КОМПЛЕКСНЫЙ АНАЛИЗ

УДК 517.55

АНАЛИТИЧЕСКОЕ ПРОДОЛЖЕНИЕ СЕПАРАТНО-АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

С.А.Имомкулов[*]

Пусть $D \subset \mathbf{C}^n$ – область с гладкой границей ∂D, $M \subset \partial D$ – порождающее k – мерное, $n \le k \le 2n-1$, многообразие класса C^1 и $E \subset M$ – множество положительной меры Лебега на M, $m_k(E) > 0$, а $F \subset G$ – неплюриполярный компакт в сильно псевдовыпуклой области $G \subset C^m$. В этой работе доказано, что всякая сепаратно-аналитическая на множестве $X = ((D \bigcup E) \times F) \bigcup (E \times G)$ функция голоморфно продолжается в область

$$\widehat{X} = \{(z,w) \in D \times G : \omega^*_{in}(z,E,D) + \omega^*(w,F,G) < 1\},$$

где ω^* – P - мера, и ω^*_{in} – внутренняя P - мера.

Пусть даны две области $D \subset \mathbf{C}^n$, $G \subset \mathbf{C}^m$ и два множества $E \subset \overline{D}$, $F \subset \overline{G}$. Предположим, что функция $f(z,w)$, первоначально определенная на множестве $E \times F$, обладает свойствами:

а) для любого фиксированного $w^0 \in F$ функция $f(z,w^0)$ голоморфно продолжается в D;

б) для любого фиксированного $z^0 \in E$ функция $f(z^0,w)$ голоморфно продолжается в G.

В таком случае $f(z,w)$ определяет некоторую функцию на множестве $X = \big((D \cup E) \times F\big) \bigcup \big(E \times (G \cup F)\big)$ и она называется *сепаратно-аналитической функцией* на X.

Задача состоит в том, чтобы определить область $\widehat{X}$ ($X \subset \widehat{X} \bigcup \partial \widehat{X}$), куда функция $f(z,w)$ голоморфно продолжается по совокупности переменных.

Впервые эта задача, когда $E \subset D$, $F \subset G$, была поставлена М.Хукухарой [1]. В одномерном случае $n = m = 1$ поставленная задача решена Й.Сичаком [2], а в общем случае – В.П.Захарютой [4]: пусть $D \subset \mathbf{C}^n$ и $G \subset \mathbf{C}^m$ – сильно псевдовыпуклые области, а E и F – замкнутые подмножества, соответственно, в D и G. Если $f(z,w)$ сепаратно-аналитическая функция на множестве

$$X = (D \times F) \bigcup (E \times G),$$

то она голоморфно продолжается в область

$$\widehat{X} = \left\{ (z,w) \in D \times G : \omega^*(z,E,D) + \omega^*(w,F,G) < 1 \right\}.$$

Здесь ω^* обозначает основную величину комплексной теории потенциала, так называемую P-меру множества $E \subset D \subset \mathbf{C}^n$ относительно области D (см.[5], [6]).

А. А. Гончаром [7] доказана следующая теорема, которая является граничным вариантом теоремы о сепаратно-аналитических функциях: пусть D и G – плоские жордановы области с гладкими границами и $E \subset \partial D$, $F \subset \partial G$ – граничные дуги. Если $f(z,w)$ непрерывная и сепаратно-аналитическая на множестве $X = \big((D \bigcup E) \times F\big) \bigcup \big(E \times (G \bigcup F)\big)$ функция, то $f(z,w)$ голоморфно продолжается в область

$$\widehat{X} = \left\{ (z,w) \in D \times G : \omega(z,E,D) + \omega(w,E,G) < 1 \right\},$$

где ω - гармоническая мера.

Доказательство этой теоремы опирается на интегральную формулу Карлемана [8] о восстановлении голоморфной функции по её значениям, заданным на части границы $E \subset \partial D$, и поэтому здесь существенно, чтобы области D и G были плоскими.

В 2002 году А.С. Садуллаев и С.А. Имомкулов совместно доказали следующий граничный вариант теоремы о сепаратно-аналитических функциях: пусть $D \subset C^n$ – область с гладкой границей $E \subset \partial D, F \subset \partial G$ – граничное подмножество положительной меры Лебега, $mes(E) > 0$, а $F \subset G$ – неплюриполярный компакт в сильно псевдовыпуклой области $G \subset C^m$. Предположим, что функция $f(z,w)$, заданная на множестве $E \times F$, обладает следующими условиями сепаратной аналитичности (на $X = (D \times F) \bigcup (E \times G)$):

а) для любого фиксированного $w^0 \in F$ функция $f\left(z, w^0\right)$ является сужением некоторой ограниченной голоморфной функции $\psi_{w^0}(z) \in O(D) \cap L^\infty\left(\overline{D}\right)$, причем в каждой точке $\xi \in E$ угловой предел $\psi^*_{w^0}(\xi)$ существует и равен $f\left(\xi, w^0\right)$,

б) для любого фиксированного $z^0 \in E$ функция $f\left(z^0, w\right)$, определенная на F является сужением некоторой голоморфной функции $\Phi_{z^0}(w) \in O(G)$: $\Phi_{z^0}(w) = f\left(z^0, w\right)$ для всех $w \in F$.

Тогда $f(z,w)$ определяет некоторую сепаратно-аналитическую функцию на множестве X и голоморфно продолжается в область

$$\widehat{X} = \left\{(z,w) \in D \times G : \omega^*_{in}(z,E,D) + \omega^*(w,F,G) < 1\right\}.$$

Этот и другие результаты находятся в печати в Мичиганском математическом журнале. Частные случаи указанного результата опубликованы также в Узбекском математическом журнале [14].

В работе [9] П. Пфлуг и В. Нгуен, используя теорему А.А. Гончара, т.е. методом продолжений по двумерным сечениям, доказали следующий многомерный аналог самой теоремы А.А. Гончара: пусть $D \subset \mathbf{C}^n$, $G \subset \mathbf{C}^m$ – псевдовыпуклые области с C^2 - гладкими границами, E и F – открытие подмножества границы ∂D и ∂G соответственно и $f(z,w)$ – непрерывная сепаратно-аналитическая на множестве $X = ((D \bigcup E) \times F) \bigcup (E \times (G \bigcup F))$ функция. Тогда $f(z,w)$ голоморфно продолжается в область

$$\widehat{X} = \left\{ \ (z,w) \in D \times G : \omega^*(z,E,D) + \omega^*(w,F,G) < 1 \ \right\}$$

и является непрерывной функцией на множестве $\widehat{X} \bigcup X$.

В этой работе мы докажем следующую теорему.

Теорема. *Пусть* $D \subset \mathbf{C}^n$ *– область с гладкой границей* ∂D, $M \subset \partial D$ *– порождающее* k *– мерное,* $n \le k \le 2n-1$, *многообразие класса* C^1 *и* $E \subset M$ *– множество положительной меры Лебега на* M, $m_k(E) > 0$, *а* $F \subset G$ *– неплюриполярный компакт в сильно псевдовыпуклой области* $G \subset C^m$. *Предположим, что функция* $f(z,w)$, *заданная на множестве* $E \times F$, *обладает следующими условиями сепаратно - аналитичной (на* $X = ((D \bigcup E) \times F) \bigcup (E \times G)$*):*

а) для любого фиксированного $w^0 \in F$ *функция* $f(z,w^0)$ *является сужением некоторой ограниченной голоморфной функции* $\psi_{w^0}(z) \in O(D) \bigcap L_\infty\left(\overline{D}\right)$*: в каждой точке* $\xi \in E$ *угловой предел* $\psi^*_{w^0}(\xi)$ *существует и равен* $f(\xi, w^0)$,

б) для любого фиксированного $z^0 \in E$ *функция* $f(z^0, w)$, *определенная на* F, *является сужением некоторой голоморфной функции* $\Phi_{z^0}(w) \in O(G)$*:* $\Phi_{z^0}(w) = f(z^0, w)$ *для всех* $w \in F$.

Тогда $f(z,w)$ *определяет некоторую сепаратно-аналитическую функцию на множестве* X *и голоморфно продолжается в область*

$$\widehat{X} = \left\{(z,w) \in D \times G : \omega^*_{in}(z,E,D) + \omega^*(w,F,G) < 1\right\}.$$

Здесь O обозначает алгебру голоморфных функций и $\omega^*_{in}(z,E,D)$ – так называемая внутренняя P-мера граничного множества $E \subset \partial D$ (см. ниже §2).

Доказательство теоремы опирается на методы комплексной теории потенциала и подклеивание аналитических дисков к порождающему многообразию (см. [5], [6], [11], [12]). В следующих двух параграфах мы изложим вкратце суть этих методов.

§ 1. Порождающие многообразия и подклеивание аналитических дисков

Гладкое (класса C^1) многообразие $M \subset \mathbf{C}^n$ называется порождающим, если в каждой точке $z \in M$ комплексная линейная оболочка векторов касательного пространства $T_z(M)$ (к M в точке z) совпадает со всем пространством $\mathbf{C}^n$.

Следующая лемма позволяет нам рассматривать только порождающие многообразия размерности n.

Лемма 1 (см. [5]). *Пусть M – порождающее k-мерное многообразие в $\mathbf{C}^n$, $E \subset M$ – подмножество положительной меры. Тогда существует n-мерное порождающее подмногообразие $M' \subset M$ такое, что $M' \cap E$ имеет положительную меру на M'.*

Итак, можно считать, что $\dim_R M = n$ и, заменяя систему координат, мы можем в окрестности $0 \in M$ задать его в виде

$$M = \{z = x + iy : y = h(x)\},$$

где $(x, y) \in \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n \approx \mathbf{C}^n$ меняется в окрестности

$$\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2 = \{x : |x| < \delta\} \times \{y : |y| < \delta\},$$

а $h = (h_1, h_2, ..., h_n)$ – вектор-функция, равная нулю при $x = 0$ вместе со своими первыми частными производными.

Изложим коротко метод подклеивания аналитических дисков.

Обозначим через Tu гармоническую сопряженную функцию к непрерывной функции u, заданной на границе ∂U единичного круга $U \subset \mathbf{C}$, причем для однозначности полагаем

$$\int_0^{2\pi} Tu(\zeta) d\zeta = 0 \ .$$

Рассмотрим на ∂U систему нелинейных сингулярных уравнений

$$\vartheta(\zeta) = c - T(h \circ \vartheta)(\zeta) - tTu(\zeta), \tag{1}$$

где $u = (u_1, u_2, ..., u_n)$ – бесконечно гладкая вектор-функция, а $c, t \in \mathbf{R}^n$ – параметры. Если $\vartheta(c,t,\zeta)$ – решение уравнения (1), то функция $\vartheta(c,t,\zeta) + i((h \circ \vartheta)(c,t,\zeta) + tu(\zeta))$ является граничным значением голоморфной в U вектор-функции $\Phi(c,t,\zeta),\ \zeta \in U$, т.е. $\Phi(c,t,\zeta) \in O(U)$ и $\Phi(c,t,\zeta) = \vartheta(c,t,\zeta) + i((h \circ \vartheta)(c,t,\zeta) + tu(\zeta))$ при $\zeta \in \partial U$. Если $u \equiv 0$ на дуге $\partial U^+ = \{\zeta \in \partial U : \operatorname{Im} \zeta \geq 0\}$, то образ сужения функции $\Phi(c,t,\zeta)|_{\partial U^+}$ принадлежит M, т.е. $\Phi(c,t,\zeta)$ “подклеивает” диск $\Delta_{c,t} = \{\Phi(c,t,\zeta) : \zeta \in U\}$ к M по дуге ∂U^+.

В работе [11] Ю.В.Хурумовым доказано существование достаточно «плотного» семейства дисков, подклеенных к M. Результаты о подклеивании аналитических дисков более подробно изложены в работе [12].

Лемма 2 ([11], [12]). *Пусть $D \subset \mathbf{C}^n$ – область с кусочно-гладкой границей, $M \subset \partial D -$ порождающее n-мерное многообразие класса C^1, заданное в виде*

$$M = \{z = x + iy \in \Omega = \Omega_1 \times \Omega_2 :\ y = h(x)\},$$

где $\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2 = \{x : |x| < \delta\} \times \{y : |y| < \delta\}$ и $h = (h_1, h_2, ..., h_n)$ – вектор-функция, равная нулю при $x = 0$ вместе со своими первыми частными производными. Пусть $E \subset M$ – множество положительной меры Лебега на M, $m_n(E) > 0$, и $z = 0$ – точка плотности множества E. Тогда:

1) *существует достаточно малое число $\theta > 0$ такое, что*

$$\Phi \in C^1(\Pi_\theta \times U) \ \text{и}\ \Phi \in \mathrm{W}_p^1(\Pi_\theta \times \partial U),\ p \geq 1,$$

где W_p^1 - класс Соболева, $\Pi_\theta = \{(c,t) \in \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n : |c| < \theta, |t| < \theta\}$;

2) существуют компакт $E_1 \subset E$, семейство дисков

$$\Delta_{c,t} = \{\Phi(c,t,\zeta), \zeta \in U\}, \ (c,t) \in \Pi_\theta,$$

и множество $Q \subset \Pi_\theta$ положительной меры Лебега в $\mathbf{R}^{2n}$ такие, что

$$m_1(\Phi^{-1}(\partial\Delta_{c,t} \cap E_1)) > 0$$

для любого $(c,t) \in Q$;

3) для любого $(c,t) \in Q$ существует область $W_{c,t} \subset U$ со спрямляемой границей такая, что

$$\Phi(c,t,W_{c,t}) = \mathbf{A}_{c,t} \subset \Omega_E \subset D,$$

где Ω_E – клин с острием E и

$$m_1(\Phi^{-1}(\partial\mathbf{A}_{c,t} \cap E_1)) > 0;$$

4) $\Phi(c,t,\cdot) \in O(U) \bigcap \mathrm{W}^1_p(\partial U) \subset O(W_{c,t}) \bigcap C(\overline{W}_{c,t}),\ p > 1,$ для всех $(c,t) \in Q$;

5) множество $Z = \bigcup\limits_{(c,t)\in Q} \mathbf{A}_{c,t}$ имеет положительную меру в $\mathbf{C}^n \approx \mathbf{R}^{2n}$.

Из этой леммы легко следует, что множество $E \subset M$, положительной мерой Лебега на M, является множеством единственности в классе $O(D)$.

§ 2. *P-мера граничных множеств*

Пусть D – область с гладкой границей и $u(z)$ – (плюри)субгармоническая в D функция. Доопределим функцию $u(z)$ до границы области следующим образом:

$$\tilde{u}(\xi) = \sup_{\alpha>1} \overline{\lim_{\substack{z\to\xi \\ z\in A_\alpha(\xi)}}} u(z), \qquad \xi \in \partial D,$$

где $A_\alpha(\xi)$ представляет собой пересечение области D и конуса с вершиной в точке ξ:

$$A_\alpha(\xi) = \{z \in D : |z-\xi| < \alpha\rho(z,T_\xi)\}.$$

Здесь $\xi \in \partial D,\ \alpha > 1,\ \rho(z,T_\xi)$ – расстояние от точки z до касательной плоскости T_ξ к ∂D в точке ξ. Далее всюду в качестве граничного значения (плюри)субгармонической в D функции $u(z)$ мы будем брать, не оговаривая это каждый раз, значение $\tilde{u}(\xi),\ \xi \in \partial D.$

P-мерой граничного множества $E \subset \partial D$ относительно области D называется плюрисубгармоническая в области D функция

$$\omega^*(z,E,D) = \overline{\lim_{\zeta\to z}}\, \omega(\zeta,E,D), \qquad z \in D,$$

где

$$\omega(z,E,D) = \sup\{u \in \mathrm{psh}(D) : u|_D \le 1,\ \tilde{u}|_E \le 0\}.$$

Как и в случае $E \subset D$ (см.[6]), для граничных подмножеств $E \subset \partial D$ функция $\omega(z,E,D)$ либо тождественно равна 1, либо нигде в D не равна 1. В первом случае существует ограниченная сверху плюрисубгармоническая в D функция $u(z) \not\equiv -\infty$ такая, что $\tilde{u}|_E = -\infty$, и поэтому такое множество E естественно назвать плюриполярным граничным множеством.

Заметим, что в одномерном случае $(n=1)$ множества $E \subset \partial D$ положительной меры и только они неполярны, т.е. $\omega^*(z,E,D) \not\equiv 1, z \in D$, причем для них почти во всех точках $\xi \in E$ $\tilde{\omega}^*(\xi,E,D) = 0$.

В многомерном случае множества $E \subset \partial D$ с положительной мерой Лебега на ∂D также обладают этими свойствами: $\omega^*(z,E,D) < 1$ в D и почти все точки E являются плюрирегулярными. Однако далеко не все подмножества $E \subset \partial D$ меры нуль плюриполярны. Тем не менее, в силу леммы 2, имеет место следующее

Предложение 1. *Всякое множество* $E \subset M \subset \partial D$ ($\partial D \in C^1, M \in C^1$) *положительной меры Лебега на* M, $m_k(E) > 0$, $n \le k \le 2n-1$, *неплюриполярно.*

Положим

$$\omega_{in}(z, E, D) = \sup\{\lim_{j\to\infty} \omega^*(z, E_j, D)\},$$

где супремум берется по всем последовательностям $\{E_j\}$: $E_j \subset E_{j+1} \subset E$, $E = \bigcup_{j=1}^{\infty} E_j$. Тогда регуляризация $\omega_{in}^*(z, E, D)$ является плюрисубгармонической и называется внутренней P-мерой множества E. Ясно, что $\omega^*(z, E, D) \le \omega_{in}^*(z, E, D)$.

Используя топологическую лемму Шоке [13] и лемму 2, легко можно доказать следующие предложения.

Предложение 2. *Для всякого множество* $E \subset M \subset \partial D$ *с положительной мерой Лебега на* M, $m_k(E) > 0$, $n \le k \le 2n-1$, *внутренняя* $P-$*мера* $\omega_{in}^*(z, E, D) < 1$, $\forall z \in D$.

§ 3. Доказательство теоремы

Доказательство проведем в несколько этапов.

1. Введем обозначение

$$F_N = \left\{ w \in F : \sup_{z\in D} \left| f(z, w) \right| \le N \right\}, \qquad N = 1,2,\ldots\ .$$

Тогда $F = \bigcup_{N=1}^{\infty} F_N$ и начиная с некоторого N_0 все F_N, $N \ge N_0$ будут неплюриполярными. Покажем, что $F_N \subset G$ – компакт и функция $f(z, w)$ непрерывна на множестве $D \times F_N$. Фиксируем предельную для F_N точку $w^0 \in F$ и положим $\varphi_w(z) = f(z, w) - f(z, w^0)$, $w \in F_N$. Тогда семейство $\{\varphi_w(z)\}_{w\in F_N}$ равномерно ограничено и, следовательно, равностепенно непрерывно в D. Граничные значения $\varphi_w^*(\xi)$, $\xi \in E$, существуют, и $\lim_{w\to w_0} \varphi_w^*(\xi) = 0$, ибо при любом фиксированном $\xi \in E$, по условию теоремы, функция $f(\xi, w) \in O(G)$. Фиксируем ε, $0 < \varepsilon < 1$, и положим

$$E_k = \left\{ \xi \in E : \left|\varphi_w^*(\xi)\right| < \varepsilon,\ w \in F_N,\ \left|w - w^0\right| < \frac{1}{k} \right\},$$

$k = 1,2,\ldots$. Тогда $E_k \subset E_{k+1}$ и $\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k = E$. Начиная с некоторого k_0 множества E_k, $k \ge k_0$, имеют положительную меру на M, т.е.

$$\omega^*(z, E_k, D) < 1,\ z \in D.$$

По теореме о двух константах имеем

$$\left|\varphi_w(z)\right| \le \mathrm{const}\cdot \varepsilon^{1-\omega^*(z, E_k, D)}, \tag{2}$$

$$k \ge k_0,\ z \in D, w \in F_N,\ \left|w - w_0\right| < \frac{1}{k}.$$

При фиксированном $z^0 \in D$ существует $k \ge k_0$ такой, что

$$\varepsilon^{1-\omega^*(z^0, E_k, D)} \le 2\cdot \varepsilon^{1-\omega_{in}^*(z^0, E, D)}.$$

Поэтому для такого k из (2) получим

$$\left|\varphi_w(z^0)\right| \le 2const\cdot \varepsilon^{1-\omega_{in}^*(z^0, E, D)},\ w \in F_N,\ \left|w - w^0\right| < \frac{1}{k}.$$

Следовательно, для любого $\varepsilon,\ 0<\varepsilon<1,$ существует $\delta>0$ такое, что при $\left|w-w^0\right|<\delta$, $w\in F_N$ имеет место неравенство

$$\left|f(z^0,w)-f(z^0,w^0)\right|<\varepsilon .$$

Отсюда, во-первых, вытекает, что $\left|f(z^0,w^0)\right|\le N$, значит, так как $z^0\in D$ произвольное, то $w^0\in F_N$. И, во-вторых, вместе с равностепенной непрерывностью $f(z,w)$ по z мы получим непрерывность $f(z,w)$ в $D\times F_N$, ибо для любой фиксированной точки $(z^0,w^0)\in D\times F_N$ и для достаточно близких к (z^0,w^0) точек $(z,w)\in D\times F_N$ имеем

$$\left|f(z,w)-f(z^0,w^0)\right|\le\left|f(z,w)-f(z^0,w)\right|+\left|f(z^0,w)-f(z^0,w^0)\right|\le 2\varepsilon,$$

$\forall\varepsilon>0$.

2. Пусть G' – строго псевдовыпуклая область такая, что $F\subset G'\subset\subset G$. Рассматриваем следующие гильбертовы пространства $H_0=W_2^l(C^m)\bigcap O(G')$, $l>m$, (W_2^l-пространство Соболева) и H_1 как замыкание пространства $O(G')$ относительно нормы

$$\|\varphi\|_{H_1}=\left(\int\limits_{F_N}|\varphi(w)|^2\,d\sigma\right)^{\frac{1}{2}},$$

где $d\sigma=\left(dd^c\omega^*\left(w,F_N,G'\right)\right)^m$ – мера, сосредоточенная на F. Ясно, что H_0 плотно и вполне непрерывно вложено в H_1. Поэтому существует общий ортогональный базис $\{h_k(w)\}_{k=1}^{\infty}$ в пространствах H_0,H_1 такой, что

$$\|h_k\|_{H_0}=\mu_k,\ \|h_k\|_{H_1}=1,\ \ k=1,2,\dots,$$

$\frac{1}{L}k^{\frac{1}{m}}\le\ln\mu_k\le Lk^{\frac{1}{m}}$, L – константа, $k=1,2,\dots$.(см.[3], [10]) .

Любой элемент $\varphi\in H_0$ разлагается в ряд

$$\varphi=\sum_{k=1}^{\infty}a_kh_k\ ,$$

где $a_k=\left(\varphi,h_k\right)_{H_0}\cdot\mu_k^{-2}=\left(\varphi,h_k\right)_{H_1}$. Приведем некоторые оценки для h_k, которые мы применяем ниже. Из непрерывного вложения

$$H_0=W_2^l(\mathbf{C}^m)\bigcap O(G')\subset O(G')\bigcap C(\overline{G'}),\ l>m,$$

вытекает, что

$$\|h_k\|_{\overline{G'}}\le C\cdot\|h_k\|_{H_0}=C\mu_k\,, \tag{3}$$

где $\|\cdot\|_{\overline{G'}}$ – равномерная норма, а C – константа, не зависящая от k.

Теперь рассмотрим множества $A_k=\left\{z\in F_N:\left|h_k(w)\right|>k\right\}$. Согласно неравенству Чебышева

$$\sigma\left(A_k\right)\le\frac{1}{k^2}\int\limits_{F_N}\left|h_k(w)\right|^2d\sigma=\frac{1}{k^2}\|h_k\|_{H_1}^2=\frac{1}{k^2},\ k=1,2,\dots .$$

Следовательно, $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\sigma\left(A_k\right)<\infty$ и

$$\lim_{s\to\infty}\sigma\left(\bigcup_{k=s}^{\infty}A_k\right)=0.$$

Положим $F_{N,s}=F_N\setminus\bigcup_{k=s}^{\infty}A_k$, $F_{N,0}=\bigcup_{s=1}^{\infty}F_{N,s}$. Тогда $\sigma(F_N\setminus F_{N,0})=0$. Отсюда нетрудно показать, что

$$\omega^*(w,F_{N,s},G')\downarrow\omega^*(w,F_N,G'),$$

при $s\to\infty$. При фиксированном s по построению $|h_k(w)|<k$ для всех $w\in F_{N,s}$ и $k\geq s$. Из этого и оценки (3), применяя теорему о двух константах, мы получим

$$|h_k(w)|\leq k^{1-\omega^*(w,F_{N,s},G')}(C\mu_k)^{\omega^*(w,F_{N,s},G')},\ k\geq s.$$

Значит, для всех $w\in G'$ имеет место оценка

$$|h_k(w)|\leq C(s)k\cdot\mu_k^{\omega^*(w,F_{N,s},G')},\ k=1,2,..., \tag{4}$$

где $C(s)$ - константа, не зависящая от k.

Сопоставим функции $f(z,w)$ формальный ряд Фурье – Хартогса

$$f\sim\sum_{k=1}^{\infty}a_k(z)h_k(w)\ , \tag{5}$$

где $z\in D,\ w\in F_N$ и коэффициенты $a_k(z)$ определяются обычными формулами пространства H_1:

$$a_k(z)=\int_{F_N}f(z,w)\,\overline{h_k}(w)\,d\sigma,\qquad k=1,2,....$$

Покажем, что ряд (6) равномерно сходится внутри области

$$\widehat{X}_N=\left\{(z,w)\in D\times G':\ \omega_{in}^*(z,E,D)+\omega^*(w,F_N,G')<1\right\}.$$

Ясно, что $a_k(z)\in O(D)$ и

$$|a_k(z)|\leq N\int_{F_N}\left|\overline{h_k}(w)\right|d\sigma\leq N\sigma(F),\quad z\in D, \tag{6}$$

кроме того, для любого фиксированного $\xi\in E$ угловой предел $\lim\limits_{\substack{z\to\xi\\ z\in A_\alpha(\xi)}}f(z,w)=f(\xi,w)$ существует, для всех $w\in F_N$ и функция $f(z,w)$ ограниченна на множестве $(A_\alpha(\xi))\times F_N,\ \alpha>1$. Поэтому для любого $\xi\in E$ угловые пределы $a_k^*(\xi)$ существуют и

$$a_k^*(\xi)=\int_{F_N}f(\xi,w)\overline{h_k}(w)d\sigma,\qquad k=1,2...,$$

причем неравенство (6) сохраняется и для $a_k^*(\xi)$, $\xi\in E$.

Для более точной оценки $a_k(z)$ мы воспользуемся голоморфностью $f(\xi,w),\ \xi\in E$, в области $G\supset\supset G'$. Так как для любого фиксированного $\xi\in E$ функция $f(\xi,w)\in H_0$, то $a_k^*(\xi)=(f,h_k)_{H_1}=\mu_k^{-2}(f,h_k)_{H_0}$. Следовательно,

$$\left|a_k^*(\xi)\right|\leq\frac{1}{\mu_k^2}\|f\|_{H_0}\cdot\|h_k\|_{H_0}\leq\frac{\|f\|_{H_0}}{\mu_k},\quad \xi\in E. \tag{7}$$

Обозначим через $E_j=\{\xi\in E:\|f\|_{H_0}\leq j\}$. Тогда $E_j\subset E_{j+1}$, $\bigcup_{j=1}^{\infty}E_j=E$. Начиная с некоторого j_0 все $E_j,\ j\geq j_0$, имеют положительную меру на M. Используя (6), (7) и теорему о двух константах, имеем

$$|a_k(z)| \le \left(N\sigma(F_N)\right)^{\omega^*(z,E_j,D)} \cdot \left(\frac{j}{\mu_k}\right)^{1-\omega^*(z,E_j,D)} . \qquad (8)$$

Теперь используем оценку (4) базиса $h_k(w)$. Построим последовательность $F_{N,s} \subset F_N$ такую, что $\omega^*(w,F_{N,s},G') \downarrow \omega^*(w,F_N,G')$, при $s \to \infty$ и для каждого $k \ge s$ имеет место оценка

$$|h_k(w)| \le C(s)k\,\mu_k^{\omega^*(w,F_{N,s},G')}, \quad w \in G',$$

где $C(s)$ – константа, не зависящая от k. Объединяя это с (8), получим

$$|a_k(z)h_k(w)| \le C(N,j,s)\,k\,\mu_k^{\omega^*(w,F_{N,s},G')}\ \mu_k^{\omega^*(z,E_j,D)-1} \le C(N,j,s)\,k\,e^{\mathrm{L}\sqrt[m]{k}\,(\omega^*(w,F_{N,s},G')+\omega^*(z,E_j,D)-1)}, \qquad (9)$$

$N \ge N_0$, $j \ge j_0$, $k \ge s$. Отсюда вытекает, что ряд (5) сходится равномерно внутри открытого множества

$$\hat{X}_{N,j,s} = \left\{(z,w) \in D \times G':\ \omega^*(z,E_j,D) + \omega^*(w,F_{N,s},G') < 1\right\}.$$

Устремив $s \to \infty$, мы получим, что ряд равномерно сходится внутри области

$$\hat{X}_{N,j} = \left\{(z,w) \in D \times G':\ \omega^*(z,E_j,D) + \omega^*(w,F_N,G') < 1\right\}.$$

Кроме того, при $j \to \infty$ мы получим, что ряд (6) равномерно сходится в области

$$\hat{X}_N = \left\{(z,w) \in D \times G':\ \omega^*_{in}(z,E,D) + \omega^*(w,F_N,G') < 1\right\}$$

и её сумма $S(z,w)$ голоморфна в $\hat{X}_N$.

3. Докажем, что $S(z,w)$ является голоморфным продолжением функции $f(z,w)$. Для этого воспользуемся оценкой (9) и леммой 2. Не нарушая общности, мы будем считать, что $\dim M = n$. Обозначим через F'_N совокупности плюрирегулярных точек множество F_N, $N \ge N_0$, и через $E'_{j,c,t}$ следующее множество

$$E'_{j,c,t} = \left\{\xi = \Phi(c,t,\zeta) \in E_j \cap \partial\mathbf{A}_{c,t} : \tilde{\omega}^*_{c,t}(\zeta, \Phi^{-1}(E_j \cap \partial\mathbf{A}_{c,t}), W_{c,t}) = 0\right\},$$
$$(c,t) \in Q,\ j \ge j_0,\ (j_0 = j_0(c,t)),$$

где

$$\omega^*_{c,t}(\lambda, \Phi^{-1}(E_j \cap \partial\mathbf{A}_{c,t}), W_{c,t}) = \omega^*(\Phi(c,t,\lambda), E_j, D),\ \lambda \in W_{c,t}.$$

Тогда $E'_{j,c,t} \subset E'_{j+1,c,t}$, $m_1(E'_{j,c,t}) = m_1(E_{j,c,t})$ для всех $(c,t) \in Q$, и если мы положим $E'_{c,t} = \bigcup_{j \ge j_0} E'_{j,c,t}$, то $m_1(E_{c,t} \setminus E'_{c,t}) = 0$, где $E_{c,t} = E \cap \partial\mathbf{A}_{c,t}$.

Покажем, что $S(z,w) \equiv f(z,w)$ на $D \times F'_N$ и на $\Phi^{-1}(E'_{c,t}) \times G$ почти для всех $(c,t) \in Q$ в смысле угловых пределов функции $S_{c,t}(\lambda,w) = S(\Phi(c,t,\lambda),w)$: $S^*_{c,t}(\zeta,w) \equiv f(\Phi(c,t,\zeta),w)$, $\Phi(c,t,\zeta) \in E'_{c,t}$. (Отметим, что $\Phi(c,t,\cdot) \in C(\overline{W}_{c,t})$ для всех $(c,t) \in Q$ и $\mathbf{A}_{c,t} \subset \Omega_E \subset D$, т.е. аналитические множества $\mathbf{A}_{c,t}$ подклеиваются к ∂D некасательным путем (см. лемма 2)). Действительно, фиксируем $\xi = \Phi(c,t,\zeta) \in E'_{c,t}$ и $w^0 \in G'$. Тогда $\xi \in E'_{j,c,t}$ для некоторого $j \ge j_0$, а $\omega^*(w^0, F_{N,s}, G') = \theta < 1$ для некоторого s. Для любого фиксированного угла (конуса) $A_\alpha(\zeta) \subset W_{c,t}$, и для некоторого $\delta > 0$, P – мера

$$\omega^*(z,E_j,D) < \frac{1-\theta}{2}$$

при всех $z \in \Phi(c,t,A_\alpha(\zeta)) \cap \{z : |z-\xi| < \delta\}$, и, значит,

$$\left(\Phi(c,t,A_\alpha(\zeta)) \cap \{z : |z-\xi| < \delta\}\right) \times \{w^0\} \subset \hat{X}_{N,j,s}.$$

Рассмотрим на этом множестве оценку

$$\left|S(z,w^0)-f(\xi,w^0)\right|=\left|\sum_{k=1}^{\infty}a_k(z)h_k(w^0)-\sum_{k=1}^{\infty}a_k^*(\xi)h_k(w^0)\right|\le\sum_{k=1}^{\ell}\left|a_k(z)-a_k^*(\xi)\right|\left|h_k(w^0)\right|+$$

$$+\sum_{k=\ell+1}^{\infty}\left|a_k(z)h_k(w^0)\right|+\sum_{k=\ell+1}^{\infty}\left|a_k^*(\xi)h_k(w^0)\right|=I+II+III.$$

Фиксируем произвольное число $\varepsilon>0$ и оценим каждую сумму отдельно. Для $z\in\Phi(c,t,A_\alpha(\zeta))\bigcap\left\{z:|z-\xi|<\delta\right\}$ согласно (9)

$$\left|a_k(z)h_k(w^0)\right|\le C(N,j,s)\,k\,e^{L\sqrt[m]{k}\,(\omega^*(z,E_j,D)+\omega^*(w^0,F_{N,s},G')-1)},\ k\ge s,$$

где

$$\omega^*(z,E_j,D)+\omega^*(w^0,F_{N,s},G')-1<\frac{1-\theta}{2}+\theta-1<0.$$

Следовательно, существует натуральное число ℓ такое, что

$$II=\sum_{k=\ell+1}^{\infty}\left|a_k(z)h_k(w^0)\right|<\varepsilon$$

равномерно по z. Сумма III также будет не больше чем ε, если мы выбираем ℓ достаточно большим, ибо числовой ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty}a_k^*(\xi)h_k(w^0)$$

является абсолютно сходящимся. Теперь для фиксированного ℓ

$$I=\sum_{k=1}^{\ell}\left|a_k(z)-a_k^*(\xi)\right|\left|h_k(w^0)\right|\to 0$$

при $z\to\xi$, из-за непрерывности $a_k(z)$ на множестве

$$\Phi(c,t,A_\alpha(\zeta))\bigcap\left\{\xi=\Phi(c,t,\zeta)\right\}.$$

Таким образом, в силу произвольности ε, мы получим, что

$$\lim_{\substack{\lambda\to\zeta\\ \lambda\in A_\alpha(\zeta)}} S_{c,t}(\lambda,w^0)=f(\Phi(c,t,\zeta),w^0)$$

и $S_{c,t}^*(\zeta,w^0)=f(\Phi(c,t,\zeta),w^0)$ на $\Phi^{-1}(E'_{c,t})\times G'$.

Для доказательства тождества $S\equiv f$ на $D\times F'_N$ заметим, что $D\times F'_N\subset\hat{X}_{N,j,s}$ и поэтому для фиксированного $w^0\in F'_N$, функция $S(z,w^0)\in O(D)$ и угловые пределы $S_{c,t}^*(\zeta,w^0)=f(\Phi(c,t,\zeta),w^0)$ на множестве $\Phi^{-1}(E'_{c,t})$, $m_1(\Phi^{-1}(E'_{c,t}))>0$ почти для всех $(c,t)\in Q$.

Остаётся воспользоваться известной теоремой Привалова о том, что если $D\subset\mathbf{C}$ – плоская область со спрямляемой границей ∂D и $f(z)$ – голоморфная (не обязательно ограниченная!) в D функция, для которой угловые пределы $f^*(\xi)$ равны нулю на некотором множестве $E\subset\partial D$ положительной длины, то $f(z)$ в D. В силу леммы 2 множество $Z=\bigcup\limits_{(c,t)\in Q}\mathbf{A}_{c,t}$ имеет положительную меру в $\mathbf{C}^n\approx\mathbf{R}^{2n}$**.** Мы убедимся, что голоморфная в D функция

$$S(\Phi(c,t,\zeta),w^0)-f(\Phi(c,t,\zeta),w^0)=0,\ \zeta\in W_{c,t},$$

т.е. $S(z,w^0)-f(z,w^0)=0,\ z\in Z\subset D,\ m_{2n}(Z)>0$. Это означает, что $S\equiv f$ на $D\times F'_N$. Отсюда вытекает, что построенный для $F_N\subset G'$ ряд (6) определяет голоморфную в $\hat{X}_N$ функцию $S(z,w)$, которая является голоморфным продолжением сепаратно-аналитической функции $f(z,w)$. Так как функция $S(z,w)$ не зависит от N и G', область $G-$ сильно псевдовыпуклая, то, устремив $N \to \infty$ и $G' \to G$, мы получим голоморфную в области

$$\widehat{X} = \{(z,w) \in D \times G: \ \omega_{in}^{*}(z,E,D) + \omega^{*}(w,F,G) < 1\}$$

функцию $S(z,w)$, которая тождественно равна $f(z,w)$ на множестве $D \times F'$, где $F' = \bigcup_{N=1}^{\infty} F'_N$, и в смысле «углового значения» на $E'_{c,t} \times G$ для всех $(c,t) \in Q$. Теорема доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Hukuhara M. L`extensions du theoreme d` Osgood et de Hartogs/ M. Hukuhara --Kansuhoteisik ogobi Oyo-Kaiseki, 1930.
2. Siciak J. Separately analytic functions and envelopes of holomorphy of some lower dimensional subsets of C^n / J.Siciak// Ann. Pol. Math. -1966. – T. 22. -№1. – P. 145-171.
3. Захарюта В.П. Экстремальные плюрисубгармонические функции, гильбертовы шкалы и изоморфизмы пространств аналитических функций многих переменных, I,II.// Теория функций, функциональный анализ и их приложения. – Харьков. -1974. - №19. - С.133-157; 1974. -№21. -С. 65-83.
4. Захарюта В.П. Сепаратно-аналитические функции, обобщенные теоремы Хартогса и оболочки голоморфности/ В.П. Захарюта// Мат. Сб. -1976. -101. -№1. -С.57-76.
5. Садуллаев А.С Граничная теорема единственности в C^n / А.С. Садуллаев// Мат. Сб. -1976. -101 (143). -№4. - С. 568-583.
6. Садуллаев А.С. Плюрисубгармонические меры и емкости на комплексных многообразиях/ А.С. Садуллаев // Успехи Мат. Наук. - 1981. - Т. 36. – Вып.4. - С.53-105.
7. Gonchar A.A. On Bogolyubov's " edge of the wedge" theorem/A.A. Gonchar // Pros. Steklov Inst. Math. – 2000. – 228. - P. 18-24.
8. Айзенберг Л.А. Формулы Карлемана в комплексном анализе. Первые приложения/ Л.А. Айзенберг. – Новосибирск: Наука. - 1990. - С.– 247.
9. Pflug P. A boundary cross theorem for separately holomorphic functions/ Pflug P., Nguen Viet-Anh. // Ann. Polon. Math. – 2004. -84. - P. 237-271.
10. Митягин Б. С. Аппроксимативная размерность и базисы в ядерных пространствах /Б.С. Митягин // УМН. – 1961. – Т.16 – Вып. 4. – С.63
11. Хурумов Ю. В. Существование предельных значений и граничная теорема единственности для функций, мероморфных в клине в C^n /Ю.В. Хурумов//СО АН СССР, Красноярск: Институт физики им. Л.Б. Киренского, 1982. – Препринт №20М. – 20 с.
12. Имомкулов С. А. О голоморфном продолжении функций, заданных на граничном пучке комплексных прямых/С.А. Имомкулов // Известия РАН, серия математическая. – 2005. – Т. 69, №2. – С.125 -144.
13. Brelot M. Etude des fonctions sousharmoniques au voisnage d`un point/M.Brelot // Act. Sciens. et Ind. – 1934.– V.134. – P. 133 - 153.
14. Имомкулов С.А. О сепаратно-аналитических функциях многих переменных/ С.А. Имомкулов, Ж.У. Хужамов // УзМЖ. – 2000. – №3. – С .3-7.

ANALYTIC CONTINUATION OF SEPARATELY-ANALITIC FANCTION

S. A. Imomkulov

Let $D \subset C^n$ be a domain with a smooth boundary ∂D, $M \subset \partial D$ be a $k-$ dimensional $(n \le k \le 2n-1)$ generic C^1- manifold, $E \subset M$ be a subset of positive Lebesgue measure on M, and $F \subset G$ be a non-pluripolar compact subset of a strongly pseudoconvex domain $G \subset \mathbf{C}^m$. In this work it is proved, that every separately-analytic function on the set

$$X = ((D \cup E) \times F) \cup (E \times G)$$

can be holomorphically continued to the domain

$$\widehat{X} = \{(z,w) \in D \times G : \omega_{in}^{*}(z,E,D) + \omega^{*}(w,F,G) < 1\},$$

where $\omega^{*} - P$- measure, and $\omega_{in}^{*} -$ interior P - measure.