ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

УДК 517.545

МОДИФИКАЦИЯ АЛГОРИТМА ПРОНИ ДЛЯ НЕОДНОРОДНЫХ СИСТЕМ ОЛДУ[1]

М.Н. Завьялов*

Дана модификация известного алгоритма Прони для неоднородных систем обыкновенных линейных дифференциальных уравнений с постоянными комплексными коэффициентами.

Широко известен алгоритм Прони (и его модификации), предназначенный для восстановления экспоненциально-гармонической суммы по известным её значениям в конечном числе узлов равномерной сетки (см. [1], [2, гл.11], [3, гл.2], [4]).

В препринте [5] рассматривалась задача восстановления системы экспоненциально-гармонических сумм при аналогичных условиях. В статье [6] автор исследовал модификацию алгоритма Прони для однородной системы обыкновенных линейных дифференциальных уравнений (ОЛДУ) с неизвестными постоянными коэффициентами и изучал условия существования и единственности восстановления решения системы по его значениям на равномерной сетке в конечном числе узлов. В данной работе рассматривается подобная задача для неоднородной системы ОЛДУ, где в правой части стоят квазиполиномы.

Сформулируем точную постановку задачи. Пусть дана неоднородная система ОЛДУ с неизвестными постоянными комплексными коэффициентами:

$$\frac{d}{dt}Y(t) = AY(t) + \Lambda F(t), \qquad t \in \mathbb{R}, \tag{1}$$

где

$Y(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ \vdots \\ y_n(t) \end{pmatrix}$ – вектор-функция,

$F(t) = \begin{pmatrix} f_1(t) \\ \vdots \\ f_n(t) \end{pmatrix}$ – вектор-функция, состоящая из квазиполиномов $f_i(t)$,

A – матрица размерности $n \times n$ с элементами из постоянных комплексных чисел,
Λ – диагональная матрица размерности $n \times n$, составленная из неизвестных постоянных коэффициентов, причём стоящие на главной диагонали числа обозначим через $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$.

Напомним, что *квазиполиномом* называется конечная сумма экспонент с полиномиальными коэффициентами. Это означает,что $f_i(t)$ имеют следующий вид:

$$f_i(t) = \sum_{j=1}^{n_i} P_{ij}(t)e^{\beta_{ij}t}, \quad i = 1, \ldots, n, \tag{2}$$

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке гранта Президента РФ для ведущих научных школ РФФИ НШ-1212.2003.1

* © М.Н.Завьялов, Красноярская государственная архитектурно-строительная академия, 2003

где $P_{ij}(t)$ – полиномы с комплексными коэффициентами, n_i – количество экспонент в квазиполиноме.

Пусть $k_{ij} := deg(P_{ij}(t)) + 1, \quad i = 1, \dots, n, j = 1, \dots, n_i$. *Порядком* квазиполинома $f_i(t)$ называется число:

$$m_i = \sum_{j=1}^{n_i} k_{ij}.$$

Заметим, что порядок квазиполинома совпадает с наименьшим из возможных порядков всех линейных дифференциальных операторов с постоянными коэффициентами, аннулирующих этот квазиполином. Максимальное значение m_i по всем i обозначим как m, т.е. $m = \max\{m_i\}$.

Рассмотрим равномерную сетку на вещественной оси с заданным шагом времени $h > 0$. Значения решения системы (1) в узлах этой сетки назовём её *моментами*:

$$C_k = Y(t_k), \quad t_k = t_0 + kh, \quad k = 0, 1, \dots, N, \quad \text{где } N \geqslant n(m+1). \tag{3}$$

Рассматривается задача нахождения решения системы (1) с неизвестными матрицами A и Λ, для которого выполняются заданные краевые условия (3), т.е. обратная задача для системы дифференциальных уравнений. Вектор-функция $F(t)$ считается известной.

Далее рассматриваются только те системы ОЛДУ, которые удовлетворяют следующему условию – собственные числа матрицы A лежат в полосе $\Pi_h = \{z \in \mathbb{C} : |\Im z| < \pi/h\}$. Также, не ограничивая общности, считаем, что $t_0 = 0$ и ранг матрицы M размерности $n \times (N+1)$, составленной из моментов, как вектор-столбцов (т.е. $M = (C_0, C_1, \dots, C_N)$) равен n. В случае, когда ранг M меньше n, понижаем размерность системы (1), удаляя те строки матрицы M, которые являются линейными комбинациями остальных строк, и исключая соответствующие им функции $y_i(t)$ (см. [6, с.41-42]). Далее проводим все рассуждения для новой системы.

В статье приводится алгоритм восстановления $Y(t)$ и неизвестных матриц A и Λ (см. (1)) и указываются необходимые и достаточные условия существования и единственности решения данной задачи.

Автор благодарен своему научному руководителю Л.С. Маергойзу за постоянное внимание и помощь при выполнении данной работы.

1 Предварительные сведения

Приведём результаты для однородной системы (1), т.е. для случая $\Lambda = 0$, которые потребуются в дальнейшем (см. [6]). Заметим, что в этом случае $m = 0$, поэтому в условии (3) неравенство будет таким: $N \geqslant n$.

Обозначим через $\alpha_1, \dots, \alpha_l$ собственные значения матрицы A,
$k_1, \dots, k_l$ – соответственно их кратности ($k_1 + \ldots + k_l = n$).

Теорема 1. *Для системы (1) с нулевой матрицей Λ существует единственное решение $Y(t)$, удовлетворяющее условиям (3), тогда и только тогда, когда для векторов $C_0, C_1, \dots, C_N$ существует единственный вектор $\vec{p} = (p_1, \dots, p_n)$ такой, что*

$$C_{k+n} + p_1 C_{k+n-1} + \ldots + p_n C_k = 0, \quad k = 0, 1, \dots, N-n, \tag{4}$$

причём уравнение

$$T_n(z) = z^n + p_1 z^{n-1} + \ldots + p_n = 0 \tag{5}$$

имеет корни лишь в $\mathbb{C}\backslash(-\infty, 0]$.

Алгоритм восстановления решения выглядит следующим образом – из системы уравнений (4) при $k = 0$ находим вектор $\vec{p} = (p_1, \ldots, p_n)$. Далее находим корни уравнения (5) – $q_1, \ldots, q_l$ и соответственно их кратности $k_1, \ldots, k_l$. Полагаем $\alpha_i = (\ln q_i)/h, \quad i = 1, \ldots, l$, где берётся главное значение логарифма. Вводим следующие функции:
$\psi_1(t) = e^{\alpha_1 t}, \psi_2(t) = te^{\alpha_1 t}, \ldots, \psi_{k_1}(t) = t^{k_1-1}e^{\alpha_1 t}/(k_1 - 1)!$
$\psi_{k_1+1}(t) = e^{\alpha_2 t}, \ldots, \psi_n(t) = t^{k_l-1}e^{\alpha_l t}/(k_l - 1)!$.

Из первых n моментов, как вектор-столбцов, составляем матрицу $C = (C_0, C_1, \ldots, C_{n-1})$. Дополнительно составляем ещё две матрицы:

$$F = \begin{pmatrix} \psi_1(0) & \cdots & \psi_1(h(n-1)) \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \psi_n(0) & \cdots & \psi_n(h(n-1)) \end{pmatrix}$$

$$L = \begin{pmatrix} L_1 & & \\ & \ddots & \\ & & L_l \end{pmatrix}$$

– блочная матрица $n \times n$ (на незаполненных местах стоят нули), составленная из блоков $L_1, \ldots, L_l$ вида

$$L_i = \begin{pmatrix} \alpha_i & & & \\ 1 & \alpha_i & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & \alpha_i \end{pmatrix},$$

причём размер L_i равен $k_i \times k_i$.

Тогда само решение выглядит так:

$$Y(t) = G \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \vdots \\ \psi_n \end{pmatrix},$$

где $G = CF^{-1}$. Матрица системы (1) при условии $\Lambda = 0$ находится по формуле

$$A = GLG^{-1}.$$

2 Случай неоднородных систем ОЛДУ

Опишем модификацию алгоритма Прони для неоднородной системы вида (1). Общая идея конструкции алгоритма заключается в следующем – свести неоднородную систему вида (1) к однородной системе ОЛДУ. Тогда для новой системы можно будет применить результаты, приведённые выше.

Используя обозначения из введения, рассмотрим следующие дифференциальные операторы (см. (2)):

$$\mathcal{L}_i = \left(\frac{d}{dt}\right)^{m-m_i} \times \prod_{j=1}^{n_i} \left(\frac{d}{dt} - \beta_{ij}\right)^{k_{ij}}, \quad i = 1, \ldots, n.$$

Оператор $\mathcal{L}_i$ аннулирует квазиполином $f_i(t)$, т.е. $\mathcal{L}_i f_i \equiv 0, \quad i = 1, \ldots, n$. Ассоциируем с $\mathcal{L}_i$ многочлен

$$\chi_i(t) = z^{m-m_i} \prod_{j=1}^{n_i} (z - \beta_{ij})^{k_{ij}} = z^m + b_{i1} z^{m-1} + \ldots + b_{im}. \tag{6}$$

Применяя операторы $\mathcal{L}_1, \ldots, \mathcal{L}_n$ соответственно к 1-й, ... , n-й строке системы (1), получим однородную систему ОЛДУ, в которой присутствуют производные от функций $y_i(t)$ второго и выше порядков. Вводя стандартным образом новые функции, систему можно свести к однородной системе ОЛДУ первого порядка, но с большим числом уравнений.

С целью упростить выкладки, рассмотрим случай, когда $n = 2$, а собственные числа матрицы A являются простыми.

Применяя оператор $\mathcal{L}_1$ к первой строке системы и учитывая, что $\mathcal{L}_1 f_1 \equiv 0$ и $\mathcal{L}_1 \frac{d}{dt} = \frac{d}{dt} \mathcal{L}_1$, получаем

$$\frac{d}{dt}(\mathcal{L}_1 y_1) = a_{11}(\mathcal{L}_1 y_1) + a_{12}(\mathcal{L}_1 y_2)$$

или

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}\left(\frac{d^m y_1}{dt^m} + b_{11}\frac{d^{m-1}y_1}{dt^{m-1}} + \cdots + b_{1m}y_1\right) = \\
&= a_{11}\left(\frac{d^m y_1}{dt^m} + b_{11}\frac{d^{m-1}y_1}{dt^{m-1}} + \cdots + b_{1m}y_1\right) + \\
&+ a_{12}\left(\frac{d^m y_2}{dt^m} + b_{11}\frac{d^{m-1}y_2}{dt^{m-1}} + \cdots + b_{1m}y_2\right).
\end{aligned}$$

После элементарных преобразований находим, что

$$\begin{aligned}
\frac{d^{m+1}y_1}{dt^{m+1}} =& (a_{11} - b_{11})\frac{d^m y_1}{dt^m} + (a_{11}b_{11} - b_{12})\frac{d^{m-1}y_1}{dt^{m-1}} + \cdots \\
&\cdots + (a_{11}b_{1,m-1} - b_{1m})\frac{dy_1}{dt} + a_{11}b_{1m}y_1 + \\
&+ a_{12}\frac{d^m y_2}{dt^m} + a_{12}b_{11}\frac{d^{m-1}y_2}{dt^{m-1}} + \cdots + a_{12}b_{1m}y_2.
\end{aligned}$$

Введём следующие обозначения:

$$\begin{aligned}
&h_1 = y_1, h_2 = \frac{dh_1}{dt}, h_3 = \frac{d^2h_1}{dt^2}, \ldots, h_{m+1} = \frac{d^m h_1}{dt^m} \\
&h_{m+2} = y_2, h_{m+3} = \frac{dh_{m+2}}{dt}, h_{m+4} = \frac{d^2h_{m+2}}{dt^2}, \ldots, h_{2m+2} = \frac{d^m h_{m+2}}{dt^m}.
\end{aligned} \tag{7}$$

В этих обозначениях первое уравнение системы (1) преобразуется к виду

$$\begin{aligned}
\frac{dh_{m+1}}{dt} =& (a_{11} - b_{11})h_{m+1} + (a_{11}b_{11} - b_{12})h_m + \cdots \\
&\cdots + (a_{11}b_{1,m-1} - b_{1m})h_2 + a_{11}b_{1m}h_1 + \\
&+ a_{12}h_{2m+2} + a_{12}b_{11}h_{2m-1} + \cdots + a_{12}b_{1m}h_{m+2}.
\end{aligned}$$

Аналогично, применяя $\mathcal{L}_2$ ко второму уравнению системы и преобразуя результат с учётом обозначений (7), получим

$$\frac{dh_{2m+2}}{dt} = a_{21}h_{m+1} + a_{21}b_{21}h_m + \dots + a_{21}b_{2m}h_1 + \\ + (a_{22} - b_{21})h_{2m+2} + (a_{22}b_{21} - b_{22})h_{2m+1} + \dots \\ \dots + (a_{22}b_{2,m-1} - b_{2m})h_{m+3} + a_{22}b_{2m}h_{m+2}.$$

После всех преобразований из системы (1) получаем следующую однородную систему ОЛДУ:

$$\frac{d}{dt}H(t) = \tilde{A}H(t), \tag{8}$$

где

$H(t) = \begin{pmatrix} h_1(t) \\ \vdots \\ h_{2m+2}(t) \end{pmatrix}$ – вектор-функция из 2m+2 компонент,

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} A_{11} & B_{12} \\ B_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \tag{9}$$

есть блочная матрица $(2m+2) \times (2m+2)$, составленная из блоков вида

$$A_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ a_{ij}b_{im} & a_{ij}b_{i,m-1} - b_{im} & \cdots & a_{ij}b_{i1} - b_{i2} & a_{ij} - b_{i1} \end{pmatrix} \tag{10}$$

$$B_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ a_{ij}b_{im} & a_{ij}b_{i,m-1} & \cdots & a_{ij}b_{i1} & a_{ij} \end{pmatrix}, \tag{11}$$

причём размеры блоков равны $(m+1) \times (m+1)$.

Покажем, как будут выглядеть краевые условия для системы (8). По самому определению вектор-функции $H(t)$ получаем

$$\tilde{C}_{1k} = C_{1k},\ \tilde{C}_{m+2,k} = C_{2k}, \quad k = 0, 1, \dots, N, \tag{12}$$

где через $\tilde{C}_{ik}$ обозначена i-я координата момента $\tilde{C}_k := H(t_k)$, а C_{1k}, C_{2k} – соответственно 1-я и 2-я координаты момента C_k. Остальные координаты $\tilde{C}_k$ являются неизвестными.

Найдём собственные числа матрицы $\tilde{A}$:

$$\begin{aligned} |\tilde{A} - \lambda E| &= \begin{vmatrix} A_{11} - \lambda E' & B_{12} \\ B_{21} & A_{22} - \lambda E' \end{vmatrix} = \\ &= \begin{vmatrix} A_{11} - \lambda E' & 0 \\ B_{21} & A_{22} - \lambda E' \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} J - \lambda E'' & B_{12} \\ B_{21} & A_{22} - \lambda E' \end{vmatrix}, \end{aligned} \tag{13}$$

где E' – единичная матрица порядка $m+1$, E'' – матрица порядка $m+1$, в которой на главной диагонали, кроме последнего места, стоят единицы, а на остальных местах – нули, J – матрица порядка $m+1$, в которой над главной диагональю стоят единицы, а на остальных местах – нули.

В последнем определителе переставим местами $(m+1)$-ю и $(2m+2)$-ю строки. Тогда определитель $|\tilde{A}-\lambda E|$ преобразуется к виду (см. (13)):

$$\begin{vmatrix} A_{11}-\lambda E' & 0 \\ B_{21} & A_{22}-\lambda E' \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} B_{21}-\lambda E''+J & A_{22}-J \\ 0 & B_{12}-\lambda E''+J \end{vmatrix} =$$
$$= |A_{11}-\lambda E'|\cdot|A_{22}-\lambda E'| - |B_{21}-\lambda E''+J|\cdot|B_{12}-\lambda E''+J| =$$
$$= (-1)^{m+1}\left(\lambda^{m+1}-(a_{11}-b_{11})\lambda^m-(a_{11}b_{11}-b_{12})\lambda^{m-1}-\ldots-a_{11}b_{1m}\right)\times$$
$$\times(-1)^{m+1}\left(\lambda^{m+1}-(a_{22}-b_{21})\lambda^m-(a_{22}b_{21}-b_{22})\lambda^{m-1}-\ldots-a_{22}b_{2m}\right)-$$
$$-(-1)^m a_{21}\chi_1(t)\cdot(-1)^m a_{12}\chi_2(t) = (\lambda-a_{11})\chi_1(t)(\lambda-a_{22})\chi_2(t)-$$
$$-a_{12}a_{21}\chi_1(t)\chi_2(t) = \chi_1(t)\chi_2(t)\left[(\lambda-a_{11})(\lambda-a_{22})-a_{12}a_{21}\right],$$

где $\chi_1(t),\chi_2(t)$ – многочлены, определённые в формуле (6).

Следовательно, собственные числа матрицы $\tilde{A}$ состоят из собственных чисел α_1,α_2 матрицы A (см. (1)), числа 0 кратности $2m-m_1-m_2$, а также из показателей экспонент β_{ij} с кратностями k_{ij}, $i=1,2,\quad j=1,\ldots,n_i$ (см. (2)). Согласно теореме 1, для системы (8) существует полином $T_{2m+2}(z)$ (см. (5)), корнями которого являются $e^{\alpha_1 h}, e^{\alpha_2 h}$, $e^0=1$ – кратности $2m-m_1-m_2$ и $e^{\beta_{ij}h}$ – кратности k_{ij}. Но все эти корни, кроме $e^{\alpha_1 h}, e^{\alpha_2 h}$, известны. Отсюда получаем 2m линейных уравнений для определения координат вектора $\vec{p}=(p_1,\ldots,p_{2m+2})$, являющихся коэффициентами полинома $T_{2m+2}(z)$. Оставшиеся 2 уравнения получим из условия (4), применённого к моментам $\tilde{C}_0,\ldots,\tilde{C}_{2m+2}$. Это возможно, так как для вектор-функции $H(t)$ условие (4) выполняется, но уже применительно к краевым условиям (12).

В результате имеем систему из $2m+2$ линейных уравнений на определение координат вектора $\vec{p}$.

С помощью вектора $\vec{p}$ строим полином $T_{2m+2}(z)$ и находим его корни $q_1,\ldots,q_{2m+2}$. Среди них будут числа $e^{\beta_{ij}h}$ (кратностей k_{ij}) и $e^0=1$ кратности $2m-m_1-m_2$. Потом определяем собственные числа матрицы A как

$$\alpha_i = (\ln q_i)/h,$$

где берётся главное значение логарифма, q_i не равно $e^{\beta_{ij}h}$ и $e^0=1$ (т.е. рассматриваются всего 2 корня $T_{2m+2}(z)$).

Сами компоненты решения $Y(t)$ ищем в виде

$$y_i(t) = u_{i1}e^{\alpha_1 t} + u_{i2}e^{\alpha_2 t} + \sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{n_i} R_{ij}(t)e^{\beta_{ij}}, \quad i=1,2,$$

используя краевые условия (3). Здесь $R_{ij}(t)$ – полиномы степени $k_{ij}-1$. Найдя $y_1(t),y_2(t)$, определяем $h_1(t),\ldots,h_{2m+2}(t)$ и полностью восстанавливаем моменты $H(t)$, т.е. $\tilde{C}_k$, $k=0,1,\ldots,N$. Теперь, применяя теорему 1, находим матрицу $\tilde{A}$. Учитывая формулы (9), (10), (u11) и тот факт, что все коэффициенты $b_{ij}, i=1,\ldots,n, j=1,\ldots,m$ многочленов $\chi_i(t)$ являются известными, однозначно восстанавливаем матрицу А. Зная $Y(t), A, F(t)$, определяем матрицу Λ.

Всё вышесказанное непосредственно обобщается на случай $n>2$ и кратных собственных чисел матрицы А. Порядок матрицы $\tilde{A}$ будет равен $(m+1)n$.

Сформулируем окончательный результат в таком виде:

Теорема 2. *Для системы (1) существует единственное решение $Y(t)$, удовлетворяющее краевым условиям (3), тогда и только тогда, когда существует единственный вектор $\vec{p} = (p_1, \dots, p_S)$, где $S = (m+1)n$, такой, что*

$$C_{S+k} + p_1 C_{S+k-1} + \dots + p_S C_k = 0, \quad k = 0, 1, \dots, N-S, \tag{14}$$

причём уравнение

$$T_S(z) = z^S + p_1 z^{S-1} + \dots + p_S = 0 \tag{15}$$

имеет своими корнями числа $e^{\beta_{ij}h}$ кратностей соответственно k_{ij}, $i = 1, \dots, n$, $j = 1, \dots, n_i$ и число 1 кратности $nm - m_1 - m_2 - \ldots - m_n$, а оставшиеся корни лежат в $\mathbb{C} \backslash (-\infty, 0]$.

В этом случае матрицы A и Λ определяются единственным образом.

Список литературы

[1] Prony G.R.B. *Essai experimental et analytique* / G.R.B.Prony // J. de L'Ecole Polytechnique.– 1795.– V. 1.– №2.– P. 24-76.

[2] Марпл-мл. С.Л. *Цифровой спектральный анализ и его приложения* / С.Л.Марпл-мл. – М.: Мир, 1990.

[3] Маергойз Л.С. *Асимптотические характеристики целых функций и их приложения в математике и биофизике* / Л.С.Маергойз. – Новосибирск: Наука, 1991.

[4] Maergoiz L.S. *Extrapolation of solutions of ordinary differential equations with unknown constant coefficients* / L.S.Maergoiz // International Conference "Ill-Posed and Inverse Problems". – Abstracts. – Novosibirsk: Sobolev Institute of Mathematics, 2002. – P. 109.

[5] Голубков В.В. *Экспоненциальная аппроксимация* / В.В.Голубков, С.Я.Щербов: Препринт. – М., 1980.

[6] Завьялов М.Н. *Модификация алгоритма Прони для системы ОЛДУ с постоянными неизвестными коэффициентами* / М.Н.Завьялов // Многомерный комплексный анализ. – Красноярск: КрасГУ, 2002. – С. 37–47.