

УДК 517.55 + 512.7

**ОБ ОБЛАСТЯХ СХОДИМОСТИ ДВОЙНЫХ РЯДОВ  
ДЛЯ ПЕРИОДОВ НЕКОТОРЫХ МНОГООБРАЗИЙ КАЛАБИ - ЯУ<sup>1</sup>**

**А.Ю. Семушева\***

*В терминах параметризаций Горна – Капранова и алгебраических неравенств выписаны области сходимости некоторых гипергеометрических рядов, представляющих периоды соответствующих многообразий Калаби – Яу.*

Суперструнный вакуум с (2, 2)-суперсимметрией на мировом листе, а также вакуум теории Ландау-Гинзбурга определяются специальной геометрией пространства модулей многообразий Калаби-Яу и соот-

---

<sup>1</sup> Работа выполнена при содействии гранта поддержки ведущих научных школ РФ, НШ-1212. 2003. 1.

\* © А.Ю.Семушева, 2005.

ветствующих орбифолдов. Благодаря зеркальной симметрии многообразий Калаби-Яу сектор модулей деформации кэлеровой метрики идентифицируется с сектором модулей деформаций комплексных структур соответствующего зеркального многообразия [1]. Идея зеркальной симметрии в теории компактификаций суперструн эффективно использовалась при исследовании периодов на многообразиях Калаби-Яу.

В работе [2] для широкого класса гиперповерхностей Калаби-Яу (произвольной размерности  $N-1$ ) во взвешенном проективном пространстве вычислен фундаментальный период голоморфной  $(N-1)$ -формы  $\Omega$ . Как функция на пространстве модулей этот период является гипергеометрической функцией, а именно представляется рядом Горна, сходящимся для больших значений выделенного модуля  $\varphi_0$ . В статье [6] была описана процедура аналитического продолжения периода в другие области пространства модулей.

В настоящей статье вычисляются области сходимости двойных гипергеометрических рядов, представляющих периоды некоторых многообразий Калаби-Яу.

**Пример 1.** Этот пример многообразия Калаби-Яу взят из статьи [2]. Рассмотрим многочлен

$$P_1(x) = x_0^7 + x_1^7 x_3 + x_3^3 + x_2^7 x_4 + x_4^3,$$

определяющий во взвешенном проективном пространстве  $P_{(3,2,2,7,7)}^4$  гиперповерхность Калаби-Яу. Фундаментальный период гиперповерхности представляется рядом Горна

$$H_1(x_1, x_2) = \sum_{s_1, s_2 \geq 0} \frac{\Gamma(7s_1 + 3s_2 + 1)}{\Gamma^2(s_1 + 1)\Gamma^2(2s_1 + s_2 + 1)s_1!s_2!} x_1^{s_1} x_2^{s_2}. \tag{1}$$

Здесь  $x_1 = \varphi_0^{-7}$ ,  $x_2 = \varphi_1 / \varphi_0^3$ .

**Теорема 1.** Граница области сходимости ряда (1) задается параметризацией:

$$(|x_1|, |x_2|) = (|\Psi_1(q_1, q_2)|, |\Psi_2(q_1, q_2)|),$$

где

$$\Psi_1(q_1, q_2) = \frac{q_1^3(2q_1 + q_2)^4}{(7q_1 + 3q_2)^7}, \quad \Psi_2(q_1, q_2) = \frac{q_2(2q_1 + q_2)^2}{(7q_1 + 3q_2)^3}.$$

В соответствии со статьей [4] такую параметризацию назовем параметризацией Горна-Капрanova.

Доказательство. Для доказательства теоремы в множестве параметров  $s = (s_1, s_2) \in \mathbb{Z}_+^2$  зафиксируем направление  $q = (q_1, q_2) \neq 0$  и рассмотрим « $q$ -диагональную» подпоследовательность

$$C_l = \frac{\Gamma(7lq_1 + 3lq_2 + 1)}{\Gamma^2(lq_1 + 1)\Gamma^2(2lq_1 + lq_2 + 1)(lq_1)!(lq_2)!}, \quad l \in \mathbb{Z}_+$$

последовательности коэффициентов ряда (1). Для вычисления радиуса сходимости  $\rho_q$  соответствующего подряда воспользуемся формулой Коши-Адамара и асимптотической формулой Стирлинга

$$\Gamma(z + 1) \sim \sqrt{2\pi} z^{z + \frac{1}{2}} e^{-z}$$

при  $\text{Re } z \rightarrow +\infty$ . По формуле Стирлинга имеем при  $l \rightarrow \infty$

$$|C_l| \sim \frac{(7lq_1 + 3lq_2)^{(7q_1 + 3q_2) + \frac{1}{2}} e^{l(3q_1 + q_2 + 4q_1 + 2q_2 - 7q_1 - 3q_2)}}{(lq_1)^{3lq_1 + \frac{3}{2}} (2lq_1 + lq_2)^{4lq_1 + 2lq_2 + 1} (lq_2)^{lq_2 + \frac{1}{2}} (2\pi)^{\frac{3}{2}}} = \frac{(7lq_1 + 3lq_2)^{(7q_1 + 3q_2) + \frac{1}{2}}}{(lq_1)^{3q_1 + \frac{3}{2}} (2lq_1 + lq_2)^{4q_1 + 2q_2 + 1} (lq_2)^{q_2 + \frac{1}{2}} (2\pi)^{\frac{3}{2}}}.$$

А значит, по формуле Коши-Адамара получаем

$$\frac{1}{\rho_q} = \overline{\lim}_{l \rightarrow \infty} \sqrt[l]{|C_l|} = \lim_{l \rightarrow \infty} \sqrt[l]{\frac{(7lq_1 + 3lq_2)^{l(7q_1+3q_2)}}{(2lq_1 + lq_2)^{l(4q_1+2q_2)} (lq_1)^{3lq_1} (lq_2)^{2lq_2}} = \frac{(7q_1 + 3q_2)^{7q_1+3q_2}}{(2q_1 + q_2)^{4q_1+2q_2} q_1^{3q_1} q_2^{2q_2}}.$$

Таким образом, для радиуса сходимости диагонального ряда  $\sum C_l(x^q)^l$  имеем  $\rho_q = (\Psi_1)^{q_1} (\Psi_2)^{q_2}$ , или после логарифмирования

$$\log \rho_q = q_1 \log \Psi_1 + q_2 \log \Psi_2.$$

Соответственно, сам диагональный ряд  $\sum C_l(x^q)^l$  сходится тогда и только тогда, когда  $(\log |x_1|, \log |x_2|)$  находится в полупространстве

$$\langle q, \log |x| \rangle < \langle q, \log \Psi(q) \rangle. \tag{2}$$

Тем самым, в пространстве переменных  $\log |x|$  область сходимости ряда (1) есть внутренность пересечения полупространств (2) по всем  $q \in R_+^2$ .

**Предложение 1.** При  $q \in R_+^2$  вектор  $\log \Psi(q)$  параметризует выпуклую поверхность.

Достаточно доказать, что характеристические корни матрицы Якоби  $J = \frac{\partial(\log \Psi)}{\partial q}$  для параметризации  $\log \Psi(q)$  неотрицательные. Доказательство проводится вычислением характеристического многочлена  $Q(\lambda) = \det(J - \lambda I)$  в точке  $q = (1, 1)$ . Проводя аналогичные вычисления, получаем

$$\begin{aligned} \log \Psi(q) &= (3 \log q_1 + 4 \log(2q_1 + q_2) - 7 \log(7q_1 + 3q_2), \\ &\log q_2 + 2 \log(2q_1 + q_2) - 3 \log(7q_1 + 3q_2)). \end{aligned}$$

Тогда

$$J(\bar{1}) = \begin{pmatrix} \frac{23}{30} & -\frac{23}{30} \\ -\frac{23}{30} & \frac{23}{30} \end{pmatrix}$$

и, следовательно, характеристический многочлен имеет вид

$$Q(\lambda) = \lambda \left( \lambda - \frac{23}{15} \right),$$

т. е.  $\lambda_1 = 0$ ,  $\lambda_2 = \frac{23}{15}$ .

Для доказательства теоремы осталось заметить, что в условиях выпуклости поверхности  $\log \Psi(q)$ , гиперплоскость  $\langle q, \log |x| \rangle = \langle q, \log \Psi(q) \rangle$ , граничная к полупространству (2), является опорной к поверхности  $\log \Psi(q)$  в направлении  $q$ . Поэтому  $\Psi(q)$  параметризует границу области сходимости ряда (1) в логарифмических координатах. Теорема доказана.

Граница области сходимости ряда (1) задается уравнением

$$\begin{aligned} &823543|x_1|^3 - 453789|x_1|^2|x_2|^2 + 1372|x_2||x_1|^2 - 16|x_1|^2 + \\ &71442|x_2|^4|x_1| - 675|x_2|^3|x_1| + 8|x_2|^2|x_1| + 19683|x_2|^7 - \\ &2187|x_2|^6 + 81|x_2|^5 - |x_2|^4 = 0. \end{aligned}$$

Это уравнение получается исключением параметров  $q_1, q_2$  из параметризации Горна–Капранова

$$\begin{cases} |x_1| = \frac{q_1^3(2q_1 + q_2)^4}{(7q_1 + 3q_2)^7}, \\ |x_2| = \frac{q_2(2q_1 + q_2)^2}{(7q_1 + 3q_2)^3}. \end{cases}$$

Здесь надо отметить, что фактически, ввиду однородности относительно  $q_1, q_2$ , исключать надо только одно переменное  $t = \frac{q_2}{q_1}$ .

Область сходимости ряда (1) изображена на рис.1, а параметризация границы области сходимости, указанная в теореме 1, в логарифмической шкале на рис. 2 представляет собой кусок кривой гиперболического типа, асимптоты которой параллельны координатным осям. В целом, на рис. 2 изображена амeba сингулярной кривой (образ этой кривой при отображении  $(x_1, x_2) \rightarrow (\log |x_1|, \log |x_2|)$ , см. [4], [5]) для многозначной функции, определенной аналитическим элементом – рядом (1).

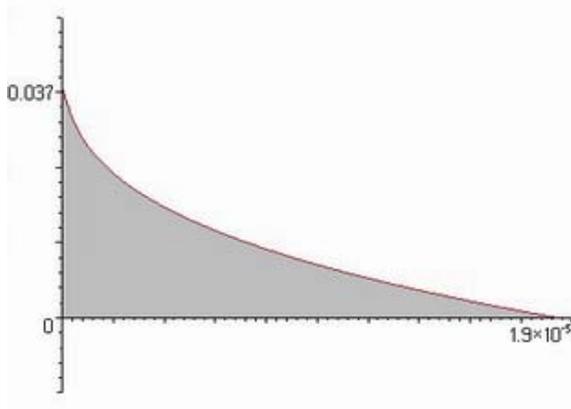


Рис. 1

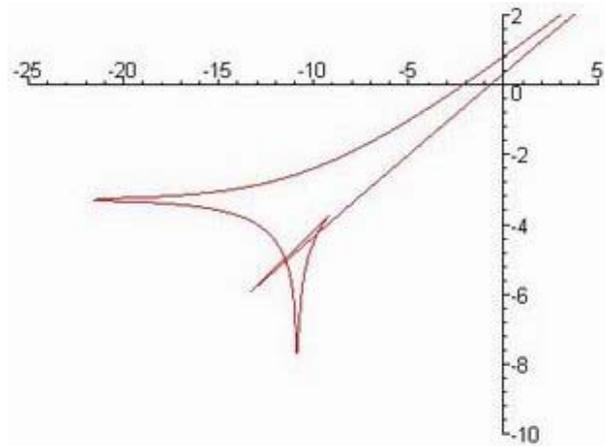


Рис. 2

Ряд (1) допускает представление в виде интеграла Меллина - Барнса (см. [6])

$$\begin{aligned} \Phi(x_1, x_2) = \frac{1}{(2\pi i)^2} \int_{\gamma + i\mathbb{R}^2} \frac{\Gamma(z_1)\Gamma(z_2)\Gamma(-7z_1 - 3z_2 + 1)}{\Gamma^2(-z_1 + 1)\Gamma^2(-2z_1 - z_2 + 1)} \times \\ \times (-x_1)^{z_1}(-x_2)^{z_2} dz_1 dz_2, \end{aligned} \tag{3}$$

где  $\gamma$  - любая точка из треугольника

$$\{\tau \in \mathbb{R}^2 : \tau_1 > 0, \tau_2 > 0, \tau_1 + \tau_2 < \frac{1}{4}\}.$$

Для интеграла (3) существуют три формулы его вычисления в виде рядов из вычетов [6], один из этих рядов совпадает с формулой (1), два других выписываются следующим образом:

$$\begin{aligned} H_2(x_1, x_2) = \\ \frac{(-x_2)^{-\frac{1}{3}}}{3} \sum_{s_1, s_2 \geq 0} \frac{\Gamma(\frac{1}{3}s_1 + \frac{7}{3}s_2 + 1)e^{\pi i(\frac{2}{3}s_1 - \frac{1}{3}s_2)}}{(s_1)!(s_2)!\Gamma^2(s_2 + 1)\Gamma^2(-\frac{1}{3}s_1 - \frac{1}{3}s_2 + \frac{2}{3})} \times \\ \times \left(\frac{1}{x_2^{\frac{1}{3}}}\right)^{s_1} \left(\frac{x_1}{x_2^{\frac{1}{3}}}\right)^{s_2} \end{aligned} \tag{4}$$

и

$$\begin{aligned}
 H_3(x_1, x_2) = & \\
 & \frac{(-x_1)^{-\frac{1}{7}}}{7} \sum_{s_1, s_2 \geq 0} \frac{\Gamma(\frac{3}{7}s_1 + \frac{1}{7}s_2 + 1) e^{\pi i(\frac{3}{7}s_2 - \frac{2}{7}s_1)}}{(s_1)!(s_2)! \Gamma^2(-\frac{3}{7}s_1 - \frac{1}{7}s_2 + \frac{6}{7}) \Gamma^2(\frac{1}{7}s_1 - \frac{2}{7}s_2 + \frac{5}{7})} \times \\
 & \times \left(\frac{x_2}{x_1^{\frac{1}{7}}}\right)^{s_1} \left(\frac{1}{x_1^{\frac{1}{7}}}\right)^{s_2}.
 \end{aligned} \tag{5}$$

Ряды  $H_2(x_1, x_2)$  и  $H_3(x_1, x_2)$  являются аналитическим продолжением фундаментального периода (1) (или интеграла (3)).

Характерной чертой для ряда (4) (равно как и для ряда (1)) является то, что аргументами гамма-функций в них являются линейные функции с коэффициентами одного знака при  $s_1$  и  $s_2$ . Поэтому, используя формулу дополнения

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin \pi z},$$

мы можем поднять в числитель соответствующий множитель из знаменателя в (4) и применить формулу Стирлинга (см. доказательство Теоремы 1) для того, чтобы вычислить радиус сходимости q-диагонального ряда. В результате вычислений получается следующая формула параметризации для границы области сходимости ряда (4):

$$(|x_1|, |x_2|) = \left( \frac{q_1}{(\frac{1}{3}q_1 + \frac{7}{3}q_2)^{\frac{1}{3}} (\frac{1}{3}q_1 + \frac{1}{3}q_2)^{\frac{2}{3}}}, \frac{q_2^3}{(\frac{1}{3}q_1 + \frac{7}{3}q_2)^{\frac{2}{3}} (\frac{1}{3}q_1 + \frac{1}{3}q_2)^{\frac{1}{3}}} \right), \quad q_1, q_2 \in \mathbb{R}_+^2.$$

На рис. 3 и рис. 4 приведены изображения амебы сингулярной кривой для многозначной функции, определяемой интегралом (3) или рядами (1), (4), (5) в координатах

$$t_1 = \frac{1}{(x_2)^{\frac{1}{3}}}, \quad t_2 = \frac{x_1}{(x_2)^{\frac{7}{3}}} \quad \text{и} \quad t_1 = \frac{x_2}{(x_1)^{\frac{3}{7}}}, \quad t_2 = \frac{1}{(x_2)^{\frac{1}{7}}}.$$

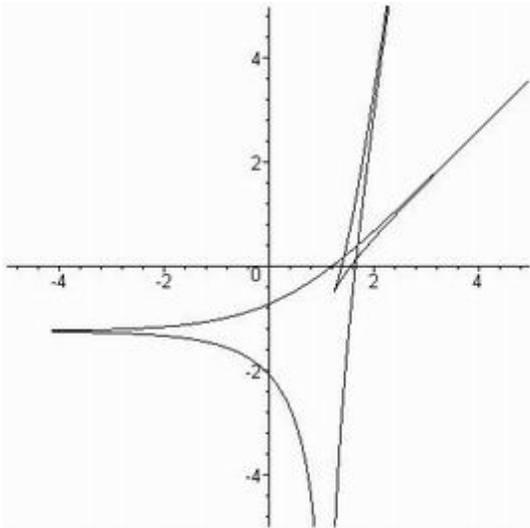


Рис. 3

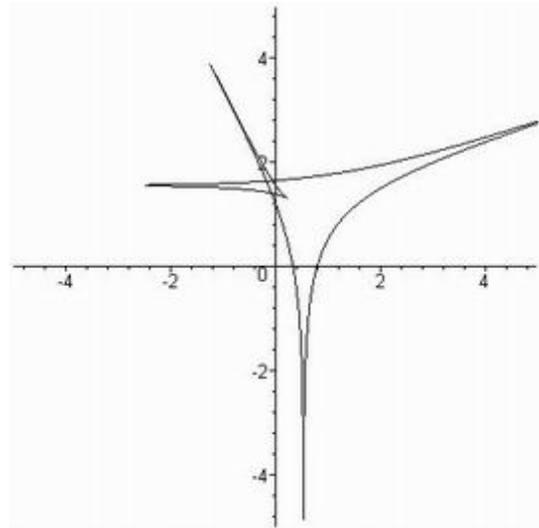


Рис. 4

**Пример 2.** В статье [8] рассматривается многочлен

$$P = -1 + a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + a_4x_4 + a_5(x_1x_2x_3)^{-1} + a_6(x_4^{-1}x_1x_2),$$

определяющий гиперповерхность Калаби - Яу в некотором торическом многообразии размерности 4, где  $a_5, a_6$  -- модули многообразия Калаби - Яу. Фундаментальный период торической гиперповерхности  $Z_f = \{P(x) = 0\}$  задается аналитическим элементом (при малых  $a_5$  и  $a_6$ ) в виде интеграла:

$$\omega_0(a_5, a_6) = -\frac{1}{(2\pi i)^4} \int_{\gamma} \frac{1}{P(a_5, a_6, x)} \frac{dx_1}{x_1} \wedge \dots \wedge \frac{dx_4}{x_4},$$

где контур  $\gamma$  есть декартово произведение  $\gamma_1 \times \gamma_2 \times \gamma_3 \times \gamma_4$  четырех окружностей  $\gamma_i = \left\{ |x_i| = \frac{1}{8} \right\}$ . В работе [8] этот аналитический элемент представлен рядом Горна

$$H_1(x_1, x_2) = \sum_{s_1, s_2 \geq 0} \frac{\Gamma(4s_1 + 4s_2 + 1)}{\Gamma^2(s_1 + s_2 + 1)(s_1!)^2(s_2!)^2} x_1^{s_1} x_2^{s_2}, \tag{6}$$

где  $x_1 = a_5$ ,  $x_2 = a_5 a_6$ .

Для этого ряда область сходимости находим так же, как и в примере 1.

Рассматриваем подпоследовательность  $C_l$ , по формуле Стирлинга при  $l \rightarrow \infty$  имеем

$$|C_l| \sim \frac{(4lq_1 + 4lq_2)^{4l(q_1+q_2)+\frac{1}{2}}}{(lq_1)^{2q_1+1}(lq_1+lq_2)^{2q_1+2q_2+1}(lq_2)^{2q_2+1}(2\pi)^{\frac{1}{2}}}.$$

По формуле Коши-Адамара получаем радиус сходимости

$$(|x_1|, |x_2|) = \left( \frac{q_1^2}{4^4(q_1+q_2)^2}, \frac{q_2^2}{4^4(q_1+q_2)^2} \right).$$

Заметим, что граница области сходимости ряда (6) выписывается в виде

$$|x_1|^2 + |x_2|^2 - \frac{2}{4^4}|x_1| - 2|x_1||x_2| - \frac{2}{4^4}|x_2| + \frac{1}{4^8} = 0.$$

Область сходимости ряда (6) представлена на рис. 5, а на рис. 6 изображена амеба для сингулярного множества этого ряда. Причем затемненная компонента дополнения этой амебы и есть область сходимости ряда (6) в логарифмических координатах.

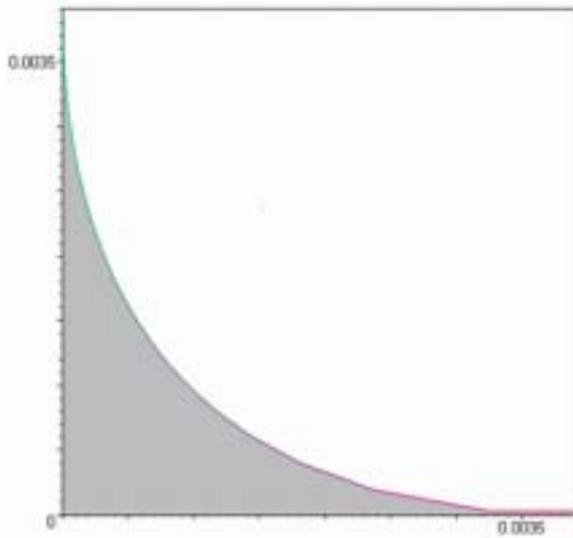


Рис. 5

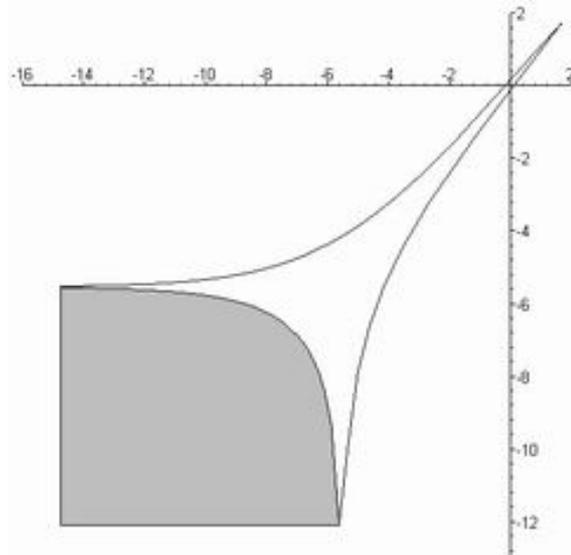


Рис. 6

**СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ**

1. Hubsch T. Calabi-Yau Manifolds-A Bestiary for Physicists. Singapore: World Scientific, 1992.
2. Berglund P., Candelas P., X. de la Ossa, Font A., Hubsch T., Jancic D., Quevedo F.//Nucl. Phys. 1994. V. B419. P. 352.
3. Kapranov M. A characterisation of A-discriminantal hypersurfaces in terms of the logarithmic Gauss map// Math. Ann. 290 (1991), 275-285.

4. Passare M., Tsikh A. Algebraic equations and hypergeometric series. In the book "The legacy of N. H. Abel", Springer-Verlag (2004), 563-582.
5. Passare M., Sadykov T., Tsikh A. Singularities of hypergeometric functions in several variables // *Compositio Math.* 141 (2005), 787-810.
6. Пассаре М. Кратные интегралы Меллина-Барнса как периоды многообразий Калаби-Яу с несколькими модулями / М. Пассаре, А.К. Цих, А.А. Чешель // *Теоретическая и математическая физика.* – 1996. - Т. 109, № 3. – С. 381-394.
7. Семушева А.Ю. Продолжение исследований Меллина о решении алгебраических уравнений / А.Ю. Семушева, А.К. Цих // *Комплексный анализ и дифференциальные операторы.* - Красноярск: Краснояр. гос. ун-т, 2000. - С. 122-134.
8. Batyrev V.V., Ciocan-Tontanine I., Kim B., Duco van Straten Conifold transition and mirror symmetry for Calabi-Yau complete intersection in Grassmanians, alg-geom/9710022.
9. Mellin H. Resolution de l'equation algebrique generale a l'aide de la fonction gamma, C. R. Acad. Sci. Paris Ser. I. Math 172 (1921), 658-661.

### DOMAINS OF CONVERGENCE OF CERTAIN HYPERGEOMETRIC SERIES

**A.Yu. Semusheva**

*Domains of convergence of certain hypergeometric series, which represent periods of the corresponding Calabi-Yau manifolds, are written out in terms of Horn-Kapranov parametrizations and algebraic inequalities.*