{x \in X} \mathbf{P}(x),\ 1 - \sum_{x \in X} \mathbf{P}(x^c) - \prod_{x \in X} \mathbf{P}(x)\right\} \le \mathsf{Kov}_X \le \min_{x \in X} \mathbf{P}(x) - \prod_{x \in X} \mathbf{P}(x), \tag{9'}$$

которые запишем окончательно так:

$$-\min\left\{\prod_{x \in X} \mathbf{P}(x),\ \prod_{x \in X} \mathbf{P}(x) + \sum_{x \in X} \mathbf{P}(x^c) - 1\right\} \le \mathsf{Kov}_X \le \min_{x \in X} \mathbf{P}(x) - \prod_{x \in X} \mathbf{P}(x). \tag{9}$$

Введем обозначения

$$F_X^- = \min\left\{\prod_{x \in X} \mathbf{P}(x),\ \prod_{x \in X} \mathbf{P}(x) + \sum_{x \in X} \mathbf{P}(x^c) - 1\right\}, \quad \min_{x \in X} \mathbf{P}(x) - \prod_{x \in X} \mathbf{P}(x) = F_X^+,$$

в которых неравенство (9) перепишется в виде

$$-F_X^- \le \mathsf{Kov}_X \le F_X^+. \tag{9''}$$

Назовем F_X^- — *левой*, а F_X^+ — *правой границей Фреше* для ковариации произвольного множества событий $X \subseteq \mathcal{F}$.

6. Корреляция Фреше случайных событий

Определим *корреляцию Фреше* произвольного множества событий $X \subseteq \mathcal{F}$ как величину

$$\mathsf{Kor}_X = \begin{cases} \mathsf{Kov}_X / F_X^+, & \mathsf{Kov}_X \geq 0, \\ \mathsf{Kov}_X / F_X^-, & \mathsf{Kov}_X \leq 0. \end{cases}$$

Свойство 1. Отметим, что корреляция Фреше произвольного множества событий $X \subseteq \mathcal{F}$ всегда лежит в интервале $[-1, 1]$:

$$-1 \leq \mathsf{Kor}_X \leq 1$$

в силу неравенств Фреше и своего определения.

Свойство 2. Кроме того, $\mathsf{Kor}_X = 0$ всякий раз, когда множество событий X арно независимо.

Свойство 3. Когда X состоит из двух событий x и y,

$$\mathsf{Kor}_{xy} = \begin{cases} 1, & \text{всякий раз, когда } x \subseteq y \text{ или } y \subseteq x, \\ -1, & \text{всякий раз, когда } x \cap y = \emptyset. \end{cases}$$

Свойство 4 (необходимое и достаточное условие максимума корреляции Фреше).

$$\mathsf{Kor}_X = 1 \quad \Longleftrightarrow \quad \left(\bigcap_{x \in X} x \right) \in X.$$

Свойство 5 (необходимое и достаточное условие минимума корреляции Фреше).

$$\mathsf{Kor}_X = -1 \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} \bigcap\limits_{x \in X} x = \emptyset, & \text{если } \sum\limits_{x \in X} \mathbf{P}(x^c) \geq 1, \\ \bigcap\limits_{x \in X} x = \Omega \setminus \sum\limits_{x \in X} x^c, & \text{если } \sum\limits_{x \in X} \mathbf{P}(x^c) < 1. \end{cases}$$

7. Симплекс распределений двух событий и его проекция на плоскость

Рассмотрим вероятностное пространство $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ и два события x и y из его алгебры $\mathcal{F}$. *Распределением вероятностей* двух событий $x, y \in \mathcal{F}$, как известно [3], называется четверка вероятностей:

$$\Big(\mathbf{P}(x^c \cap y^c), \quad \mathbf{P}(x \cap y^c), \quad \mathbf{P}(x^c \cap y), \quad \mathbf{P}(x \cap y) \Big). \tag{1}$$

Под *симплексом вероятностных распределений* двух событий понимается множество всех вероятностных распределений двух событий, изоморфное трехмерному симплексу $\mathcal{S}_3$ в четырехмерном пространстве $\mathbf{R}^4$, вершины которого соответствуют вырожденным распределениям:

$$(1,0,0,0), \quad (0,1,0,0), \quad (0,0,1,0), \quad (0,0,0,1).$$

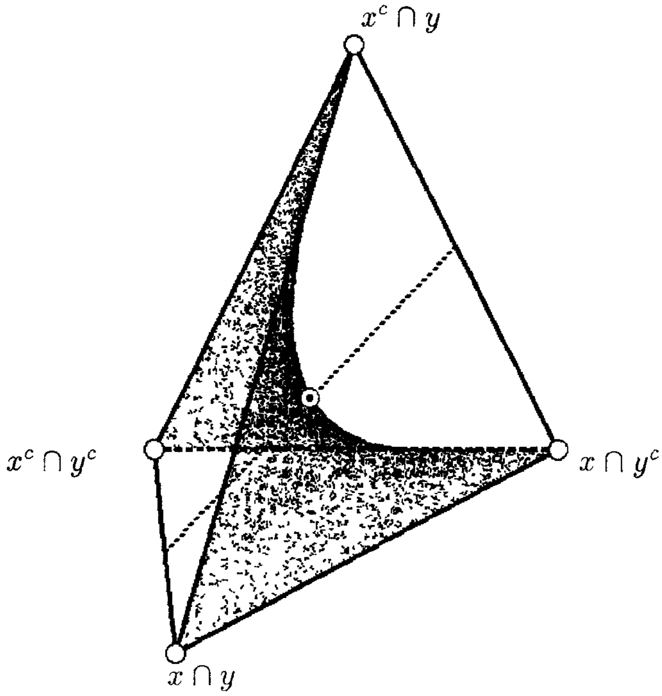

Рис. 1. Проекция симплекса распределений двух событий x и y из $\mathbf{R}^4$ на плоскость

Для независимых событий x и y вероятностное распределение определяется двумя параметрами, например их индивидуальными вероятностями $\mathbf{P}(x)$ и $\mathbf{P}(y)$:

$$\mathbf{P}(x^c \cap y^c) = (1 - \mathbf{P}(x))(1 - \mathbf{P}(y)), \quad \mathbf{P}(x \cap y) = \mathbf{P}(x)\mathbf{P}(y),$$

$$\mathbf{P}(x \cap y^c) = \mathbf{P}(x)(1 - \mathbf{P}(y)), \quad \mathbf{P}(x^c \cap y) = (1 - \mathbf{P}(x))\mathbf{P}(y).$$

Множество всех вероятностных распределений двух независимых событий — это двумерное подмножество симплекса $\mathcal{S}_3$, которое имеет седлообразную форму (рис. 1).

Для произвольных событий x и y вероятностное распределение определяется тремя параметрами, например их индивидуальными вероятностями $\mathbf{P}(x)$ и $\mathbf{P}(y)$ и ковариацией Kov_{xy}:

$$\mathbf{P}(x^c \cap y^c) = (1 - \mathbf{P}(x))(1 - \mathbf{P}(y)) + \mathsf{Kov}_{xy}, \quad \mathbf{P}(x \cap y) = \mathbf{P}(x)\mathbf{P}(y) + \mathsf{Kov}_{xy},$$

$$\mathbf{P}(x \cap y^c) = \mathbf{P}(x)(1 - \mathbf{P}(y)) - \mathsf{Kov}_{xy}, \quad \mathbf{P}(x^c \cap y) = (1 - \mathbf{P}(x))\mathbf{P}(y) - \mathsf{Kov}_{xy}.$$

На рис. 1 событием $x^c \cap y^c$ обозначена вершина $(1,0,0,0) \in \mathbf{R}^4$, соответствующая вырожденному распределению $\mathbf{P}(x^c \cap y^c) = 1$, событием $x \cap y^c$ — вершина $(0,1,0,0) \in \mathbf{R}^4$, событием $x^c \cap y$ — вершина $(0,0,1,0) \in \mathbf{R}^4$, событием $x \cap y$ — вершина $(0,0,0,1) \in \mathbf{R}^4$. Седлообразная поверхность в симплексе — множество распределений независимых событий — *парус Фреше*, соответствующий нулевой корреляции Фреше. Точка $\odot$ в центре симплекса соответствует равномерному распределению $(1/4,1/4,1/4,1/4) \in \mathbf{R}^4$. *Ветру Фреше* при фиксированных индивидуальных вероятностях $\mathbf{P}(x) = 1/2$, $\mathbf{P}(y) = 1/2$ соответствует отрезок, показанный тонким пунктиром, проходящим через центр симплекса.

8. Распределения двух событий с фиксированной корреляцией Фреше

Из определения корреляции Фреше получаем, что

$$\mathsf{Kov}_X = \begin{cases} \mathsf{Kor}_X \cdot F_X^+, & \mathsf{Kor}_X \geq 0, \\ \mathsf{Kor}_X \cdot F_X^-, & \mathsf{Kor}_X \leq 0. \end{cases}$$

Обозначим

$$F_X = \begin{cases} F_X^+ & \mathsf{Kor}_X \geq 0, \\ F_X^- & \mathsf{Kor}_X \leq 0. \end{cases}$$

Тогда распределение двух событий x и y с корреляцией Фреше Kor_{xy} определяется формулами

$$\mathbf{P}(x^c \cap y^c) = (1 - \mathbf{P}(x))(1 - \mathbf{P}(y)) + \mathsf{Kor}_{xy} \cdot F_{xy}, \quad \mathbf{P}(x \cap y) = \mathbf{P}(x)\mathbf{P}(y) + \mathsf{Kor}_{xy} \cdot F_{xy},$$

$$\mathbf{P}(x \cap y^c) = \mathbf{P}(x)(1 - \mathbf{P}(y)) - \mathsf{Kor}_{xy} \cdot F_{xy}, \quad \mathbf{P}(x^c \cap y) = (1 - \mathbf{P}(x))\mathbf{P}(y) - \mathsf{Kor}_{xy} \cdot F_{xy}.$$

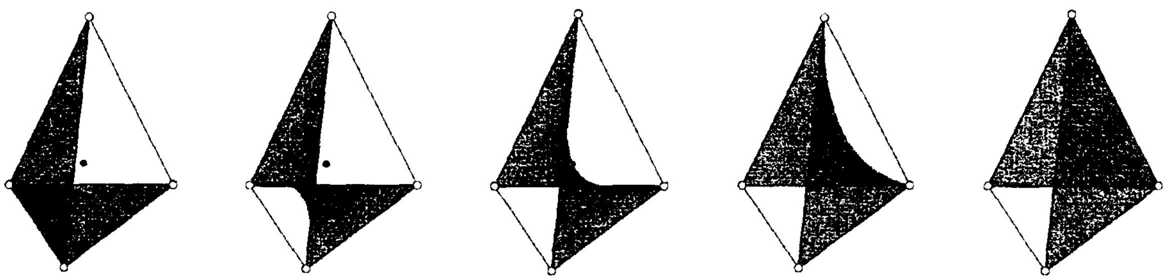

Рис. 2. *Паруса Фреше* — классы распределений двух событий x и y с фиксированными корреляциями Фреше: -1, -0.5, 0, 0.5 и 1 (слева направо)

Множество вероятностных распределений двух событий с фиксированной корреляцией Фреше — это двумерное подмножество симплекса $\mathcal{S}_3$, которое напоминает седлообразную поверхность (рис. 2) тем сильнее, чем меньше абсолютная величина корреляции Фреше.

9. Парус и ветер Фреше

Распределение вероятностей произвольного множества событий $X \subseteq \mathcal{F}$ определяется набором вероятностей

$$\mathbf{P}\left(\bigcap_{x \in Y} x\right), \quad Y \subseteq X,$$

каждую из которых можно выразить через индивидуальные вероятности событий и соответствующую корреляцию Фреше по формуле

$$\mathbf{P}\left(\bigcap_{x\in Y} x\right) = \prod_{x\in Y} \mathbf{P}(x) + \mathsf{Kor}_Y F_Y, \quad Y \subseteq X,$$

где F_Y — границы Фреше множества событий Y, которые в свою очередь также полностью определяются индивидуальными вероятностями событий из Y.

Таким образом, распределение вероятностей множества событий X полностью определяется двумя множествами параметров — множеством *индивидуальных вероятностей*:

$$\mathbf{P}(x), \quad x \in X,$$

и множеством *корреляций Фреше*:

$$\mathsf{Kor}_Y, \quad Y \subseteq X.$$

Фиксирование значений параметров из первого или второго множества определяет классы распределений, которые заслуживают имен собственных.

Назовем *парусом Фреше* класс распределений множества событий $X \subseteq \mathcal{F}$ с фиксированными корреляциями Фреше:

$$\mathsf{Kor}_Y, \quad Y \subseteq X,$$

а *ветром Фреше* — класс распределений множества событий $X \subseteq \mathcal{F}$ с фиксированными индивидуальными вероятностями

$$\mathbf{P}(x), \quad x \in X.$$

Для двух событий паруса Фреше для различных фиксированных корреляций Фреше изображены на рис. 1 и 2. Каждому ветру Фреше для двух событий соответствует отрезок прямой в симплексе распределений, вдоль которых изменяются паруса Фреше, когда корреляция Фреше меняется в пределах от -1 до $+1$.

Благодарности

Автор благодарит ФАМ семинар за неизменное благорасположение к открытому, интересному и плодотворному обсуждению.

Список литературы

[1] *Статистическая метафизика: Труды Пятой ежегодной ФАМ'2001 конференции.* - Красноярск: ИВМ СО РАН, 2001. - 310 с.

[2] *Труды Первой всерос. ФАМ'2002 конференции.* 2 т. - Красноярск: ИВМ СО РАН, 2002. - 620 с.

[3] Воробьёв О.Ю. *Теория случайных событий и её применения/* О.Ю.Воробьёв, Е.Е.Голденок, Т.В.Куприянова, Д.В.Семёнова, А.Ю.Фомин. - Красноярск: ИВМ СО РАН, 2003. - 502 с.