ОСЦИЛЛЯТОРНЫЙ ПОДХОД К ОПИСАНИЮ СТАТИЧЕСКОЙ ЗВЕЗДЫ С НЕЙТРАЛЬНОЙ И ЗАРЯЖЕННОЙ ИДЕАЛЬНОЙ ЖИДКОСТЬЮ

А.М. Баранов*

Рассматривается модельный подход к описанию статических звезд с нейтральной и заряженной идеальной паскалевой жидкостью в рамках общей теории относительности. Метрический интервал записан в радиационных координатах Бонди. Гравитационные уравнения сводятся к уравнению нелинейного осциллятора при введении новой переменной как функции радиальной координаты. Показано, что в этом случае для конкретных законов распределения плотностей энергии нейтральной и заряженной жидкостей возможно получение точных решений уравнений Эйнштейна-Максвелла как решений уравнения гармонического осциллятора.

В общей теории относительности наряду с известными внешним и внутренним реше-нием Шварцшильда (см., например, [1]), описывающих соответственно внешнее гравитаци-онное поле точечного (сферически-симметричного) астрофизического объекта и внутренней области статической звезды с однородным распределением нейтральной идеальной жидкости,. хорошо известно и решение уравнений тяготения для внешней области массивного сферически-симметричного тела с электрическим зарядом, называемое решением Райснера-Нордстрема (см., например, [2]). Однако у аналогичной задачи по нахождению решения для внутренней области заряженного гравитирующего тела имеются вполне понятные трудности по решению нелинейной системы дифференциальных уравнений Эйнштейна-Максвелла в среде. Кроме того, существует неоднозначность постановки такой внутренней задачи, связанной, например, с введением тензора энергии-импульса заряженной релятивистской жидкости.

В рамках общей теории относительности (ОТО) рассматривается внутренняя статическая модель звезды, имеющая некоторое распределение нейтрального вещества в виде идеальной паскалевой жидкости и распределение электрического заряда, "растворенного" в этой жидкости. При этом мы заранее не предполагаем, что вся материя заряжена, оставляя свободу для варьирования модели. Так как мы стремимся получить полную модель нашей звезды, то внутреннее решение должно быть гладко сшито с внешним. В свою очередь, внешнее гравитационное поле должно отвечать решению Райснера-Нордстрема [2], которое является обобщением решения Шварцшильда на случай заряженного сферически-симметричного тела. Таким образом, всегда имеется возможность перейти в пределе к незаряженной (нейтральной) полной модели статической звезды.

Метод дифференциальных форм Картана и нахождение компонент тензора кривизны в касательном пространстве-времени

Выберем запись метрического интервала через радиационные координаты Бонди

$$ds^2 = F(r)dt^2 + 2L(r)dtdr - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2)\,, \tag{1}$$

где t – временная координата, r – радиальная, а θ и φ – угловые переменные; $F(r)$ и $L(r)$ – метрические функции g_{00} и g_{01} соответственно, подлежащие нахождению и зависящие только от радиальной переменной; скорость света и ньютоновская гравитационная постоянная выбраны равными единице. При этом определитель ковариантной метрики равен

$$\det(g_{\alpha\beta}) \equiv g = -L^2 r^4 \sin^2\theta\,, \tag{2}$$

где греческие индексы пробегают значения 0,1,2,3. На основе заданной метрики вводим тетрады (ортонормированный 4-базис в касательном пространстве-времени):

$$g_{(0)\mu} = \delta^0_\mu;\quad g_{(1)\mu} = L\delta^1_\mu + \frac{1}{2}F\delta^0_\mu;\quad g_{(2)\mu} = -\frac{r}{\sqrt{2}}(\delta^2_\mu + i\sin\theta\,\delta^3_\mu);\quad g_{(3)\mu} = -\frac{r}{\sqrt{2}}(\delta^2_\mu - i\sin\theta\,\delta^3_\mu); \tag{3}$$

$$g_{(0)}{}^{\mu} = L^{-1}\delta^\mu_1;\quad g^\mu_{(1)} = \delta^\mu_o - \frac{1}{2}FL^{-1}\delta^\mu_1;\quad g^\mu_{(2)} = \frac{1}{r\sqrt{2}}(\delta^\mu_2 + \frac{i}{\sin\theta}\delta^\mu_3);\quad g^\mu_{(3)} = \frac{1}{r\sqrt{2}}(\delta^\mu_2 - \frac{i}{\sin\theta}\delta^\mu_3)\,, \tag{4}$$

где индексы в круглых скобках (тетрадные индексы) нумеруют базисные векторы: 0,1,2.3.

Тогда контравариантный метрический тензор записывается через тетрады как

$$g^{\mu\nu} = g^\mu_{(0)}g^\nu_{(1)} + g^\mu_{(1)}g^\nu_{(0)} - g^\mu_{(2)}g^\nu_{(3)} - g^\mu_{(3)}g^\nu_{(2)}\,. \tag{5}$$

Базисные дифференциальные 1-формы определим обычным образом, используя записанные выше тетрады,

$$\Theta^{(\alpha)} = g^{(\alpha)}{}_\mu dx^\mu\,. \tag{6}$$

Расписывая более детально, получаем

$$\Theta^{(0)}=\frac{1}{2}F\,dt+L\,dr\,;\quad \Theta^{(1)}=dt\,;\quad \Theta^{(2)}=\frac{r}{\sqrt{2}}(d\theta-i\sin\theta\,d\varphi);\quad \Theta^{(3)}=\frac{r}{\sqrt{2}}(d\theta+i\sin\theta\,d\varphi).\qquad(7)$$

В этом случае квадрат интервала (1) переписывается как

$$ds^2=2\,\Theta^{(0)}\Theta^{(1)}-2\,\Theta^{(3)}\Theta^{(2)}\,.\qquad(8)$$

Другими словами, метрика касательного пространства-времени (или тетрадная метрика) принимает следующий вид:

$$g_{(\alpha)(\beta)}=g^{(\alpha)(\beta)}=\begin{pmatrix}0&1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&0&-1\\0&0&-1&0\end{pmatrix}.\qquad(9)$$

Используя первые уравнения структуры Картана

$$d\,\Theta^{(\alpha)}=-\omega^{(\alpha)}_{\cdot\ \ (\beta)}\wedge\Theta^{(\beta)}\,,\qquad(10)$$

где d – внешний дифференциал, а операция ^ обозначает внешнее произведение, находим отличные от нуля дифференциальные 1-формы связности

$$\omega_{(1)(0)}=\frac{1}{2}F'L^{-1}\,\Theta^{(1)}\,;\quad \omega_{(0)(2)}=(Lr)^{-1}\,\Theta^{(3)}\,;\quad \omega_{(0)(3)}=(Lr)^{-1}\,\Theta^{(2)}\,;\qquad(11.1)$$

$$\omega_{(1)(2)}=-\frac{1}{2}F(Lr)^{-1}\,\Theta^{(3)}\,;\quad \omega_{(1)(3)}=-\frac{1}{2}F(Lr)^{-1}\,\Theta^{(2)}\,;\quad \omega_{(3)(2)}=\frac{1}{r\sqrt{2}}\cot\theta\,(\Theta^{(2)}-\Theta^{(3)})\,,\qquad(11.2)$$

где штрихом обозначена производная по радиальной переменной.

При этом для произвольной тетрадной метрики справедливо соотношение

$$d\,g_{(\alpha)(\beta)}=\omega_{(\alpha)(\beta)}+\omega_{(\beta)(\alpha)}\,,\qquad(12)$$

левая часть которого в рассматриваемом случае из-за постоянства тетрадной метрики (9) равна нулю, что означает наличие свойства антисимметричности 1-форм связности

$$\omega_{(\alpha)(\beta)}=-\omega_{(\beta)(\alpha)}\,.\qquad(13)$$

Далее применим вторые уравнения структуры Картана

$$\Omega^{(\alpha)}_{\cdot\ \ (\beta)}=\frac{1}{2}R^{(\alpha)}_{\cdot\ \ (\beta)(\gamma)(\delta)}\,\Theta^{(\gamma)}\wedge\Theta^{(\delta)}=d\omega^{(\alpha)}_{\cdot\ \ (\beta)}+\omega^{(\alpha)}_{\cdot\ \ (\sigma)}\wedge\omega^{(\sigma)}_{\cdot\ \ (\beta)}\,,\qquad(14)$$

где $\Omega_{(\alpha)(\beta)}=-\Omega_{(\alpha)(\beta)}$ – 2-форма кривизны, $R^{(\alpha)}_{\ (\beta)(\gamma)(\delta)}$ – тензор кривизны Римана-Кристоффеля в тетрадных обозначениях, отличные от нуля компоненты которого находятся из (14) и равны

$$R_{(1)(0)(1)(0)}=-\frac{F''}{2L^2}+\frac{F'L'}{2L^3}\,;\quad R_{(1)(2)(1)(2)}=-\frac{F^2L'}{4rL^3}\,;\quad R_{(0)(2)(0)(3)}=-\frac{L'}{rL^3}\,;\qquad(15.1)$$

$$R_{(0)(2)(1)(3)}=\frac{F\,L'}{2rL^3}-\frac{F'}{2rL^2}\,;\quad R_{(3)(2)(3)(2)}=\frac{1}{r^2}-\frac{F}{r^2L^2}\,;\quad R_{(0)(3)(1)(2)}=R_{(0)(2)(1)(3)}\,.\qquad(15.2)$$

Согласно определению тензора Риччи

$$R_{(\alpha)(\beta)}=R^{(\gamma)}_{\cdot\ \ (\alpha)(\beta)(\gamma)}=g^{(\gamma)(\sigma)}\,R_{(\sigma)(\alpha)(\beta)(\gamma)}\qquad(16)$$

легко получаются его ненулевые тетрадные компоненты

$$R_{(0)(0)}=-\frac{2}{rL^2}\cdot\frac{L'}{L}; \qquad R_{(0)(1)}=\frac{F}{rL^2}\cdot\frac{L'}{L}-\frac{F''}{2L^2}+\frac{F'}{2L^2}\cdot\frac{L'}{L}-\frac{F'}{rL^2}; \tag{17.1}$$

$$R_{(1)(1)}=-\frac{F^2}{2rL^2}\cdot\frac{L'}{L}; \qquad R_{(2)(3)}=-\frac{1}{r^2}\left(1-\frac{F}{L^2}-\frac{rF'}{L^2}+\frac{rF}{L^2}\cdot\frac{L'}{L}\right). \tag{17.2}$$

Уравнения Эйнштейна и результирующий тензор энергии-импульса в касательном пространстве-времени

Уравнения Эйнштейна в тетрадных обозначениях с источником в форме тензора энергии-импульса записываются в виде

$$G_{(\alpha)(\beta)}=R_{(\alpha)(\beta)}-\frac{1}{2}g_{(\alpha)(\beta)}R=-\kappa T_{(\alpha)(\beta)}, \tag{18}$$

где $G_{(\alpha)(\beta)}$ – тензор Эйнштейна, $R_{(\alpha)(\beta)}$ – тензор Риччи, $R^{(\alpha)}{}_{(\alpha)}=R$ – скалярная кривизна, $k=8\pi$ – постоянная Эйнштейна в выбранной нами системе единиц. Результирующий тензор энергии-импульса материи $T_{(\alpha)(\beta)}$ берется как прямая сумма тензора энергии импульса идеаль-ной паскалевой жидкости нейтральной материи и тензора энергии-импульса электромагнитного поля

$$T_{(\alpha)(\beta)}=T^{fluid}_{(\alpha)(\beta)}+T^{el-mag}_{(\alpha)(\beta)}, \tag{19}$$

где

$$T^{fluid}_{(\alpha)(\beta)}=(\mu+p)u_{(\alpha)}u_{(\beta)}-pg_{(\alpha)(\beta)}\equiv\mu u_{(\alpha)}u_{(\beta)}+pb_{(\alpha)(\beta)}; \tag{20}$$

$$T^{el-mag}_{(\alpha)(\beta)}=\frac{1}{4\pi}\left(-F_{(\alpha)(\sigma)}F^{(\sigma)}{}_{(\beta)}+\frac{1}{4}g_{(\alpha)(\beta)}F_{(\sigma)(\tau)}F^{(\sigma)(\tau)}\right); \tag{21}$$

$\mu(r)$ – плотность массы-энергии; $p(r)$ – давление идеальной паскалевой жидкости; $u_{(\alpha)}=g_{(\alpha)\mu}\dfrac{dx^\mu}{ds}$ – 4-скорость в тетрадных обозначениях ($u_{(\alpha)}u^{(\alpha)}=1$); $b_{(\alpha)(\beta)}=u_{(\alpha)}u_{(\beta)}-g_{(\alpha)(\beta)}$ – 3-проектор на пространственно-подобную гиперповерхность (или 3-метрика), ортогональный 4-скорости, $b_{(\alpha)(\beta)}u^{(\alpha)}=0$; $F_{(\alpha)(\beta)}$ – тензор электромагнитного поля, обладающий свойством $F_{(\alpha)(\beta)}=-F_{(\alpha)(\beta)}$ (все функции зависят только от радиальной переменной).

Воспользовавшись тем, что из уравнений (18) можно легко получить связь между скаляр-ной кривизной и следом тензора энергии-импульса ($T=T^{(\alpha)}{}_{(\alpha)}$)

$$R=-\kappa T, \tag{22}$$

перепишем уравнения Эйнштейна в виде, позволяющем использовать свойства тензора энергии-импульса

$$R_{(\alpha)(\beta)}=-\kappa\left(T_{(\alpha)(\beta)}-\frac{1}{2}g_{(\alpha)(\beta)}T\right). \tag{23}$$

Эта система уравнения с учетом сферической симметрии задачи эквивалентна четырем уравнениям

$$\frac{2}{rL^2}(\ln L)'=\kappa T_{(0)(0)}; \tag{24.1}$$

$$\frac{F^2}{2rL^2}(\ln L)'=\kappa T_{(1)(1)}; \tag{24.2}$$

$$\frac{F}{rL^2}(\ln L)'-\frac{1}{2L^2}\left(F''+\frac{2}{r}F'-F'(\ln L)'\right)=-\kappa\left(T_{(0)(1)}-\frac{1}{2}T\right); \tag{24.3}$$

$$\frac{1}{r^2}\left(-1+\frac{F}{L^2}+\frac{rF'}{L^2}-\frac{rF}{L^2}(\ln L)'\right)=-\kappa\left(T_{(2)(3)}+\frac{1}{2}T\right). \tag{24.4}$$

Из полученной системы гравитационных уравнений путем задания конкретного вида источника (тензора энергии-импульса) можно получить ряд известных решений. Однако для того, чтобы найти внутреннее решение для заряженной жидкости, необходимо решать самосогласованную систему уравнений, то есть необходимо дополнить систему (24.1)-(24.4) уравнениями Максвелла.

Уравнения Максвелла и наблюдаемые

Вторая пара уравнений Максвелла при наличии поля тяготения и заряженной среды записывается как (см., например, [3])

$$F^{\mu\nu}{}_{;\nu}=\frac{1}{\sqrt{-g}}\left(\sqrt{-g}\,F^{\mu\nu}\right)_{,\nu}=-4\pi\, j^{\mu}, \tag{25}$$

где j^{μ} – плотность электрического тока, а точкой с запятой обозначена ковариантная производная.

Для тензора электромагнитного поля, определенного через альтернацию производных 4-потенциала как A_{μ}

$$F_{\mu\nu}=A_{\nu,\mu}-A_{\mu,\nu}, \tag{26}$$

в рассматриваемом сферически-симметричном статическом случае отлична от нуля будет лишь одна компонента:

$$F_{01}=-A_{0,1}=-A_0', \tag{27}$$

и от системы уравнения Максвелла (25) с учетом (2) остается лишь одно уравнение

$$\frac{1}{r^2L}\left(r^2LF^{01}\right)_{,1}=-4\pi\, j^0. \tag{28}$$

Наличие статики позволяет ввести неподвижную сопутствующую систему отсчета, задаваемую 4-вектором скорости

$$u^{\mu}=\frac{\delta_0^{\mu}}{\sqrt{g_{00}}}\equiv\frac{\delta_0^{\mu}}{\sqrt{F(r)}};\qquad u_{\mu}=\frac{g_{\mu 0}}{\sqrt{g_{00}}}\equiv\frac{g_{\mu 0}}{\sqrt{F(r)}}, \tag{29}$$

и тогда физически наблюдаемые величины соответственно запишутся в виде

$$\mu_{phys}=T_{\mu\nu}^{fluid}u^{\mu}u^{\nu}=\mu(r);\qquad \rho_{phys}\equiv\rho(r)=j^{\mu}u_{\mu}=j^0\sqrt{g_{00}}\equiv j^0\sqrt{F(r)}; \tag{30}$$

$$E_{\nu}^{phys}=-F_{\nu\mu}u^{\mu}=-F_{\nu\mu}\frac{\delta_0^{\mu}}{\sqrt{g_{00}}}=\frac{F_{0\nu}}{\sqrt{F(r)}};\qquad E_{phys}\equiv E_1=\frac{F_{01}}{\sqrt{g_{00}}}=\frac{E}{\sqrt{F(r)}}; \tag{31}$$

$$W_{el}=T_{\mu\nu}^{el-mag}u^{\mu}u^{\nu}=\frac{E^2}{8\pi L^2}; \tag{32}$$

где μ_{phys} - наблюдаемая плотность массы-энергии, ρ_{phys} - наблюдаемая плотность электрического заряда, E_{ν}^{phys} - физически наблюдаемый 3-вектор напряженности электрического поля, $E_{phys}\equiv E_1$ – радиальная компонента наблюдаемой напряженности электрического поля и W_{el} – наблюдаемая плотность энергии электрического поля.

Тогда уравнение (28) переписывается в виде, пригодном для дальнейшего применения:

$$\left(\frac{r^2F_{01}}{L}\right)'=4\pi\rho(r)r^2\frac{L}{\sqrt{F(r)}}. \tag{33}$$

Следует отметить, что уравнение неразрывности для вектора плотности 4-тока (закон сохранения электрического заряда) с учетом статики тождественно выполняется

$$j^{\alpha}{}_{;\alpha} = j^{\alpha}{}_{,\alpha} + \Gamma^{\alpha}_{\alpha\chi} j^{\beta} = j^{\alpha}{}_{,\varepsilon} + (\ln\sqrt{-g})_{,\alpha} j^{\alpha} = 0. \tag{34}$$

Прежде чем переходить к решению системы уравнений Эйнштейна-Максвелла, приве-дем запись результирующего тензора энергии-импульса в тетрадных компонентах:

$$T_{(0)(0)} = \frac{1}{F}(p+\mu); \qquad T_{(1)(1)} = \frac{1}{4}F(p+\mu); \tag{35.1}$$

$$T_{(0)(1)} = \frac{1}{2}(\mu - p) + W_{el}; \qquad T_{(2)(3)} = T_{(3)(2)} = p + W_{el}. \tag{35.2}$$

Решение уравнений Эйнштейна для нейтральной идеальной жидкости

Для случая звезды, заполненной нейтральной идеальной паскалевой жидкостью, резуль-тирующий тензор энергии-импульса совпадает с тензором энергии-импульса (20), а гравита-ционные уравнения принимают вид

$$\frac{\varepsilon}{x}(\ln L)' = \chi(\mu + p); \tag{36.1}$$

$$\frac{\varepsilon}{x}(\ln L)' - \frac{1}{2L^2}\left(F'' + \frac{2}{x}F' - F'(\ln L)'\right) = -\chi p; \tag{36.2}$$

$$\frac{1}{x^2}\left(-1 + \varepsilon + \frac{xF'}{L^2} - x\varepsilon(\ln L)'\right) = -\chi\frac{1}{2}(\mu - p), \tag{36.3}$$

где теперь система уравнений Эйнштейна переписана в безразмерном виде, штрихом обозначена производная по безразмерной радиальной переменной $x=r/R$ (R - радиус звезды, $0\le x \le 1$), все функции зависят от этой переменной. Кроме того, введены новая постоянная $\chi = kR^2 = 8\pi R^2$ и новая функция ε, связывающая функции F, L и Φ, играющую (как ока-жется в дальнейшем) роль ньютоновского гравитационного потенциала внутри звезды,

$$\varepsilon(x) = \frac{F}{L^2} = 1 - \Phi(x), \tag{37}$$

и учтено, что след тензора энергии-импульса $T^{fluid}_{\alpha\beta}$ равен

$$Sp(T^{fluid}_{\alpha\beta}) \equiv T = \mu - 3p. \tag{38}$$

Система (36) путем исключения плотности массы-энергии и давления сводится к линейному дифференциальному уравнению с переменными коэффициентами на функцию $G(x)$, определенной соотношением $F = G^2$,

$$G'' + f(x)G' + g(x)G = 0, \tag{39}$$

где $f(x) = (\ln\varphi)'$, $\quad \varphi(x) = \sqrt{\varepsilon}/x$, $\quad g(x) = (2(1-\varepsilon) + x\varepsilon')/(2x^2\varepsilon)$.

Переходом к новой переменной $\xi = \xi(x)$ по правилу

$$d\zeta = \frac{xdx}{\sqrt{\varepsilon(x)}} = \frac{dy}{2\sqrt{\varepsilon(y)}}, \tag{40}$$

уравнение (39) переписывается в самосопряженном виде и превращается в уравнение для нелинейного осциллятора по пространственной переменной

$$G''_{\zeta\zeta} + \Omega^2(\zeta(x))G = 0, \tag{41}$$

где $y = x^2$, штрихи обозначают производные по переменной ξ, квадрат "частоты" Ω^2 из-за неинтегрируемости в элементарных функциях соотношения (40) проще записывается как функция переменной y

$$\Omega^2 = -\frac{d}{dy}\left(\frac{\Phi}{y}\right). \qquad (42)$$

Функция Φ может быть получена из гравитационных уравнений (36) в виде

$$\Phi = 1 - \varepsilon = \frac{\chi}{x}\int \mu(x)\, x^2\, dx = \frac{\chi}{2\sqrt{y}}\int \mu(y)\sqrt{y}\, dy. \qquad (43)$$

Так как у нас все еще имеется свобода на выбор функций, то определим плотность массы-энергии μ как квадратичную функцию по x, исчезающую на поверхности звезды (как это сделано в [4-5]):

$$\mu = \mu_0(1 - x^2) = \mu_0(1 - y), \qquad (44)$$

где μ_0 - центральная плотность массы-энергии звезды.

Такой выбор функциональный зависимости плотности массы-энергии соответствует газообразной модели звезды (без резкой границы). При этом уравнение (41) превращается в уравнение для линейного гармонического осциллятора (пространственного)

$$G''_{\zeta\zeta} + \Omega_0^2\, G = 0 \qquad (45)$$

с постоянной собственной частотой $\Omega_0^2 = \chi\,\mu_0/5$, зависящей от центральной плотности звезды.

Общее решение для уравнения (45) для функции G запишется как

$$G = G_0 \cos(\Omega_0 \zeta(x) + \alpha) \qquad (46)$$

или для метрической функции $g_{00} = F = G^2$

$$F = G_0^2 \cos(\Omega_0 \zeta(x) + \alpha), \qquad (47)$$

где α - сдвиг фазы, $\xi(x)$- квадратура, зависящая от параметра μ_0,

$$\zeta(x) = \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{4b - a^2}}\,\mathrm{Arsh}\left(\frac{2b}{\sqrt{4b - a^2}}\left(x^2 - \frac{a^2}{2b}\right)\right), \qquad (48)$$

где $a = \chi\,\mu_0/3$, $b = \chi\mu_0/5$.

Решение уравнений Эйнштейна-Максвелла для заряженной идеальной жидкости

При учете наличия заряженной идеальной жидкости, заполняющей звезду, уравнения Эйнштейна-Максвелла сводятся к следующей системе нелинейных дифференциальных уравнений:

$$\frac{\varepsilon}{x}(\ln L)' = \chi(\mu + p); \qquad (49.1)$$

$$\frac{\varepsilon}{x}(\ln L)' - \frac{1}{2L^2}\left(F'' + \frac{2}{x}F' - F'(\ln L)'\right) = -\chi\left(p + W_{el}\right); \qquad (49.2)$$

$$\frac{1}{x^2}\left(-1 + \varepsilon + \frac{xF'}{L^2} - x\varepsilon(\ln L)'\right) = -\chi\left(\frac{1}{2}(\mu - p) + W_{el}\right); \qquad (49.3)$$

$$\left(\frac{x^2 E}{L}\right)' = 4\pi R\,\rho\,\frac{x^2}{\sqrt{\varepsilon}}. \qquad (49.4)$$

Как и в предыдущем случае, первые три уравнения при исключении плотности массы-энергии и давления сводятся к уравнению (39) с тем лишь различием, что теперь коэффициент $g(x)$ равен

$$g(x) = \frac{2(1-\varepsilon) + x\varepsilon'}{2x^2\,\varepsilon} - \frac{2\chi W_{el}}{\varepsilon}. \tag{50}$$

Переход к новой переменной (40) в уравнении (39) позволяет и в данном случае получить уравнение (41), но с новой "частотой", сдвинутой по сравнению с предыдущим случаем для нейтрального распределения вещества,

$$\Omega^2 = -\frac{d}{dy}\left(\frac{\Phi}{y}\right) - \frac{2\chi W_{el}}{y}. \tag{51}$$

При наличии электрического заряда ньютоновский гравитационный потенциал, входя-щий в выражение (51), так же отличается от своего аналога на аддитивную величину, учитываю-щей вклад энергии электрического поля:

$$\Phi = 1-\varepsilon = \frac{\chi}{x}\int\left(\mu(x) + W_{el}\right)x^2 dx = \frac{\chi}{2\sqrt{y}}\int\left(\mu(y) + W_{el}\right)\sqrt{y}\,dy. \tag{52}$$

Теперь необходимо распорядиться свободой на выбор функциональной зависимости поведения плотности энергии электрического поля внутри звезды. Здесь необходимо иметь в виду, что в отсутствии гравитации такая зависимость оказывается квадратичной по радиальной переменной, $Wel \propto r^2$. Оставим эту зависимость в общем случае и запишем [4]

$$W_{el} = \frac{\lambda^2}{8\pi}\,r^2 \equiv \frac{\lambda^2 R}{8\pi}\,x^2 \equiv \frac{\Lambda^2}{8\pi}\,y. \tag{53}$$

Для такого закона изменения плотности электрической энергии выполняется уравнение пространственного гармонического осциллятора (45) с постоянной собственной частотой

$$\Omega_0^2 = \frac{\chi}{5}\left(\mu_0 - \frac{11\Lambda^2}{8\pi}\right), \tag{54}$$

при условии положительности Ω_0^2, что эквивалентно требованию

$$\mu_0 > \frac{11\Lambda^2}{8\pi} = \frac{11Q^2}{8\pi\,R^4} = 11W_{el}(x=1), \tag{55}$$

где Q - интегральный электрический заряд звезды. Здесь использовано требование непрерыв-ности плотности электрической энергии на поверхности звезды

Тогда функция Φ принимает следующий вид:

$$\Phi(x) = \frac{\chi\,\mu_0}{3}\left(1 - \frac{3}{5}\left(1 - \frac{\Lambda^2}{8\pi\,\mu_0}\right)x^2\right)x^2. \tag{56}$$

Из уравнения Максвелла (49.4) с учетом выбранного закона изменения наблюдаемой плотности электрической энергии следует зависимость плотности электрического заряда во внутренней области звезды

$$\rho(x) = \frac{Q\cdot\sqrt{\varepsilon(x)}}{V}, \tag{57}$$

где $V = 4\pi R^3/3$ - объем евклидового 3-пространства.

Общее решение для искомых функций G и F внешне ничем не отличается от найденного выше решения для нейтральной жидкости (46)-(47), кроме входящих в выражения величины Ω_0^2 (см. (54)) и функции $\xi(x)$,

$$\zeta(x) = \frac{\sqrt{B}}{\sqrt{4B - A^2}}\,\mathrm{Arsh}\left(\frac{2B}{\sqrt{4B-A^2}}\left(x^2 - \frac{A}{2B}\right)\right), \tag{58}$$

где $A = \xi\mu_0/3 \equiv a,\ B = \chi\left(\mu_0 - \Lambda^2/8\pi\right)/5$.

В заключение необходимо отметить, что в работе продемонстрирован метод сведения гравитационных уравнений Эйнштейна с источником для статического сферически-симметричного случая к уравнению нелинейного пространственного осциллятора. Получение внутренних статических решений для идеальной паскалевой нейтральной и заряженной жидкостей, заполняющих сферически-симметричный астрофизический объект (модель звезды), тесно связано с физически интерпретируемым и обоснованным выбором входящих в исследуемую систему уравнений функций. В предположении о поведении плотностей массы-энергии и энергии электрического поля внутри звезды найдены точные решения уравнений Эйнштейна и Эйнштейна-Максвелла как решения уравнения для пространственного одномерного гармонического осциллятора. При выбранной квадратичной зависимости по радиальной переменной плотности массы-энергии вещества полученная модель звезды близка к внутренней однородной модели Шварцшильда [1], то есть найденные решения описывают так называемую шварцшильдоподобную модель, соответствующую компактному объекту, например нейтронной звезде или белому карлику.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Синг Дж. Общая теория относительности. - М.: ИИЛ, 1963. - С.236.
2. Эддингтон А.С. Математическая теория относительности. - Киев: ГНТИ Укр., 1933. - С.265.
3. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теория поля. - М.: Наука, 1988.-С.332.
4. Баранов А.М. Внутреннее сферически-симметричное статическое решение уравнений Эйнштейна-Максвелла /Ред. журн."Изв.вузов(Физика)".-Томск, 1973.- Деп.ВИНИТИ 05.06.73, № 6729-73.
5. Баранов А.М. Сферически симметричное статическое решение уравнений Эйнштейна для идеальной жидкости /Ун-т Дружбы народов им.П.Лумумбы. -М., 1976. -Деп.ВИНИТИ - 13.07.76, № 2626-76.