ДИСКРЕТНАЯ МАТЕМАТИКА

УДК 519.17

ПОЛИНОМИАЛЬНЫЕ ДОСТАТОЧНЫЕ УСЛОВИЯ БИХРОМАТИЧНОСТИ ГИПЕРГРАФА

В.В. Быкова[*]

В теории графов важную роль играют бихроматические графы, характеризуемые тем, что их хроматическое число равно двум. Простой критерий бихроматичности графа дал Д. Кениг: граф не должен содержать циклов нечетной длины. Отсутствие у графа таких циклов устанавливает эффективный (полиномиальной сложности) алгоритм обхода вершин графа в ширину, т.е. задача распознавания бихроматичности графа полиномиально разрешима. Гиперграф – это обобщение понятия графа, когда ребрами могут быть не только двухэлементные, но и любые подмножества конечного множества вершин. Вполне понятно стремление найти для гиперграфа аналог теоремы Кенига, т.е. не слишком сложный критерий отсутствия у него каких-либо частей специального типа. Данная задача оказалась настолько трудной, что полного решения пока не получила. К настоящему времени найдены лишь только достаточные или только необходимые условия бихроматичности гиперграфа, причем большинство из них алгоритмически трудно проверяемые. В данной работе доказаны теоремы, из которых следует новое достаточное условие бихроматичности гиперграфа, использующее древовидные реализации и имеющее полиномиальную сложность проверки.

Определение необходимых понятий

Пусть X – конечное множество, а U – конечное семейство подмножеств множества X. Пара $H = (X, U)$ называется гиперграфом с множеством вершин X и множеством ребер U. Гиперграф Н = $(\varnothing, \varnothing)$ считается пустым. Если вершина $x \in X$ принадлежит ребру $u \in U$, то говорят, что они инцидентны. Каждой вершине $x \in X$ гиперграфа H сопоставим множество $U(x)$ всех инцидентных ей ребер, а каждому ребру $u \in U$ – множество $X(u)$ всех инцидентных ему вершин. Вершина x, для которой $|U(x)| = 0$, называется изолированной (или голой). Ребро u при $|X(u)| = 0$ считается пустым (или голым), а при $X(u)| = 1$ – висячим. Число $|U(x)|$ называют степенью вершины x, а $|X(u)|$ – степенью ребра u. Обозначим через **Н** класс всех непустых гиперграфов без голых элементов и висячих ребер. В дальнейшем будем рассматривать гиперграфы только из этого класса. В них каждое ребро имеет не менее двух вершин. Именно такие гиперграфы представляют интерес с точки зрения вершинной раскраски.

Существуют различные способы задания гиперграфа. Так, например, любой гиперграф $H = (X, U)$ однозначно определяет одно из семейств множеств $\{X(u) / u \in U\}$, $\{U(x) / x \in X\}$ Всякий гиперграф $H = (X, U) \in$ **Н** , для которого

$$X = \{x_1, x_2, ..., x_n\},\ n \geq 1,\ U = \{u_1, u_2, ..., u_m\},\ m \geq 1,$$

однозначно описывается матрицей инциденций $A(H) = \{a_{ij}\}$, где $a_{ij} = 1$ при $x_i \in X(u_j)$ и $a_{ij} = 0$ в противном случае ($i = 1, 2, ..., n$; $j = 1, 2, ..., m$). Ясно, что любая прямоугольная матрица из нулей и единиц является матрицей инциденций некоторого гиперграфа. Гиперграф $H^* = (X^*, U^*)$ с матрицей инциденций $A(H^*) = A^{\mathrm{T}}(H)$, где т – транспонирование, называется двойственным гиперграфом для $H = (X, U)$. Верно равенство $(H^*)^* = H$. Многие свойства $H \in$ **Н** исследуются с помощью двойственного гиперграфа H^*.

Для изучения структурных особенностей гиперграфов также используются вспомогательные обыкновенные графы: $L(H)$ – реберный граф, $L^{(2)}(H)$ – граф полных реализаций ребер, $K(H)$ – кенигово представление (граф инциденций). Граф $L(H)$ отражает отношение смежности ребер, а граф $L^{(2)}(H)$ – смежности вершин гиперграфа H. При этом две вершины $x_1, x_2 \in X$ являются смежными в $H = (X, U)$, если существует ребро $u \in U$, которое содержит обе эти вершины, т.е. $x_1, x_2 \in X(u)$. Аналогичным образом, два ребра $u_1, u_2 \in U$ называются смежными, если $X(u_1) \cap X(u_2) \neq \varnothing$. Нетрудно убедиться, что $L(H) = L^{(2)}(H^*)$ и $L^{(2)}(H) = L(H^*)$. Кенигово представление гиперграфа $H = (X, U)$ – двудольный граф $K(H)$, задающий отношение инцидентности элементов гиперграфа, с множеством вершин $X \cup U$ и долями X, Y. Ясно, что граф $K(H)$ несет полную информа-

[*] ©В.В.Быкова, Красноярский государственный университет, 2006, E-mail: mathdean@lan.krasu.ru

цию о гиперграфе $H = (X, U)$ и однозначно его определяет. Кроме того, $K(H) = K(H^*)$. Существует еще один обыкновенный граф, который представляет гиперграф $H = (X, U)$. Это его реализация. Реализацией ребра $u \in U$ гиперграфа $H = (X, U)$ называется любой связный граф $G(u)$, определенный на множестве вершин $X(u)$. Реализация гиперграфа H – граф $G(H) = (X, E)$, полученный объединением некоторых реализаций $G(u)$ всех его ребер. По определению граф $G(H)$ удовлетворяет следующим условиям:

- множество его вершин совпадает с множеством вершин гиперграфа H;
- всякое его ребро $e \in E$ содержится в некотором ребре $u \in U$ гиперграфа H;
- порожденный подграф $G(u)$ связен для каждого $u \in U$.

Ясно, что для гиперграфа может существовать несколько различных реализаций. Так, граф $L^{(2)}(H)$ – реализация гиперграфа $H = (X, U)$, когда каждое ребро $u \in U$ представлено полным графом порядка $|X(u)|$. Задачи построения реализаций гиперграфа с теми или иными свойствами часто возникают в электронике при проектировании и изготовлении интегральных схем. Следует отметить, что данные задачи, как правило, очень сложны для алгоритмического решения.

К основным структурным особенностям графов и гиперграфов относятся циклы. Поскольку гиперграф – обобщение понятия графа, то для него понятие цикла не столь просто согласуется с интуитивным представлением, как в случае графа. Известно большое число определений цикла гиперграфа. Наиболее распространено определение цикла гиперграфа H через простой цикл графа инциденций $K(H)$ [1–3]. Однако в ряде приложений теории гиперграфов весьма продуктивна следующая трактовка этого понятия. Пусть для гиперграфа $H = (X, U)$ задана последовательность его ребер $P = (u_1, u_2, \ldots , u_k, u_{k+1})$. Введем обозначение: $f_i = X(u_i) \cap X(u_{i+1}) \subseteq X$, $i = 1, 2, \ldots, k$. Тогда последовательность P можно записать таким образом: $P = (u_1, f_1, u_2, f_2, \ldots, u_k, f_k, u_{k+1})$. Последовательность P определяет цикл гиперграфа H, если при $k \geq 3$:

- $u_1, u_2, \ldots, u_{k+1}$ – различные ребра гиперграфа H (различные как элементы семейства U, при этом не исключено наличие среди них кратных и вложенных ребер);
- каждые два соседних ребра в P смежны, т.е. $f_i \neq \varnothing$ для любого $i = 1, 2, \ldots, k$;
- $f_i \neq f_{i+1}$ для всякого $i = 1, 2, \ldots, k$;
- $u_1 = u_{k+1}$ и $f_1 \neq f_k$.

Если все множества $f_1, f_2, \ldots, f_k$ попарно различны, то P задает простой цикл гиперграфа H. Цикл $P = (u_1, u_2, \ldots, u_k, u_{k+1})$ называется бесхордовым, если выполнено условие: для любой тройки его множеств f_a, f_b, f_c ($1 \leq a < b < c \leq k$) в гиперграфе H не существует ребра $u \in U$ такого, что $f_a \cup f_b \cup f_c \subseteq X(u)$. Если такое ребро есть хотя бы для одной тройки множеств из $f_1, f_2, \ldots, f_k$, то P называют хордовым циклом гиперграфа H. Гиперграф $H = (X, U)$, не содержащий бесхордовых циклов, называется М-ациклическим (ацикличность по Д. Мейеру) [4, 5]. При наличии в H хотя бы одного бесхордового цикла данный гиперграф считается М-циклическим. Очевидно, что всякий обыкновенный граф, имеющий традиционные для теории графов циклы, М-цикличен. Двойственный гиперграф H^* обладает (не обладает) свойством М-ацикличности независимо от того, является ли М-ациклическим соответствующий ему гиперграф H.

Принятое в теории графов понятие правильной раскраски также по-разному распространяется на гиперграфы. Различают сильную и слабую раскраски гиперграфа [2]. Раскраска вершин гиперграфа называется правильной, если никакие две различные вершины, инцидентные одному и тому же ребру, не окрашены одинаково. Такую правильную раскраску называют сильной. Она полностью совпадает с правильной раскраской вершин вспомогательного графа $L^{(2)}(H)$ и поэтому мало интересна для гиперграфов. Наиболее глубоко по сути понятие слабой раскраски, когда любое ребро $u \in U$ гиперграфа, для которого $X(u)| \geq 2$, содержит хотя бы две вершины, окрашенные в различные цвета. Следует заметить, что в самом определении слабой раскраски требуется, чтобы каждое ребро гиперграфа содержало не менее двух вершин. Таким образом, слабая раскраска применима лишь для гиперграфов из класса **H.** Гиперграф $H = (X, U) \in \mathbf{H}$ считается бихроматическим, если хроматическое число $\chi(H) = 2$, т.е. для его правильной раскраски достаточно двух цветов. Раскраски ребер гиперграфа обычно не рассматривают, поскольку они – раскраски вершин двойственного гиперграфа.

Известные условия бихроматичности гиперграфа

Для гиперграфа пока не найдено критериев бихроматичности в терминах его структуры. Вот некоторые известные необходимые и достаточные условия бихроматичности гиперграфа [1–3].

Утверждение 1 (А. Зыков, 1974). Для бихроматичности гиперграфа $H \in \mathbf{H}$:

- необходимо, чтобы H не содержал ни одного цикла нечетной длины, состоящего только из ребер степени 2;
- достаточно, чтобы H вообще не содержал циклов нечетной длины.

Утверждение 2 (Ж. Фурнье, М. Лас Верньянс, 1972). Если в каждом цикле нечетной длины гиперграфа $H \in \mathbf{H}$ есть три ребра, имеющие общую инцидентную вершину (она не обязательно вершина этого цикла), то гиперграф H является бихроматическим.

У т в е р ж д е н и е 3 (К. Берж, 1970). Если гиперграф $H \in \mathbf{H}$ уравновешен, т.е. каждый его простой цикл нечетной длины содержит хотя бы одно ребро, инцидентное не менее чем трем вершинам этого цикла, то он бихроматичен. Кроме того, бихроматичны все его полновершинные и полнореберные подграфы.

У т в е р ж д е н и е 4 (М. Бурштейн, А. Косточка, 1970). Плоский гиперграф $H \in \mathbf{H}$, содержащий не более одного ребра степени 2, бихроматичен.

Заметим, что гиперграф H считается плоским, если его кенигово представление $K(H)$ – планарный граф. Из приведенных достаточных условий бихроматичности наиболее широкий класс гиперграфов задает утверждение 2. В самом деле, если обозначить через $\mathbf{K}_1 - \mathbf{K}_4$ классы бихроматических гиперграфов, определенные достаточными условиями утверждений 1 – 4 соответственно, то верны отношения вложенности

$$\mathbf{K}_1 \subset \mathbf{K}_3 \subset \mathbf{K}_2.$$

Класс $\mathbf{K}_4$ не входит ни в один из классов $\mathbf{K}_1 - \mathbf{K}_3$, хотя имеет с ними непустые пересечения. Если $\mathbf{H}$ вырождается в класс обыкновенных графов, то $\mathbf{K}_1$, $\mathbf{K}_2$, $\mathbf{K}_3$ совпадают и включают в себя все двудольные графы без изолированных вершин, а $\mathbf{K}_4$ – только одно дерево, состоящее из единственного ребра. Что касается проверки сложности условий утверждений 1 – 4, то для $\mathbf{K}_1$, $\mathbf{K}_4$ она полиномиальная, а для $\mathbf{K}_2$, $\mathbf{K}_3$ – неполиномиальная.

Примечательно, что в утверждениях 1 – 3 под циклом понимается чередующаяся последовательность вершин и ребер гиперграфа H, порождающая простой цикл графа $K(H)$. Для получения нового достаточного условия воспользуемся другой трактовкой цикла гиперграфа [4, 5]. Установим связь между свойствами бихроматичности и М-ацикличности гиперграфа. Для начала выявим свойства реализаций бихроматического гиперграфа.

Бихроматические гиперграфы и их реализации

Для бихроматических гиперграфов справедлива следующая теорема.

Т е о р е м а 1. Гиперграф $H = (X, U) \in \mathbf{H}$ бихроматичен тогда и только тогда, когда для него существует реализация двудольным графом.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть гиперграф $H = (X, U)$ бихроматичен, т.е. $\chi(H) = 2$, и известна некоторая 2-раскраска его вершин. Построим для него граф $L^{(2)}(H) = (X, U_2)$ полных реализаций ребер. Напомним, что этот граф отражает отношение смежности вершин гиперграфа H. Поскольку по предположению в H нет голых элементов и висячих ребер, то в $L^{(2)}(H)$ нет изолированных вершин. Всякая правильная 2-раскраска вершин гиперграфа H продуцирует некоторую 2-раскраску вершин графа $L^{(2)}(H)$, которая необязательно является правильной. Удалим из графа $L^{(2)}(H)$ минимальное число ребер так, чтобы оставшийся полновершинный подграф $G(H) = (X, E)$, $E \subseteq U_2$ был правильно окрашен двумя цветами. Очевидно, что это можно сделать всегда путем удаления из $L^{(2)}(H)$ всех тех ребер, концевые вершины которых окрашены в один цвет. Из теории графов известно, что всякий граф, отличный от безреберного, бихроматичен тогда и только тогда, когда он двудолен. Учитывая, что $|X(u)| \geq 2$ для любого $u \in U$ и минимальность числа вынимаемых из $L^{(2)}(H)$ ребер, заключаем: построенный бихроматический подграф $G(H) = (X, E)$ отличен от безреберного и двудолен.

Остается убедиться, что $G(H) = (X, E)$ – реализация гиперграфа H. Для этого проверим три условия, определяющие реализацию гиперграфа. Первое условие выполнено, поскольку $G(H)$ – полновершинный подграф графа $L^{(2)}(H)$. Второе условие очевидным образом также верно. В самом деле, по определению любое ребро $u \in U_2$ графа $L^{(2)}(H)$ всегда содержится в некотором ребре гиперграфа H. Принимая во внимание тот факт, что $E \subseteq U_2$, это справедливо и для каждого ребра $u \in E$ графа $G(H) = (X, E)$. Третье условие требует, чтобы для любого $u \in U$ порожденный подграф $G(u)$ графа $G(H) = (X, E)$ был связен. Докажем это.

Пусть u – произвольное ребро гиперграфа H и $G(u)$ – подграф, порожденный множеством вершин $X(u) = \{x_1, x_2, ..., x_r\}$, $r \geq 2$. Поскольку в графе $L^{(2)}(H)$ всякое ребро $u \in U$ гиперграфа H реализуется полным подграфом K_r с множеством вершин $X(u)$, то подграф $G(u)$ получается из K_r удалением тех ребер, концевые вершины которых окрашены в один цвет. Кроме того, $G(u)$ не может содержать изолированных вершин, т.к. удаляется минимально необходимое для 2-раскраски число ребер. Покажем, что подграф $G(u)$ является связным. Действительно, из бихроматичности графа $G(H)$ следует бихроматичность подграфа $G(u)$. Ведь свойство бихроматичности всегда наследуется всеми подграфами обыкновенного графа. Заметим, что для гиперграфа это верно только в том случае, если он уравновешен. Поскольку $G(u)$ бихроматичен, то множество его вершин $X(u) = \{x_1, x_2, ..., x_r\}$, где $r \geq 2$, разбивается на два независимых множества $X_1(u)$, $X_2(u)$, т.е. $X_1(u) \cup X_2(u) = X(u)$, $X_1(u) \cap X_2(u) = \varnothing$. Рассмотрим две произвольные вершины x_i, $x_j \in X(u)$, где $1 \leq i < j \leq r$, $r \geq 2$. Убедимся, что в $G(u)$ обязательно существует (x_i, x_j)-цепь.

Возможны следующие случаи. Пусть $x_i \in X_1(u)$, $x_j \in X_2(u)$. Предположим противное, т.е. отсутствие в $G(u)$ цепи, соединяющей вершины x_i, x_j. Это означает, что данные вершины принадлежат различным компонентам связности подграфа $G(u)$ (рис. 1). В каждом из множеств $X_1(u)$, $X_2(u)$ содержатся вершины одного цвета. Отсутствие в $G(u)$ ребра $\{x_i, x_j\}$ противоречит требованию минимальности числа удаляемых ребер при переходе от $L^{(2)}(H)$ к $G(H)$, а значит, и от K_r к $G(u)$. Пусть теперь $x_i, x_j \in X_1(u)$, т.е. вершины принадлежат к одному и тому же множеству одноцветных вершин. Если предположить отсутствие в $G(u)$ (x_i, x_j)-цепи, то это вновь свидетельствует о том, что вершины x_i, x_j находятся в разных компонентах связности подграфа $G(u)$ (рис. 2). Выберем некоторую вершину $x_k \in X_2(u)$, которая отлична от x_j. Такая вершина x_k всегда существует, т.к. вершина x_j не может быть изолированной в $G(u)$. Очевидно, что добавление к $G(u)$ ребра $\{x_i, x_k\}$ не нарушает правильности 2-раскраски, а его отсутствие противоречит требованию минимальности числа удаляемых ребер при переходе от K_r к $G(u)$. Таким образом, подграф $G(u)$ связен, а граф $G(H)$ является двудольной реализацией гиперграфа H.

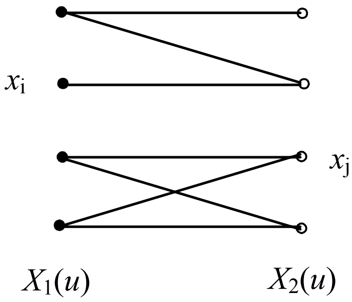


Рис. 1

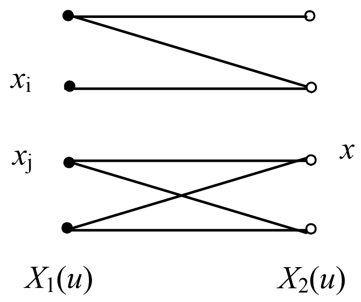


Рис. 2

Докажем достаточность условий теоремы 1. Пусть граф $G(H) = (X, E)$ – двудольная реализация гиперграфа $H = (X, U)$. Поскольку гиперграф $H = (X, U) \in \mathbf{H}$, то граф $G(H)$ не может быть безреберным. Отсюда следует, что $G(H)$ − граф с хроматическим числом, равным двум. Ясно, что всякая правильная 2-раскраска вершин графа $G(H)$ продуцирует некоторую 2-раскраску вершин гиперграфа H. Эта раскраска всегда будет правильной, т.е. любое ребро $u \in U$ гиперграфа H всегда будет содержать хотя бы две вершины разного цвета. Действительно, возьмем произвольное ребро $u \in U$ гиперграфа H. Выделим в графе $G(H)$ подграф $G(u)$, порожденный множеством вершин $X(u)$. Граф $G(H)$ – реализация гиперграфа H, поэтому подграф $G(u)$ связен. С учетом неравенства $|X(u)| \geq 2$, отсюда следует, что подграф $G(u)$ отличен от безреберного. Поскольку всякий подграф двудольного графа двудолен, то $G(u)$ − двудольный граф. Кроме того, его хроматическое число равно двум. Любые две вершины подграфа $G(u)$, окрашенные в различные цвета, являются вершинами, инцидентными ребру $u \in U$ гиперграфа H. Теорема 1 доказана.

Теорема 1 говорит о том, что задача распознавания бихроматичности гиперграфа эквивалентна и соизмерима по сложности с задачей проверки условий существования для гиперграфа двудольной реализации. Эффективных алгоритмов решения последней задачи пока не найдено. Однако если учесть, что всякая древовидная (ациклическая) реализация двудольна, то из теоремы 1 можно получить достаточное условие бихроматичности гиперграфа, имеющее полиномиальную сложность проверки [6].

Условия существования древовидной реализации

Введем понятие комплектности гиперграфа. Гиперграф $H = (X, U)$ называется комплектным, если для любого $Y \subseteq X$, порождающего в $L^{(2)}(H)$ полный подграф, существует такое ребро $u \in U$, что $Y \subseteq X(u)$ [2]. Следующие леммы устанавливают связь между комплектными и М-ациклическими гиперграфами [5].

Л е м м а 1. Произвольный гиперграф $H = (X, U) \in \mathbf{H}$ некомплектен тогда и только тогда, когда он содержит хотя бы один бесхордовый цикл длины три.

Л е м м а 2. Всякий М-ациклический гиперграф $H = (X, U) \in \mathbf{H}$ комплектен.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть гиперграф H некомплектен. Тогда по лемме 1 он содержит бесхордовый цикл длины три. Это противоречит М-ацикличности гиперграфа H.

Л е м м а 3. Если $P = (u_1, f_1, u_2, f_2, ..., u_k, f_k, u_1)$ – бесхордовый цикл длины $k \geq 4$ гиперграфа $H = (X, U) \in \mathbf{H}$, то граф $L^{(2)}(H)$ содержит простой цикл $P' = (x_1, x_2, ..., x_p, x_1)$ длины $p \geq 4$, не имеющий хорды. Если в графе $L^{(2)}(H)$ существует цикл $P' = (x_1, x_2, ..., x_p, x_1)$ длины $p \geq 4$, то любая последовательность $P = \varphi(P') = (u_1, f_1, u_2, f_2, ..., u_p, f_p, u_1)$ задает цикл гиперграфа $H = (X, U) \in \mathbf{H}$, при этом последовательность P получается из P' по правилам: $x_{i-1}, x_i \in X(u_i)$ для $2 \leq i \leq p+1$; $x_{p+1} = x_1$, $u_{p+1} = u_1$.

Л е м м а 4. Гиперграф $H = (X, U) \in \mathbf{H}$ М-ацикличен тогда и только тогда, когда он комплектен и граф $L^{(2)}(H)$ является хордовым.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть гиперграф $H = (X, U) \in \mathbf{H}$ М-ацикличен. В силу леммы 2 он комплектен. Покажем, что $L^{(2)}(H)$ – хордовый граф. Предположим противное. В этом случае в $L^{(2)}(H)$ существует простой цикл $P'=(x_1, x_2, ..., x_p, x_1)$ длины $p \geq 4$ без хорды. По лемме 3 последовательность $P = \varphi(P') = (u_1, f_1, u_2, f_2, ..., u_p, f_p, u_1)$ определяет в H бесхордовый цикл, что противоречит М-ацикличности гиперграфа H.

Докажем обратное. Пусть гиперграф H комплектен, а $L^{(2)}(H)$ – хордовый граф. Предположим, что H не является М-ациклическим гиперграфом. Тогда H содержит бесхордовый цикл $P = (u_1, f_1, u_2, f_2, ..., u_k, f_k, u_1)$ длины k. Поскольку H комплектен, то $k \geq 4$ в силу леммы 1. По лемме 3 в графе $L^{(2)}(H)$ существует простой цикл $P'=(x_1, x_2, ..., x_p, x_1)$ длины $p \geq 4$, не имеющий хорды. Это противоречит предположению, что $L^{(2)}(H)$ – хордовый граф.

Лемма 4 может быть сформулирована через свойство Хелли, которое двойственно по отношению к свойству комплектности гиперграфа. Говорят, что гиперграф $H = (X, U)$ обладает свойством Хелли, если для любого подсемейства его попарно смежных ребер $U' \subseteq U$ верно условие $\cap X(u) \neq \varnothing$, где $u \in U'$, т.е. существует по крайне мере одна общая вершина, инцидентная каждому ребру из U'. В работе [2] доказано, что гиперграф $H = (X, U)$ без голых элементов комплектен тогда и только тогда, когда двойственный к нему гиперграф $H^* = (X^*, U^*)$ обладает свойством Хелли. Отсюда, с учетом равенств $L(H) = L^{(2)}(H^*)$, $L^{(2)}(H) = L(H^*)$ и леммы 4, вытекает справедливость следующей леммы.

Л е м м а 5. Гиперграф $H = (X, U) \in \mathbf{H}$ М-ацикличен тогда и только тогда, когда двойственный к нему гиперграф $H^* = (X^*, U^*)$ обладает свойством Хелли и граф $L(H^*)$ является хордовым.

В работе [3] определены необходимые и достаточные условия существования древовидной реализации: для гиперграфа H существует древовидная реализация тогда и только тогда, когда H удовлетворяет свойству Хелли, а реберный граф $L(H)$ хордовый. По лемме 5 верна двойственная формулировка этих условий.

Т е о р е м а 2. Гиперграф $H = (X, U) \in \mathbf{H}$ допускает древовидную реализацию тогда и только тогда, когда двойственный к нему гиперграф $H^* = (X^*, U^*)$ М-ацикличен.

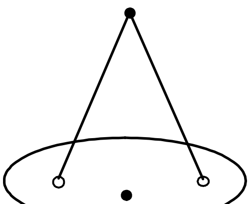
В такой формулировке критерий существования древовидной реализации гиперграфа легко алгоритмически проверяется. Действительно, если гиперграф H задан своей матрицей инциденций $A(H)$, то гиперграф H^* определяется матрицей инциденций $A(H^*) = A^{\mathrm{T}}(H)$. Проверку М-ацикличности любого гиперграфа можно выполнить с помощью эффективного алгоритма редукции, автором которого считается М. Грэхем [7].

Достаточное условие бихроматичности

Располагая теоремами 1, 2 и учитывая тот факт, что всякая древовидная реализация является двудольной, можно определить следующее достаточное условие бихроматичности гиперграфа.

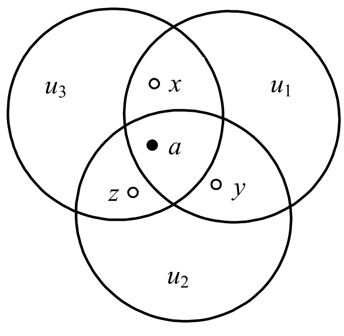
С л е д с т в и е. Если гиперграф $H^* = (X^*, U^*)$ М-ацикличен, то гиперграф $H = (X, U)$ бихроматичен.

Как показывает пример гиперграфа H_1, изображенного на рис. 3, данное достаточное условие не является необходимым. Примечательно, что этот простой по структуре бихроматический гиперграф не удовлетворяет также ни одному из утверждений 1 – 4.



H_1

Рис. 3



H_2

Рис. 4

Обозначим через $\mathbf{K}_c$ класс всех бихроматических гиперграфов, удовлетворяющих условиям следствия. Если $\mathbf{H}$ вырождается в класс обыкновенных графов, то критерию теоремы 2 подчиняются только ациклические графы без изолированных вершин. Именно такие графы составляют класс $\mathbf{K}_c$ в этом частном случае. В общем случае верны соотношения

$$\mathbf{K}_c \neq \mathbf{K}_1,\ \mathbf{K}_c \cap \mathbf{K}_1 \neq \varnothing,\ \mathbf{K}_c \not\subset \mathbf{K}_3,\ \mathbf{K}_c \cap \mathbf{K}_3 \neq \varnothing,\ \mathbf{K}_c \neq \mathbf{K}_4,\ \mathbf{K}_c \cap \mathbf{K}_4 \neq \varnothing.$$

В качестве подтверждения данных соотношений можно привести много примеров. Вот некоторые из них. Для бихроматического гиперграф H_2 с рис. 4 не выполняются требования утверждений 1, 3:

- H_2 имеет циклы нечетной длины $P_1 = (y, u_1, x, u_3, z, u_2, y)$, $P_2 = (y, u_1, a, u_3, z, u_2, y)$. Эти простые циклы хорошо видны на кениговом представлении $K(H_2)$ (рис.5);

- H_2 не уравновешен, т.к. ни одно из его ребер u_1, u_2, u_3 не инцидентно одновременно вершинам x, y, z, входящим в простой цикл P_1.

Тем не менее гиперграф H_2 подчиняется требованиям утверждений 2, 4 и условию следствия:

- ребра u_1, u_2, u_3 гиперграфа H_2, образующие циклы нечетной длины P_1, P_2, имеют общую вершину a;
- H_2 – плоский гиперграф, к котором нет ребер степени 2;
- H_2^* – М-ациклический гиперграф, поэтому для H_2 существует древовидная реализация $G(H_2)$ (рис. 6).

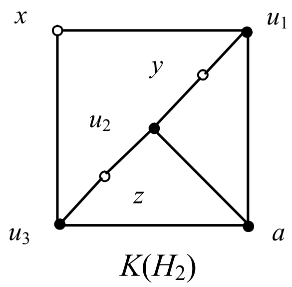


Рис. 5

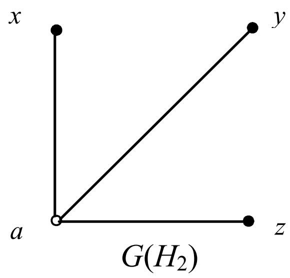


Рис. 6

Ярким примером независимости условий следствия и утверждения 4 служит бихроматический гиперграф H_3, состоящий из трех кратных ребер степени 3 (рис. 7). Он очевидным образом реализуется ациклическим графом $G(H_3)$ (рис. 8). Однако гиперграф H_3 не плоский, т.к. его кенигово представление есть непланарный граф $K_{3,3}$. Требованиям утверждения 4 не удовлетворяет также каждое обыкновенное дерево T_n порядка $n \geq 3$, хотя для него всегда существует древовидная реализация, совпадающая с ним самим, поскольку $G(T_n) = L^{(2)}(T_n) = T_n$..

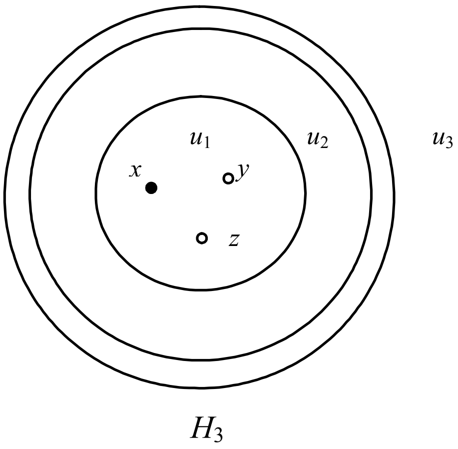


Рис. 7

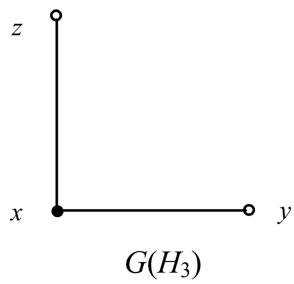


Рис. 8

Установим теперь соотношение между условиями утверждения 2 и сформулированного выше следствия. Обратимся вначале к примеру. На рис. 9 изображен бихроматический гиперграф H_4, который из всех приведенных выше достаточных условий бихроматичности удовлетворяет лишь только утверждению 2. Данный гиперграф содержит четыре цикла нечетной длины $P_1 = (z, u_6, y, u_5, d, u_4, z)$, $P_2 = (x, u_4, z, u_6, y, u_5, x)$, $P_3 = (x, u_4, d, u_6, y, u_5, x)$, $P_4 = (x, u_4, z, u_6, d, u_5, x)$, ребра u_4, u_5, u_6 которых имеют общую инцидентную вершину d (рис. 10). Он не уравновешен, содержит более одного ребра степени 2, и его двойственный гиперграф М-цикличен. Это говорит о том, что условие утверждения 2 слабее всех других достаточных условий бихроматичности, включая условия следствия. Рассуждая от противного, можно доказать, что $\mathbf{K}_c \subset \mathbf{K}_2$.

Т е о р е м а 3. Если гиперграф $H = (X, U) \in \mathbf{H}$ обладает свойством Хелли и имеет хордовый реберный граф $L(H)$, то он удовлетворяет условию утверждения 2, т.е. в каждом его цикле нечетной длины есть три ребра с общей инцидентной вершиной.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть задана чередующаяся последовательность вершин и ребер гиперграфа $H = (X, U)$, порождающая в кениговом представлении $K(H)$ простой цикл нечетной длины $k \geq 3$ и соответствующий ему цикл гиперграфа

$$P = (x_1, u_1, x_2, u_2, ..., u_k, x_1).$$

По определению в P все вершины, кроме крайних, и все ребра различны. Кроме того x_i, $x_{i+1} \in X(u_i)$ для любого $i = 1, 2, ..., k$. Поскольку реберный граф $L(H)$ отражает отношение смежности ребер гиперграфа H, то последовательность P порождает в $L(H)$ простой цикл $P' = (u_1, u_2, ..., u_k, u_1)$ длины k.

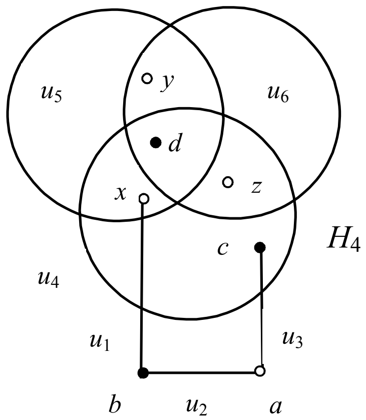


Рис. 9

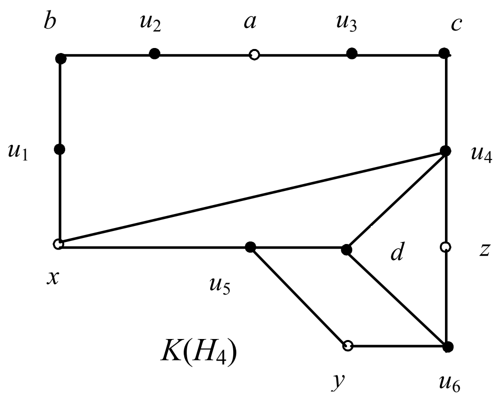


Рис. 10

Пусть гиперграф H обладает свойством Хелли и $L(H)$ – хордовый граф. Последнее означает, что в каждом простом цикле графа $L(H)$ длины $k \geq 4$ содержится ребро, соединяющее две несоседние вершины. Предположим, что в цикле P есть три ребра u_a, u_b, u_c, не имеющие общей инцидентной вершины. Возможны два случая:

- $k = 3$. Тогда $P = (x_1, u_1, x_2, u_2, x_3, u_3, x_1)$ и $u_a = u_1$, $u_b = u_2$, $u_c = u_3$. Отсутствие в P общей вершины для попарно смежных ребер u_a, u_b, u_c противоречит свойству Хелли;
- $k \geq 4$. Отсутствие для ребер u_a, u_b, u_c общей инцидентной вершины в цикле P гиперграфа H ведет к отсутствию хорды в цикле P' реберного графа $L(H)$. Опять имеем противоречие.

Теорема 3 доказана. Из данной теоремы, леммы 5 и утверждения 2 вновь вытекает справедливость следствия. Это другой способ его доказательства без привлечения теорем 1, 2. Тем не менее, установленная в теоремах 1, 2 связь между свойством бихроматичности и существованием древовидной реализации гиперграфа весьма полезна для приложений теории гиперграфов и практического решения задачи о раскраске гиперграфов.

Проверка достаточного условия бихроматичности и построение древовидной реализации

Убедиться в справедливости условия следствия и построить древовидную реализацию заданного гиперграфа $H = (X, U)$ можно с помощью следующего алгоритма:

- найти двойственный гиперграф $H^* = (X^*, U^*)$. Если $H = (X, U)$ задан матрицей инциденций $A(H)$, то для этого достаточно транспонировать $A(H)$;
- применить к гиперграфу $H^* = (X^*, U^*)$ алгоритм редукции Грэхема. Если данный алгоритм завершается успешно, то H^* – М-ациклический гиперграф и условие следствия выполнено. Это значит, что для исходного гиперграфа H существует реализация деревом и можно перейти к ее построению;
- найти для H^* реберный граф $L(H^*)$. В $L(H^*)$ каждому ребру, соответствующему смежным ребрам u_i^*, $u_j^* \in U^*$ гиперграфа H^*, приписать вес $|f_{ij}| = |X(u_i^*) \cap X(u_j^*)|$;
- построить для $L(H^*)$ остовное дерево наибольшего веса. Поскольку $L(H^*) = L^{(2)}(H)$, то полученное дерево – остовное дерево графа $L^{(2)}(H)$. Кроме того, данное дерево является реализацией $G(H)$ гиперграфа H.

Обоснование данного алгоритма базируется на теореме 2 и теореме эквивалентности Д. Мейера [4].

Алгоритм редукции Грэхема состоит в последовательном применении к гиперграфу операций:

- слабое удаление изолированных и висячих вершин (без удаления ребер, которые им инцидентны);
- слабое удаление кратных, вложенных и пустых ребер (без удаления вершин, которые им инцидентны).

Если в результате получается пустой гиперграф, то это означает успешное завершение редукции. Древовидную реализацию $G(H) = (X, E)$ гиперграфа $H = (X, U)$ можно окрасить двумя цветами так: вначале окрасить произвольную вершину $x \in X$ в черный цвет; затем произвольную вершину $y \in X$, отличную от x, окрасить в черный цвет, если расстояние между вершинами x и y – четное число, и в белый цвет, если это расстояние нечетно. Полученная 2-раскраска графа $G(H)$ будет правильной. В противном случае в $G(H)$ легко обнаруживается цикл, имеющий нечетную длину. При доказательстве теоремы 1 показано, что данная 2-раскраска всегда задает правильную 2-раскраску вершин гиперграфа H.

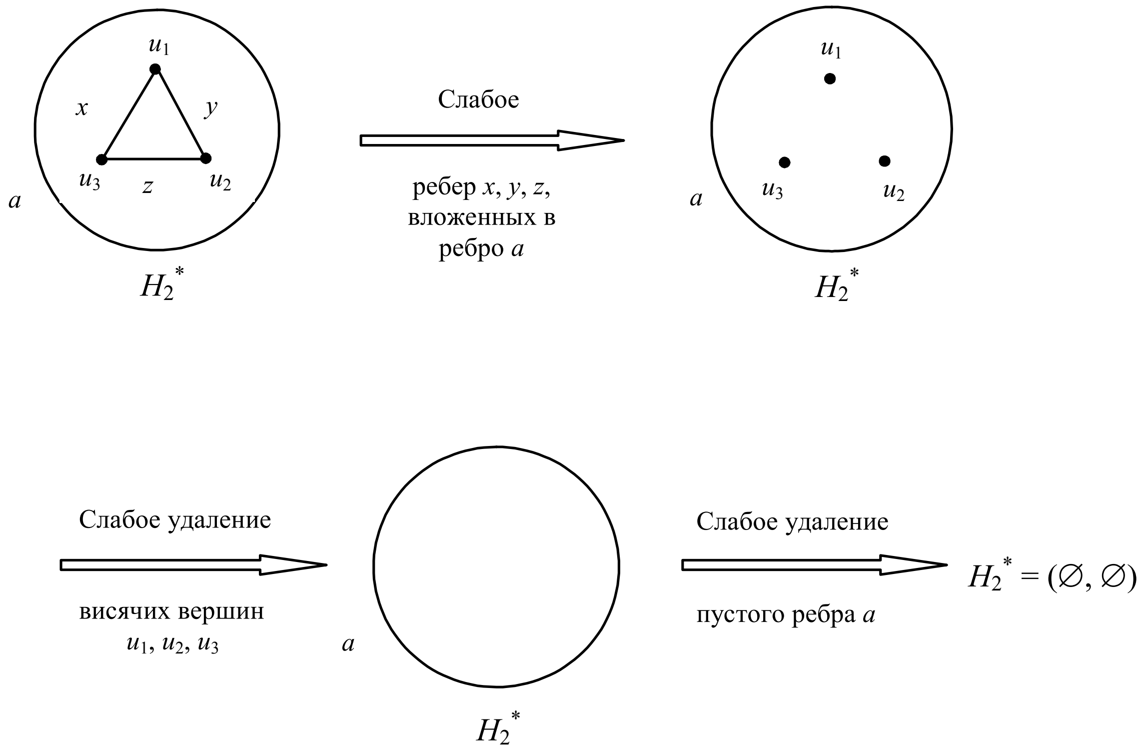


Рис. 11

Применим изложенные алгоритмы к гиперграфу H_2 (рис. 4). Двойственный гиперграф H_2^* и последовательность шагов его редукции представлены на рис. 11. Редукция завершается успешно, что свидетельствует об М-ацикличности гиперграфа H_2^* и бихроматичности гиперграфа H_2. Остовное дерево наибольшего веса для взвешенного реберного $L(H_2^*)$ отмечено на рис. 12 жирными линиям. Оно полностью совпадает с графом $G(H_2)$ (рис. 6) – древовидной реализацией гиперграфа H_2.

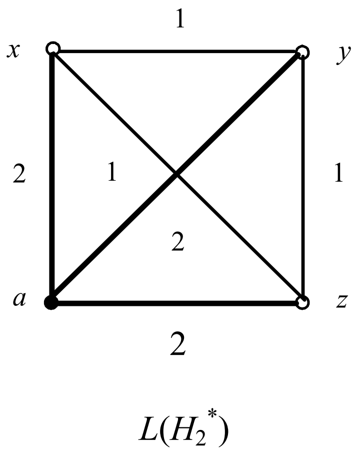


Рис. 12

Все приведенные выше алгоритмы эффективны, что подтверждает полиномиальную сложность предложенного достаточного условия бихроматичности гиперграфа.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Berge C. Graphes et hypergraphes / C. Berge. – Dunod, Paris, 1970.
2. Зыков А.А. Гиперграфы / А.А. Зыков // УМН. Т. 29, вып. 6, 1974.
3. Емеличев В.А. Лекции по теории графов / В.А. Емеличев, О.И. Мельников, В.И. Сарванов, Р.И. Тышкевич. – М.: Наука, 1990.
4. Мейер Д. Теория реляционных баз данных / Д. Мейер. – М.: Мир, 1987.

5. Быкова В.В. Сравнительный анализ М-ациклических и комплектных гиперграфов / В.В.Быкова, Т.В.Куприянова // Проблемы оптимизации и экономические приложения: Тезисы докл. междунар. конф. – Омск: Омск. гос. ун-т, 1997.
6. Быкова В.В. Полиномиальные достаточные условия бихроматичности гиперграфа // IV Всесибирский конгресс женщин-математиков: Материалы конф. – Красноярск: СибГТУ, 2006.
7. Graham M. On the Universal Relation // Computer Systems Research Group Report, Univ. of Toronto, Canada, 1979.

POLINOMIAL SUFFICIENT CONDITIONS OF HYPERGRAPH BICHROMATISM

V.V. Bykova

Bichromatic graphs play an important role in graph theory. They are characterized by the fact that their chromatic number is equal to two. A simple criterion of bichromatism of a graph was given by D. Koenig: there must not be odd cyclic paths in the graph. The absence of such cyclic paths determines an effective (polynomial-time) algorithm of widthway traversal, i.e. the problem of a graph's bichromatism identification is polynomially soluble. A hypergraph is an extended notion of a graph whose edges may be not only two-element vertex set but also any subsets of finite vertex set. The tending to find similar to the Koenig's theorem criterion of bichromatism of a hypergraph is clearly understandable, i.e. the tending to find a not very complex criterion of absence of some special parts in a hypergraph. The problem turned out to be so difficult that no complete solution has been received yet. By now the only sufficient conditions or requirements of bichromatism of a hypergraph have been found and the majority of them is hard algorithmically verifiable. There are proved theorems which a new sufficient condition of bichromatism of a hypergraph follows from. It uses tree-type realizations and has polynomial complexity of verification.