

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

УДК 519.6242

ПАРАЛЛЕЛЬНАЯ ЧИСЛЕННАЯ СХЕМА РЕШЕНИЯ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ОДНОМЕРНОГО ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ¹

А.В.Вяткин, И.В.Киреев*

В основе предлагаемой параллельной численной схемы решения краевых задач для одномерного эллиптического уравнения лежат точные соотношения, которым удовлетворяет искомая функция в узлах неравномерной сетки и метод конечных элементов с кусочно-линейными базисными функциями. Алгоритм приводит к системам линейных алгебраических уравнений с трёхдиагональной матрицей, имеющей приемлемое число обусловленности, оцененное в работе теоретически. Асимптотическая точность вычислительной схемы – произвольное наперёд заданное число. Для погрешности между кусочно-линейной аппроксимацией и точным решением на каждом из подотрезков построена вспомогательная краевая задача, решение которой можно легко оценить известными методами.

Многие задачи механики жидкости, теорий упругости и пластичности приводят к краевым задачам для эллиптических уравнений. Простейшая из них — одномерная краевая задача

$$-\frac{d}{dx}(p(x)u'(x)) + q(x)u(x) = f(x), \quad x \in [x_l, x_r]. \quad (1)$$

$$u(x_l) = u(x_r) = 0. \quad (2)$$

Здесь $p(x)$, $q(x)$ – кусочно-гладкие функции, удовлетворяющие условиям эллиптичности

$$p(x) \geq p_{\min} > 0, \quad q(x) \geq 0, \quad \forall x \in [x_l, x_r]. \quad (3)$$

Вообще говоря,

$$f(x) \in \mathbb{L}_2([x_l, x_r]) \quad (4)$$

— гильбертово пространство функций, определённых на $[x_l, x_r]$, квадрат которых интегрируем по этому отрезку, а

$$(f, g)_{\mathbb{L}_2([x_l, x_r])} = \int_{x_l}^{x_r} f(x)g(x)dx$$

— стандартное скалярное произведение в $\mathbb{L}_2([x_l, x_r])$.

Обозначим через $\overset{o}{\mathbb{H}^1}([x_l, x_r])$ энергетическое (соболевское) пространство функций [2] краевой задачи (1)-(2) со скалярным произведением $(\varphi, v)_{\mathbb{H}}$: для $\forall \varphi(x), \psi(x) \in \overset{o}{\mathbb{H}^1}$

$$(\varphi(x), v(x))_{\mathbb{H}} = (p(x)\varphi'(x), \psi'(x))_{\mathbb{L}_2([x_l, x_r])} + (q(x)\varphi(x), \psi(x))_{\mathbb{L}_2([x_l, x_r])}. \quad (5)$$

Возникает обобщённая (слабая) постановка исходной задачи: найти элемент $u \in \overset{o}{\mathbb{H}^1}([x_l, x_r])$ такой, что для любой пробной функции $\varphi(x) \in \overset{o}{\mathbb{H}^1}([x_l, x_r])$ выполняется интегральное тождество

$$(u(x), \varphi(x))_{\mathbb{H}} = (f(x), \varphi(x))_{\mathbb{L}_2([x_l, x_r])}. \quad (6)$$

Имеет место [1] утверждение:

Теорема 1. Слабое решение задачи (1) – (2) при ограничениях (3)-(4) существует и единственно.

¹Работа выполнена в КрасГУ и ИВМ СО РАН в рамках проекта № 8.3.7 программы 8.3 фундаментальных исследований СО РАН и при финансовой поддержке Комплексной программы фундаментальных исследований Президиума РАН “Параллельные вычисления на многопроцессорных вычислительных системах”.

*© А.В.Вяткин, Красноярский государственный университет, 2006. E-mail: Al357@yandex.ru; И.В.Киреев, Институт вычислительного моделирования СО РАН, 2006. E-mail: kiv@icm.krasn.ru.

Таким образом, при ограничениях (3) краевая задача (1)-(2) порождает линейный оператор U , который в правой части $f(x) \in \mathbb{L}_2([x_l, x_r])$ уравнения (1) ставит в соответствие решение краевой задачи (1) – (2)

$$U : \mathbb{L}_2([x_l, x_r]) \longrightarrow \overset{\circ}{\mathbb{H}}^1([x_l, x_r]), \quad U(f) = u. \quad (7)$$

В силу теоремы вложения [1], U можно рассматривать как оператор из $\mathbb{L}_2([x_l, x_r])$ в $\mathbb{L}_2([x_l, x_r])$. Имеет место [4]

Лемма 1. В пространстве $\mathbb{L}_2([x_l, x_r])$ оператор U ограничен

$$\|U(f)\|_{\mathbb{L}_2([x_l, x_r])} \leq \frac{\Delta}{\sqrt{\pi^2 p_{\min} + \Delta^2 q_{\min}}} \|f\|_{\mathbb{L}_2([x_l, x_r])}, \quad \pi = 3.142 \dots,$$

положительно определён и самосопряжён, то есть

$$(U(f), f)_{\mathbb{L}_2([x_l, x_r])} \geq 0, \quad (U(f), g)_{\mathbb{L}_2([x_l, x_r])} = (f, U(g))_{\mathbb{L}_2([x_l, x_r])},$$

для $\forall f, g \in \mathbb{L}_2([x_l, x_r])$. Здесь $\Delta = x_r - x_l$ - длина отрезка $[x_l, x_r]$, $p(x) \geq p_{\min} \geq 0$, $q(x) \geq q_{\min} \geq 0$ для $\forall x \in [x_l, x_r]$.

Доказательство леммы несложно и основано на неравенстве Фридрихса [4]

$$\int_{x_l}^{x_r} u^2(x) dx \leq \frac{\Delta^2}{\pi^2} \int_{x_r}^{x_l} u'^2 dx, \quad (8)$$

справедливым для $\forall u(x) \in \overset{\circ}{\mathbb{H}}^1$; $u'(x)$ обозначает производную функции $u(x)$ по x .

На отрезке $[x_l, x_r]$ введем неравномерную сетку $\bar{\omega}$

$$\bar{\omega} = \{x_l = x_0, x_1, \dots, x_{N-1}, x_N = x_r, \} \quad (9)$$

и определим базисные функции $\varphi_j(x)$, $j = 1, 2, \dots, N - 1$, следующим образом [2]:

$$\varphi_j(x) = \begin{cases} \varphi_{j,l} = \frac{x - x_{j-1}}{\Delta_j}, & x \in [x_{j-1}, x_j], \\ \varphi_{j,r} = \frac{x_{j+1} - x}{\Delta_{j+1}}, & x \in [x_j, x_{j+1}], \\ 0, & x \notin [x_{j-1}, x_{j+1}], \end{cases} \quad (10)$$

здесь $\Delta_j = x_j - x_{j-1}$ - длина j -го отрезка $[x_{j-1}, x_j]$. Отметим, что функции $\varphi_{j,l}$ и $\varphi_{j,r}$ удовлетворяют на отрезке $[x_{j-1}, x_j]$ дифференциальному уравнению

$$\frac{d^2 \varphi}{dx^2} = 0. \quad (11)$$

Обозначим через $\overset{\circ}{\mathbb{H}}$ линейную оболочку функций $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_{N-1}$:

$$\overset{\circ}{\mathbb{H}} = \{ f(x) \in \overset{\circ}{\mathbb{H}}^1 \mid \exists c_1, \dots, c_{N-1} \in \mathbb{R} : f(x) = c_1 \varphi_1(x) + \dots + c_{N-1} \varphi_{N-1}(x) \}. \quad (12)$$

Легко доказать следующее утверждение.

Лемма 2. Пространство $\overset{\circ}{\mathbb{H}}^1([x_l, x_r])$ представимо в виде прямой суммы

$$\overset{\circ}{\mathbb{H}}^1([x_l, x_r]) = \overset{\circ}{\mathbb{H}} \oplus \overset{\circ}{\mathbb{H}}^1([x_0, x_1]) \oplus \dots \oplus \overset{\circ}{\mathbb{H}}^1([x_{N-1}, x_N]),$$

где $\overset{\circ}{\mathbb{H}}^1([x_{j-1}, x_j])$ гильбертово пространство функций, определённых на отрезке $[x_{j-1}, x_j]$ и равных нулю в точках x_{j-1} и x_j ; скалярное произведение в $\overset{\circ}{\mathbb{H}}^1([x_{j-1}, x_j])$ имеет вид

$$(\varphi(x), v(x))_{\overset{\circ}{\mathbb{H}}_j} = (p(x)\varphi'(x), \psi'(x))_{\mathbb{L}_2([x_{j-1}, x_j])} + (q(x)\varphi(x), \psi(x))_{\mathbb{L}_2([x_{j-1}, x_j])}, \quad (13)$$

для $\forall \varphi(x), \psi(x) \in \overset{\circ}{\mathbb{H}}^1[x_{j-1}, x_j]$; $j = 1, 2, \dots, N - 1$.

В силу последнего утверждения, искомую функцию $u(x)$ можно единственным образом представить в виде

$$u(x) = u^\varphi(x) + u^\varepsilon(x), \quad (14)$$

где

$$u^\varphi(x) = \sum_{j=1}^{N-1} u_j \varphi_j(x) \in \overset{\varphi}{\mathbb{H}}, \quad u_j = u(x_j), \quad (15)$$

$$u^\varepsilon(x)|_{x \in [x_{j-1}, x_j]} = u_j^\varepsilon(x), \quad u_j^\varepsilon(x) \in \overset{o}{\mathbb{H}}^1([x_{j-1}, x_j]).$$

Подставив $u(x)$ из (14) в уравнения (1) и учитывая (10)–(11), приходим к краевой задаче на функцию $u_j^\varepsilon(x)$

$$-(p(x)u_j^{\varepsilon'}(x))' + q(x)u_j^\varepsilon(x) = f(x) - q(x)u^\varphi(x) + p'(x)u^{\varphi'}(x), \quad x \in [x_{j-1}, x_j], \quad (16)$$

$$u_j^\varepsilon(x_{j-1}) = 0, \quad u_j^\varepsilon(x_j) = 0, \quad j = 1, \dots, N.$$

Решение этой задачи, в силу ограничений (3), существует и единственно. Поэтому можно говорить об операторе U_j , аналогичном оператору U из (7):

$$U_j : \mathbb{L}_2([x_{j-1}, x_j]) \longrightarrow \overset{o}{\mathbb{H}}^1([x_{j-1}, x_j]), \quad (17)$$

так что $v(x) = U_j(g)$ тогда и только тогда, когда

$$\begin{aligned} -\frac{d}{dx}(p(x)v'(x)) + q(x)v(x) &= g(x), \quad x \in (x_{j-1}, x_j), \\ v(x_{j-1}) &= v(x_j) = 0. \end{aligned}$$

В пространстве $\mathbb{L}_2([x_{j-1}, x_j])$ оператор U_j , в силу леммы 1, является ограниченным, самосопряженным и положительно определенным. Следовательно из-за (16)

$$u_j^\varepsilon = U_j(f - qu^\varphi + p'u^{\varphi'}). \quad (18)$$

Считая, что в (6) пробные функции совпадают с базисными φ_j , определёнными в (10), приходим к системе из $N - 1$ уравнения относительно $N - 1$ неизвестных узловых значений $u_1, u_2, \dots, u_{N-1}$ искомой функции $u(x)$:

$$\begin{aligned} u_{j-1} \left[\left(p(x)\varphi'_{j-1}, \varphi'_j \right)_{\mathbb{L}_2([x_{j-1}, x_j])} + \left(q(x)\varphi_{j-1}, \varphi_j \right)_{\mathbb{L}_2([x_{j-1}, x_j])} \right] + \\ + u_j \left[\left(p(x)\varphi'_j, \varphi'_j \right)_{\mathbb{L}_2([x_{j-1}, x_{j+1}])} + \left(q(x)\varphi_j, \varphi_j \right)_{\mathbb{L}_2([x_{j-1}, x_{j+1}])} \right] + \\ + u_{j+1} \left[\left(p(x)\varphi'_{j+1}, \varphi'_j \right)_{\mathbb{L}_2([x_j, x_{j+1}])} + \left(q(x)\varphi_{j+1}, \varphi_j \right)_{\mathbb{L}_2([x_j, x_{j+1}])} \right] = \\ = \left(f(x), \varphi_j \right)_{\mathbb{L}_2([x_{j-1}, x_{j+1}])} + \varepsilon_j, \quad j \in 1, \dots, N-1, \end{aligned} \quad (19)$$

где

$$\varepsilon_j = (u_j^\varepsilon, (p\varphi'_{j,l})' - q\varphi_{j,l})_{\mathbb{L}_2([x_{j-1}, x_j])} + (u_{j+1}^\varepsilon, (p\varphi'_{j,r})' - q\varphi_{j,r})_{\mathbb{L}_2([x_j, x_{j+1}])}.$$

Подставив выражения для u_j^ε из (18) в последние соотношения, получаем

$$\begin{aligned} \varepsilon_j = \left(f - qu^\varphi + p'(u^\varphi)', U_j((p\varphi'_{j,l})' - q\varphi_{j,l}) \right)_{\mathbb{L}_2([x_{j-1}, x_j])} + \\ + \left(f - qu^\varphi + p'(u^\varphi)', U_{j+1}((p\varphi'_{j,r})' - q\varphi_{j,r}) \right)_{\mathbb{L}_2([x_j, x_{j+1}])}, \end{aligned} \quad (20)$$

и система уравнений (19) принимает вид

$$\begin{aligned} u_0 &= 0; \\ A_{j,j-1}u_{j-1} + A_{j,j}u_j + A_{j,j+1}u_{j+1} &= F_j; \quad j = 1, \dots, N-1; \\ u_N &= 0; \end{aligned} \quad (21)$$

где $A_{i,j} = A_{j,i}$; $A_{i,j} = 0$, при $|i - j| > 1$, $i, j = 1, \dots, N - 1$.

$$\begin{aligned}
 A_{j,j-1} &= \left[(p(x)\varphi'_{j-1}, \varphi'_{j-1})_{\mathbb{L}_2([x_{j-1}, x_j])} + (q(x)\varphi_{j-1}, \varphi_j)_{\mathbb{L}_2([x_{j-1}, x_j])} + \right. \\
 &\quad \left. + (-q\varphi_{j-1} + p'\varphi'_{j-1}, U_j(p'\varphi'_{j,l} - q\varphi_{j,l}))_{\mathbb{L}_2([x_{j-1}, x_j])} \right]; \\
 A_{j,j} &= \left[(p(x)\varphi'_j, \varphi'_j)_{\mathbb{L}_2([x_{j-1}, x_{j+1}])} + (q(x)\varphi_j, \varphi_j)_{\mathbb{L}_2([x_{j-1}, x_{j+1}])} + \right. \\
 &\quad + (-q\varphi_j + p'\varphi'_j, U_j(p'\varphi'_{j,l} - q\varphi_{j,l}))_{\mathbb{L}_2([x_{j-1}, x_j])} + \\
 &\quad \left. + (-q\varphi_j + p'\varphi'_j, U_{j+1}(p'\varphi'_{j,r} - q\varphi_{j,r}))_{\mathbb{L}_2([x_j, x_{j+1}])} \right]; \\
 F_j &= (f(x), \varphi_j + U_j(p'\varphi'_{j,l} - q\varphi_{j,l}))_{\mathbb{L}_2([x_{j-1}, x_j])} + \\
 &\quad + (f(x), \varphi_j + U_{j+1}(p'\varphi'_{j,r} - q\varphi_{j,r}))_{\mathbb{L}_2([x_j, x_{j+1}])}.
 \end{aligned} \tag{22}$$

Заметим, что эти соотношения являются точными на решении исходной краевой задачи (1)-(2). Для оценки границ спектра трёхдиагональной матрицы A системы (21) достаточно оценить квадрат энергетической нормы $(A \cdot \vec{v}, \vec{v})$ произвольного вектора $\vec{v} \in \mathbb{R}^{N-1}$ через квадрат его евклидовой нормы. Напомним, что вектор $\vec{v} \in \mathbb{R}^{N-1}$ порождает функцию $v(x) = \sum_{k=1}^{N-1} v_k \varphi_k(x) \in \overset{\circ}{H}$, так что $(\vec{v})_k = v_k = v(x_k)$, $k = 1, 2, \dots, N - 1$. Поэтому из (19)-(22) получаем

$$\begin{aligned}
 (A \cdot \vec{v}, \vec{v}) &= (v, v)_{\mathbb{H}} - \sum_{j=1}^{N-1} \varepsilon_j(\vec{v}) v_j = (v(x), v(x))_{\mathbb{H}} - \\
 &- \sum_{j=1}^{N-1} v_j \left[(p'v' - qv, U_j(p'\varphi'_{j,l} - q\varphi_{j,l}))_{\mathbb{L}_2([x_{j-1}, x_j])} + (p'v' - qv, U_{j+1}(p'\varphi'_{j,r} - q\varphi_{j,r}))_{\mathbb{L}_2([x_j, x_{j+1}])} \right] = \\
 &= (v(x), v(x))_{\mathbb{H}} - \sum_{j=1}^N \left(-(pv')' + qv, U_j(-(pv')' + qv) \right)_{\mathbb{L}_2([x_{j-1}, x_j])}.
 \end{aligned}$$

Теперь с помощью леммы 1 можно получить достаточно грубые оценки спектра трёхдиагональной матрицы A системы (21). Но в невырожденном случае, когда $q(x) \geq q_{\min} > 0$ для любого $x \in [x_l, x_r]$, эти оценки можно значительно улучшить.

Обозначим через $w_j(x)$ функцию $U_j(-(pv')' + qv)$, то есть согласно (16)

$$\begin{aligned}
 -\frac{d}{dx} \left(p(x)w'_j(x) \right) + q(x)w_j(x) &= -(p(x)v')' + q(x)v(x), \quad x \in [x_{j-1}, x_j], \\
 w_j(x_{j-1}) = w_j(x_j) &= 0.
 \end{aligned} \tag{23}$$

Тогда для любого $j \in \{1, 2, \dots, N\}$, в силу (13), имеем

$$\begin{aligned}
 \left(-(pv')' + qv, U_j(-(pv')' + qv) \right)_{\mathbb{L}_2([x_{j-1}, x_j])} &= \left(-(pv')' + qv, w_j(x) \right)_{\mathbb{L}_2([x_{j-1}, x_j])} = \\
 &= (w_j(x), v(x))_{\mathbb{H}_j} = (w_j(x), w_j(x))_{\mathbb{H}_j}
 \end{aligned}$$

Следовательно

$$\begin{aligned}
 (A \cdot \vec{v}, \vec{v}) &= \sum_{j=1}^N [(v(x), v(x))_{\mathbb{H}_j} - 2(w_j(x), v(x))_{\mathbb{H}_j} + (w_j(x), w_j(x))_{\mathbb{H}_j}] = \\
 &= \sum_{j=1}^N (v(x) - w_j(x), v(x) - w_j(x))_{\mathbb{H}_j}.
 \end{aligned}$$

Известно [4], что решение задачи (23) обладает следующим экстремальным свойством: для любой функции $w(x) \in \overset{\circ}{H}^1([x_{j-l}, x_j])$ выполнено неравенство

$$(v(x) - w(x), v(x) - w(x))_{\mathbb{H}_j} \geq (v(x) - w_j(x), v(x) - w_j(x))_{\mathbb{H}_j}.$$

Имеет место легко доказываемая

Лемма 3. Пусть $w(x)$ — решение краевой задачи

$$-aw''(x) + bw(x) = 0, \quad x \in (x_l, x_r); \quad w(x_l) = w_l, w(x_r) = w_r,$$

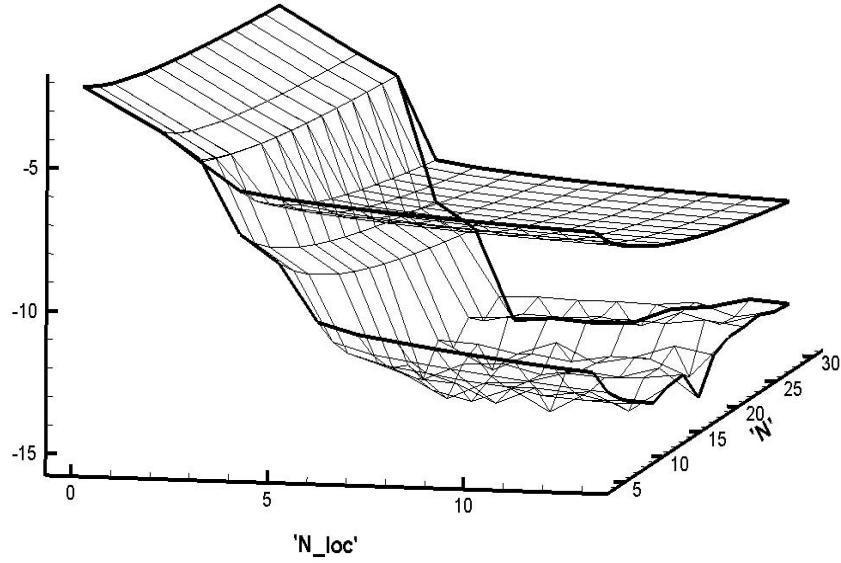


Рис. 1: $\varepsilon = 1$

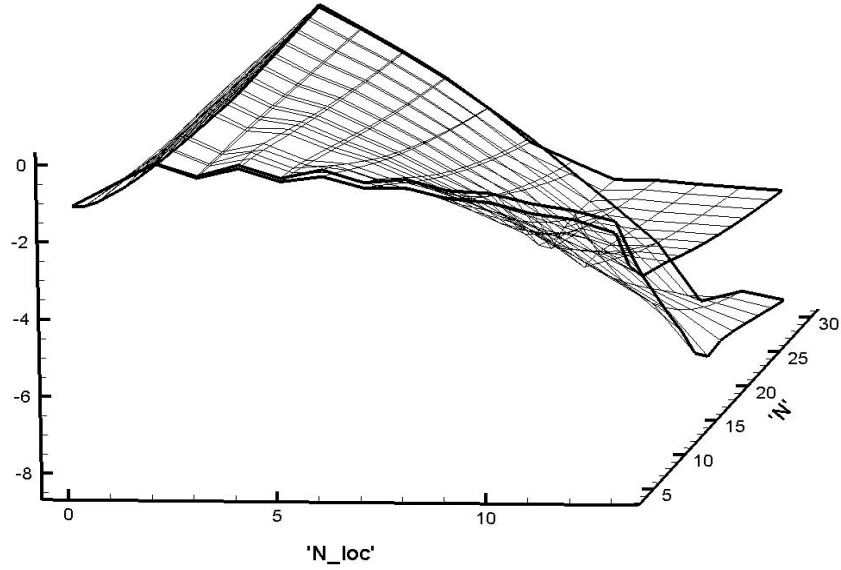


Рис. 2: $\varepsilon = 0,01$

где a и b – некоторые положительные константы. Тогда

$$\frac{1+\gamma}{1-\gamma} \sqrt{ab} (w_l^2 + w_r^2) \geq \int_{x_l}^{x_r} \{a [w'(x)]^2 + b w^2(x)\} dx \geq \frac{1-\gamma}{1+\gamma} \sqrt{ab} (w_l^2 + w_r^2),$$

где $\gamma = e^{-\sqrt{\frac{b}{a}} \Delta}$.

Поэтому

$$\begin{aligned} \frac{1-\gamma_{l,j}}{1+\gamma_{l,j}} \sqrt{p_{\min,j} q_{\min,j}} (v_{j-1}^2 + v_j^2) &\leq (v(x) - w_j(x), v(x) - w_j(x))_{\mathbb{H}_j} \leq \\ &\leq \frac{1+\gamma_{r,j}}{1-\gamma_{r,j}} \sqrt{p_{\max,j} q_{\max,j}} (v_{j-1}^2 + v_j^2); \end{aligned} \quad (24)$$

здесь

$$\gamma_{l,j} = e^{-\sqrt{\frac{q_{\min,j}}{p_{\min,j}}} \Delta_j}, \quad \gamma_{r,j} = e^{-\sqrt{\frac{q_{\max,j}}{p_{\max,j}}} \Delta_j}. \quad (25)$$

Суммируя неравенства (24) по j от 1 до N , получаем

$$\lambda_l \cdot (\vec{v}, \vec{v}) \leq (A \cdot \vec{v}, \vec{v}) \leq \lambda_r \cdot (\vec{v}, \vec{v}),$$

где

$$\lambda_l = 2 \min_{0 < j \leq N} \left\{ \frac{1 - \gamma_{l,j}}{1 + \gamma_{l,j}} \sqrt{p_{\min,j} q_{\min,j}} \right\}, \quad \lambda_r = 2 \max_{0 < j \leq N} \left\{ \frac{1 + \gamma_{r,j}}{1 - \gamma_{r,j}} \sqrt{p_{\max,j} q_{\max,j}} \right\}. \quad (26)$$

Сформулируем полученный результат:

Теорема 2. Пусть $p(x) \geq p_{\min} > 0$ и $q(x) \geq q_{\min} > 0$ для любого $x \in [x_l, x_r]$. Тогда все собственные значения матрицы A системы (21) лежат на отрезке $[\lambda_l, \lambda_r]$, границы которого определены в (25), (26).

Таким образом, численное решение исходной краевой задачи (1)–(2) сводится к решению N вспомогательных независимых друг от друга задач (23), после чего, решая систему линейных алгебраических уравнений (21), определяем узловые значения искомого решения u . Поэтому реализация алгоритма будет наиболее эффективной на параллельных вычислительных системах, когда решения каждой из вспомогательных задач проводятся на отдельном процессоре численно-аналитическими методами.

В качестве тестового примера рассмотрим краевую задачу

$$-\varepsilon^2 \frac{d^2 u(x)}{dx^2} + u(x) = (1 + \pi^2 \varepsilon^2) \sin(\pi x), \\ x \in (0, 1), \quad u(0) = u(1) = 0,$$

точным решением которой является функция $u(x) = \sin(\pi x)$.

На рис. 1 показана зависимость логарифма максимальной абсолютной погрешности численного решения от числа узлов N исходной равномерной сетки (9) и от числа узлов N_{loc} при решении вспомогательной задачи (23) методом вложенных сеток [3]. Значение $N_{loc} = 0$ соответствует классическому конечноэлементному решению исходной краевой задачи (1)–(2). Вычисления проводились при $\varepsilon = 1$ с использованием одной и двух вложенных сеток.

Рис. 2 соответствует ситуации, когда $\varepsilon = 0,01$. В этом случае число обусловленности системы не превосходит $(\frac{1+e^{-\varepsilon^2}}{1-e^{-\varepsilon^2}})^2 \simeq 4 \cdot 10^8 / N^2$. Как видно из приведённых рисунков, по мере увеличения шагов N и N_{loc} абсолютная погрешность в конечном счёте уменьшается. Однако на определенном этапе её значение стабилизируется и уже не уменьшается, что скорее всего связано с так называемым насыщением, возникающим при достижении предельной точности вычислений.

Список литературы

- [1] ЛАДЫЖЕНСКАЯ О.А. *Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа* / О.А.ЛАДЫЖЕНСКАЯ, Н.Н.УРАЛЬЦЕВА. – М.: Наука, 1973. – 576 с.
- [2] МАРЧУК Г.И. *Введение в проекционно-сеточные методы* / Г.И.МАРЧУК, В.И.АГОШКОВ. – М.: Наука, 1981. – 416 с.
- [3] МАРЧУК Г.И. *Повышение точности решений разностных схем* / Г.И. МАРЧУК, В.В. ШАЙДУРОВ. – М.: Наука, 1979. – 320 с.
- [4] РЕКТОРИС К. *Вариационные методы в математической физике и технике* / К. РЕКТОРИС. – М.: Мир, 1985. – 590 с.

PARALLEL NUMERIC SCHEME FOR ONE-DIMENSIONAL ELLIPTIC BOUNDARY VALUE PROBLEM

A.V.Vyatkin, I.V.Kireev

Parallel numerical method for one-dimensional elliptic boundary value problem is constructed. It based on exact relations between unknown mesh values of solution on non-uniform grid in the first place and on classical finite element method with piecewise-linear basis functions secondly. Asymptotic accuracy of computational scheme is arbitrary fixed number. There is tridiagonal system of linear algebraic equations finally; its condition number is theoretically estimated. The boundary value problem for difference between piecewise linear approximation and exact solution is formulated.