



$$\begin{aligned}
 & |\xi^{k+\varepsilon} D_x^\alpha F| + |\xi^{k+\varepsilon} D_x^\alpha H| + |\xi^{k+\varepsilon} D_x^\alpha w_0^1| + |\xi^{k+\varepsilon} D_x^\alpha w_0^2| \leq C, \\
 & |\alpha| \leq 3, \quad k = 0, 1, \dots, 9, \\
 & |\xi^{k+\varepsilon} \frac{\partial}{\partial \xi} D_x^\alpha F| + |\xi^{k+\varepsilon} \frac{\partial}{\partial \xi} D_x^\alpha H| + |\xi^{k+\varepsilon} \frac{\partial}{\partial \xi} D_x^\alpha w_0^1| + |\xi^{k+\varepsilon} \frac{\partial}{\partial \xi} D_x^\alpha w_0^2| \leq C, \\
 & |\alpha| \leq 2, \quad k = 0, 1, \dots, 9, \quad \varepsilon > 0 - \text{const}, \\
 & f(t, x, 0) > \delta, \quad h(t, x, 0) > \delta, \quad \delta > 0 - \text{const}.
 \end{aligned} \tag{7}$$

Здесь  $D_x^\alpha$  — оператор дифференцирования по  $x$ ,  $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$  — мультииндекс,  $C \geq 0$  некоторая постоянная.

Можно показать [1], что при каждом фиксированном  $T > 0$  решение задачи (1)–(3) в области  $G_{[0,T]} = \{(t, x, z) | 0 \leq t \leq T, x \in E^n, z \in E^1\}$  существует единственно и выражается через решение прямой задачи (4) – (5) следующими соотношениями:

$$\begin{aligned}
 u^k(t, x, z) &= \text{Re} \int_{-\infty}^{+\infty} w^k(t, x, \xi) e^{i\xi z} d\xi, \quad k = 1, 2; \\
 g^1(t, x) &= \text{Re} \left( \gamma^1 - ic_1 \int_{-\infty}^{+\infty} \xi w^1 d\xi + \nu \int_{-\infty}^{+\infty} \xi^2 w^1 d\xi \right) f^{-1}(t, 0); \\
 g^2(t, x) &= \text{Re} \left( \gamma^2 - ic_2 \int_{-\infty}^{+\infty} \xi w^2 d\xi \right) h^{-1}(t, 0).
 \end{aligned} \tag{8}$$

Для исследования свойств решения задачи при  $t \rightarrow \infty$  применим метод слабой аппроксимации [3]. Рассмотрим следующее расщепление задачи (4)–(5)

$$\begin{cases} w_t^{1,\tau} + a_{1l} w_{x_l}^{1,\tau} = \Delta w^{1,\tau}, \\ w_t^{2,\tau} + a_{2l} w_{x_l}^{2,\tau} = 0, \end{cases} \quad m\tau < t \leq (m + \frac{1}{2})\tau; \tag{9}$$

$$\begin{cases} w_t^{1,\tau} - i\xi c_1 w^{1,\tau} + b_{11} w^{1,\tau} + b_{12} w^{2,\tau} = -\xi^2 \nu w^{1,\tau} + \\ + \text{Re} \left( \gamma^1 - ic_1 \int_{-\infty}^{+\infty} \xi w^{1,\tau} d\xi + \nu \int_{-\infty}^{+\infty} \xi^2 w^{1,\tau} d\xi \right) f^{-1}(t, x, 0) F(t, x, \xi), \\ w_t^{2,\tau} - i\xi c_2 w^{2,\tau} + b_{21} w^{1,\tau} + b_{22} w^{2,\tau} = \\ = \text{Re} \left( \gamma^2 - ic_2 \int_{-\infty}^{+\infty} \xi w^{2,\tau} d\xi \right) h^{-1}(t, x, 0) H(t, x, \xi), \end{cases} \tag{10}$$

$$w^{k,\tau}(0, x, \xi) = w_0^k(x, \xi), \quad k = 1, 2, \tag{11}$$

где  $m = 0, 1, 2, \dots, N-1$ ,  $N\tau = T$ .

Заметим [1], что при любом фиксированном  $T > 0$  последовательность  $\{w^{1,\tau_k}, w^{2,\tau_k}\}$  решений расщепленной задачи (9)–(11) сходится к решению  $\{w^1, w^2\}$  задачи (4)–(5).

Прежде чем перейти в исследованию свойств решения поставленной задачи, докажем следующее утверждение:

**Лемма 1.** Пусть  $y(t)$  — неотрицательная функция, непрерывная на любом отрезке  $[t_0, t_0 + \theta]$ , ( $\theta > 0$ ,  $t_0 \geq 0$ ) удовлетворяет неравенству

$$\frac{d}{dt} y + a(t)y \leq b(t) \tag{12}$$

и условию  $y(t_0) = y_{t_0}$ , где  $a(t)$ ,  $b(t)$  — непрерывные на  $[t_0, t_0 + \theta]$  функции, удовлетворяющие на этом интервале соотношениям

$$a(t) \geq d > 0, \quad b(t) \geq 0.$$

Тогда для всех  $t \in [t_0, t_0 + \theta]$  выполнено неравенство

$$y(t) \leq \int_{t_0}^{t_0+t} b(\eta) d\eta + y_{t_0} e^{-d(t-t_0)}. \quad (13)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Умножив неравенство (12) на  $\exp\left(\int_{t_0}^t a(\eta) d\eta\right)$ , получим

$$\frac{d}{dt} \left( y \exp\left(\int_{t_0}^t a(\eta) d\eta\right) \right) \leq b(t) \exp\left(\int_{t_0}^t a(\eta) d\eta\right).$$

Проинтегрировав полученное неравенство по  $t$  на интервале  $(t_0, t)$ ,  $t \in [t_0, t_0 + \theta]$  и разрешив результат интегрирования относительно  $y(t)$ , получим утверждение леммы:

$$\begin{aligned} y(t) &\leq \int_{t_0}^t b(\eta) \exp\left(\int_{t_0}^{\eta} a(\zeta) d\zeta\right) d\eta \exp\left(\int_{t_0}^t -a(\eta) d\eta\right) + y_{t_0} \exp\left(\int_{t_0}^t -a(\eta) d\eta\right) \leq \\ &\leq \int_{t_0}^{t_0+t} b(\eta) d\eta + y_{t_0} e^{-d(t-t_0)}. \end{aligned}$$

Далее будем использовать следующие обозначения:  $\Xi_k = \sum_{l=1}^k |\xi|^l$ ,  $C \geq 0$  — постоянные, вообще говоря, различные, не зависящие от  $t$  и  $\tau$ .

**Лемма 2.** Пусть в  $\tilde{G}_{[0,+\infty)}$  выполнены условия (6)–(7), а также

$$\begin{aligned} b_{11}(t, x) - 2 \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|c_1(t, x)| + |\nu(t, x)|}{\delta} |F(t, x, \xi)| d\xi - 2|b_{21}(t, x)| &\geq 2d > 0, \\ b_{22}(t, x) - 2 \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|c_2(t, x)|}{\delta} \Xi_2 |H(t, x, \xi)| d\xi - 2|b_{12}(t, x)| &\geq 2d > 0. \end{aligned} \quad (14)$$

Тогда если

$$\int_0^{+\infty} (|\gamma^1(t, x)| + |\gamma^2(t, x)|) dt \leq C, \quad (15)$$

то в  $\Pi_{[0,+\infty]}$  имеет место неравенство

$$|u^k(t, x, z)| + |u_z^k(t, x, z)| + |u_{zz}^k(t, x, z)| \leq C, \quad k = 1, 2. \quad (16)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обратимся к расщепленной задаче (9)–(11). Рассмотрим задачу, решаемую на втором дробном шаге  $m$ -го шага, а именно, систему (10) в области  $G^m = \{(t, x, \xi) | (m + \frac{1}{2})\tau < t \leq (m + 1)\tau, x \in E^n, \xi \in E^1\}$  с начальными данными

$$w^{k,\tau}((m + \frac{1}{2})\tau, x, \xi) = \tilde{w}^{k,\tau}(x, \xi). \quad (17)$$

Здесь  $\tilde{w}^{k,\tau}(x, \xi)$  — значения функций  $w^{k,\tau}(t, x, \xi)$ , полученные на предыдущем дробном шаге при  $t = (m + \frac{1}{2})\tau$ .

В  $C^m$  имеют место (доказательство см. в [1]) следующие неравенства:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial t} |w^{1,\tau}| + b_{11} |w^{1,\tau}| + \nu \xi^2 |w^{1,\tau}| \leq 2|b_{12}| |w^{2,\tau}| + \frac{2|c_1|}{\delta} |F| \int_{-\infty}^{+\infty} |\xi| |w^{1,\tau}| d\xi + \\ + \frac{2|\nu|}{\delta} |F| \int_{-\infty}^{+\infty} \xi^2 |w^{1,\tau}| d\xi + \frac{|\gamma^1| |F|}{\delta}, \\ \frac{\partial}{\partial t} |w^{2,\tau}| + b_{22} |w^{2,\tau}| \leq 2|b_{21}| |w^{1,\tau}| + \frac{2|c_2|}{\delta} |H| \int_{-\infty}^{+\infty} |\xi| |w^{2,\tau}| d\xi + \frac{|\gamma^2| |H|}{\delta}. \end{array} \right. \quad (18)$$

Умножим неравенства системы (18) на  $\Xi_2$ , проинтегрируем по  $\xi$  от  $-\infty$  до  $+\infty$  и просуммируем результаты интегрирования:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \int_{-\infty}^{+\infty} \Xi_2 (|w^{1,\tau}| + |w^{2,\tau}|) d\xi + b_{11} \int_{-\infty}^{+\infty} \Xi_2 |w^{1,\tau}| d\xi + b_{22} \int_{-\infty}^{+\infty} \Xi_2 |w^{2,\tau}| d\xi \leq \\ \leq 2 \left( \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|c_1|}{\delta} \Xi_2 |F| d\xi + \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|\nu|}{\delta} \Xi_2 |F| d\xi + |b_{21}| \right) \int_{-\infty}^{+\infty} \Xi_2 |w^{1,\tau}| d\xi + \\ + 2 \left( \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|c_2|}{\delta} \Xi_2 |H| d\xi + |b_{12}| \right) \int_{-\infty}^{+\infty} \Xi_2 |w^{2,\tau}| d\xi + \int_{-\infty}^{+\infty} \Xi_2 \frac{|\gamma^1| |F| + |\gamma^2| |H|}{\delta} d\xi. \end{aligned}$$

Используя (14), получаем

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{-\infty}^{+\infty} \Xi_2 (|w^{1,\tau}| + |w^{2,\tau}|) d\xi + 2d \int_{-\infty}^{+\infty} \Xi_2 (|w^{1,\tau}| + |w^{2,\tau}|) d\xi \leq \int_{-\infty}^{+\infty} \Xi_2 \frac{|\gamma^1| |F| + |\gamma^2| |H|}{\delta} d\xi. \quad (19)$$

Нетрудно заметить, что для (19), (17) выполнены все условия леммы 1. Следовательно, для  $t \in [(m + \frac{1}{2})\tau, (m + 1)\tau]$  верно неравенство

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \Xi_2 (|w^{1,\tau}| + |w^{2,\tau}|) d\xi \leq C \int_{(m+\frac{1}{2})\tau}^t \gamma(\eta) d\eta + e^{-2d(t-(m+\frac{1}{2})\tau)} \int_{-\infty}^{+\infty} \Xi_2 (|\tilde{w}^{1,\tau}| + |\tilde{w}^{2,\tau}|) d\xi, \quad (20)$$

где  $\gamma(t) = \sup_{x \in E^n} (|\gamma^1(t, x)| + |\gamma^2(t, x)|)$ .

Вернемся к расщепленной задаче. Рассмотрим нулевой целый шаг ( $m = 0$ ).

Применяя теорему принципа максимума к уравнениям системы (9), можно получить, что на первом дробном шаге выполнено неравенство

$$\|W^\tau(t)\| \leq \|W_0\|, \quad 0 \leq t \leq \frac{\tau}{2}. \quad (21)$$

Здесь

$$\begin{aligned} \|W^\tau(t)\| &= \int_{-\infty}^{+\infty} \Xi_2 \left( \sup_{x \in E^n} |w^{1,\tau}| + \sup_{x \in E^n} |w^{2,\tau}| \right) d\xi, \\ \|W_0^\tau\| &= \int_{-\infty}^{+\infty} \Xi_2 \left( \sup_{x \in E^n} |w_0^{1,\tau}| + \sup_{x \in E^n} |w_0^{2,\tau}| \right) d\xi. \end{aligned} \quad (22)$$

Тогда, используя (20), на втором дробном шаге получаем

$$\|W^\tau(t)\| \leq C \int_{\frac{\tau}{2}}^{\tau} \gamma(\eta) d\eta + \|W_0\|, \quad \frac{\tau}{2} < t \leq \tau.$$

Рассмотрим следующий целый шаг ( $m = 1$ ). Из теоремы принципа максимума следует, что на первом дробном шаге выполнено неравенство

$$\|W^\tau(t)\| \leq \|W^\tau(\tau)\| \leq C \int_{\frac{\tau}{2}}^{\tau} \gamma(\eta) d\eta + \|W_0\|, \quad \tau \leq t \leq \frac{3\tau}{2}.$$

Отсюда и из (20) получаем, что на втором дробном шаге справедливо неравенство

$$\|W^\tau(t)\| \leq C \int_{\frac{3\tau}{2}}^{2\tau} \gamma(\eta) d\eta + C \int_{\frac{\tau}{2}}^{\tau} \gamma(\eta) d\eta + \|W_0\|, \quad \frac{3\tau}{2} < t \leq 2\tau.$$

Продолжая рассуждения, на втором дробном шаге 3-го целого шага получаем оценку

$$\|W^\tau(t)\| \leq C \int_{\frac{5\tau}{2}}^{3\tau} \gamma(\eta) d\eta + C \int_{\frac{3\tau}{2}}^{2\tau} \gamma(\eta) d\eta + C \int_{\frac{\tau}{2}}^{\tau} \gamma(\eta) d\eta + \|W_0\|, \quad \frac{5\tau}{2} < t \leq 3\tau.$$

Рассматривая последующие шаги, нетрудно убедиться, что на  $m$ -ом шаге ( $m = 0, 1, 2, \dots, N - 1$ ) выполнено

$$\begin{aligned} \|W^\tau(t)\| &\leq C \sum_{k=0}^m \int_{(k+\frac{1}{2})\tau}^{(k+1)\tau} \gamma(\eta) d\eta + \|W_0\| \leq C \sum_{k=0}^{\infty} \int_{(k+\frac{1}{2})\tau}^{(k+1)\tau} \gamma(\eta) d\eta + \|W_0\| \leq \\ &\leq C \int_0^{+\infty} \gamma(\eta) d\eta + \|W_0\|, \quad m\tau < t \leq (m+1)\tau. \end{aligned}$$

Отсюда и из (15), следует, что

$$\|W^\tau(t)\| \leq C, \quad 0 \leq t \leq T. \quad (23)$$

Так как при любом фиксированном  $T > 0$  имеет место [1] равномерная по  $\tau$  сходимость последовательности решений  $w^{\tau k} = (w^{1,\tau k}, w^{2,\tau k})$  задачи (9)–(11) к решению  $w = (w^1, w^2)$  задачи (4)–(5) вместе со всеми производными по  $x$  до второго порядка включительно, то можно доказать неравенство (см. [1]). Справедливо неравенство

$$\|W(t)\| \leq C, \quad 0 \leq t \leq T. \quad (24)$$

Здесь  $\|W(t)\| = \int_{-\infty}^{+\infty} \Xi_2 \left( \sup_{x \in E^n} |w^1| + \sup_{x \in E^n} |w^2| \right) d\xi$ .

Так как  $C$  в (24) не зависит от  $T$ , то (24) справедливо всюду в  $\tilde{G}_{[0,+\infty)}$ . Последняя оценка гарантирует, что для функций  $u^1(t, x, z)$ ,  $u^2(t, x, z)$ ,  $g^1(t, x)$ ,  $g^2(t, x)$ , которые являются решением задачи (1)–(3) и связаны с решением задачи (4)–(5) формулами (8), справедливы неравенства (16).

**Лемма 3.** Пусть в  $G_{[0,+\infty)}$  выполнены условия (6) – (7), (14) и

$$|\gamma^1(t)| + |\gamma^2(t)| \leq \frac{1}{1+tp}, \quad p > 1 - const. \quad (25)$$

Тогда в области  $G_{[0,+\infty)}$  имеет место соотношение

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \sum_{j=0}^2 \sup_{(x,z) \in E^{n+1}} \left| \frac{\partial^j}{\partial z^j} u^k(t, x, z) \right| = 0, \quad k = 1, 2. \quad (26)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассуждая так же, как и при доказательстве леммы 2, получим, что на нулевом целом шаге выполнены неравенства:

$$\|W^\tau(t)\| \leq \|W_0\|, \quad 0 < t \leq \frac{\tau}{2},$$

$$\|W^\tau(t)\| \leq C \int_{\frac{\tau}{2}}^t \gamma(\eta) d\eta + e^{-2d(t-\frac{\tau}{2})} \|W_0\|, \quad \frac{\tau}{2} \leq t \leq \tau.$$

Полагая в последнем неравенстве  $t = \tau$ , получаем

$$\|W^\tau(\tau)\| \leq C \int_{\frac{\tau}{2}}^{\tau} \gamma(\eta) d\eta + e^{-d\tau} \|W_0\|.$$

На первом целом шаге нетрудно получить следующие оценки:

$$\|W^\tau(t)\| \leq \|W(\tau)\| \leq C \int_{\frac{\tau}{2}}^{\tau} \gamma(\eta) d\eta + e^{-d\tau} \|W_0\|, \quad \tau < t \leq \frac{3\tau}{2},$$

$$\|W^\tau(t)\| \leq C \int_{\frac{3\tau}{2}}^t \gamma(\eta) d\eta + e^{-2d(t-\frac{3\tau}{2})} \left( C \int_{\frac{\tau}{2}}^{\tau} \gamma(\eta) d\eta + e^{-d\tau} \|W_0\| \right), \quad \frac{3\tau}{2} < t \leq 2\tau.$$

Положив в последнем неравенстве  $t = 2\tau$ , получим

$$\|W^\tau(2\tau)\| \leq C \int_{\frac{3\tau}{2}}^{2\tau} \gamma(\eta) d\eta + C e^{-d\tau} \int_{\frac{\tau}{2}}^{\tau} \gamma(\eta) d\eta + e^{-2d\tau} \|W_0\|.$$

Продолжая рассуждения, нетрудно убедиться, что на втором дробном шаге  $m$ -го целого шага ( $m = 0, 1, 2, \dots, N-1$ ) выполнено неравенство:

$$\|W^\tau(t)\| \leq C \int_{(m+\frac{1}{2})\tau}^t \gamma(\eta) d\eta + e^{-d(t-(m+\frac{1}{2})\tau)} \left( \phi_{m-1} + \phi_{m-2}e^{-d\tau} + \phi_{m-3}e^{-2d\tau} + \dots \right. \\ \left. \dots + \phi_1e^{-(m-2)d\tau} + \phi_0e^{-(m-1)d\tau} + e^{-nd\tau} \|W_0\| \right), \quad (m+\frac{1}{2})\tau < t \leq (m+1)\tau. \quad (27)$$

Здесь  $\phi_m = C \int_{(m+\frac{1}{2})\tau}^{(m+1)\tau} \gamma(\eta) d\eta.$

Усилив (27), получим, что для  $t \in ((m+\frac{1}{2})\tau, (m+1)\tau]$  выполнено неравенство

$$\|W^\tau(t)\| \leq \phi_m + \phi_{m-1} + \phi_{m-2}e^{-d\tau} + \phi_{m-3}e^{-2d\tau} + \dots \\ \dots + \phi_1e^{-(m-2)d\tau} + \phi_0e^{-(m-1)d\tau} + e^{-nd\tau} \|W_0\|. \quad (28)$$

Применяя теорему о среднем и учитывая (25), можно показать, что для  $\phi_m$  справедлива оценка

$$\phi_m \leq \frac{\tau}{1 + (m\tau)^p}.$$

Перепишем (28) с учетом полученной оценки, выделяя первые  $[\frac{m}{2}]$  членов суммы. Здесь  $[\frac{m}{2}]$  - целая часть от деления  $m$  на 2:

$$\begin{aligned} \|W^\tau(t)\| \leq & \tau \left( \frac{1}{1 + (m\tau)^p} + \frac{1}{1 + ((m-1)\tau)^p} + \dots + \frac{e^{-d([\frac{m}{2}]-1)\tau}}{1 + ((m - [\frac{m}{2}])\tau)^p} + \right. \\ & \left. + \frac{e^{-d[\frac{m}{2}]\tau}}{1 + ((m - [\frac{m}{2}] - 1)\tau)^p} + \dots + \frac{e^{-d(m-2)\tau}}{1 + \tau^p} + e^{-d(m-1)\tau} \right) + e^{-dn\tau} \|W_0^\tau\| \leq \\ & \leq \frac{\tau([\frac{m}{2}] + 1)}{1 + ((m - [\frac{m}{2}])\tau)^p} + \tau[\frac{m}{2}]e^{-d[\frac{m}{2}]\tau} + e^{-dn\tau} \|W_0^\tau\|. \quad (29) \end{aligned}$$

Нетрудно видеть, что на втором дробном шаге  $N$ -го шага, т.е. для  $t \in (T - \frac{\tau}{2}, T]$ , выполнено неравенство

$$\|W^\tau\| \leq \frac{\frac{T}{2} + \tau}{1 + (\frac{T}{2} - \tau)^p} + \frac{T}{2}e^{-d(\frac{T}{2} - \tau)} + e^{-d(T - \tau)} \|W_0^\tau\|. \quad (30)$$

Нетрудно показать, что выражение, стоящее справа, стремится к нулю при  $T \rightarrow +\infty$ , откуда следует, что  $W^\tau(T) \rightarrow 0$  при  $T \rightarrow +\infty$ .

Так как при любом фиксированном  $T > 0$  имеет место [1] равномерная по  $\tau$  сходимость последовательности решений  $w^{\tau_k} = (w^{1,\tau_k}, w^{2,\tau_k})$  задачи (9) – (11) к решению  $w = (w^1, w^2)$  задачи (4) – (5) вместе со всеми производными по  $x$  до второго порядка включительно, то

$$W(T) \xrightarrow{T \rightarrow +\infty} 0. \quad (31)$$

Так как функции  $u^1(t, x, z)$ ,  $u^2(t, x, z)$ ,  $g^1(t, x)$ ,  $g^2(t, x)$ , являющиеся решением задачи (1)–(3), связаны с решением  $w$  задачи (4)– (5) формулами (8), то из (31) получаем утверждение леммы.

## Список литературы

- [1] СОРОКИН Р.В. *Об однозначной разрешимости одной обратной задачи для системы составного типа в многомерном случае* / Р.В.Сорокин, Т.Н.Шипина //Вычислительные технологии. – 2004. – Т.9. – Вып. 3. – С. 59-68.
- [2] СОРОКИН Р.В. *О разрешимости одной обратной задачи для системы составного типа* / Р.В.Сорокин, Т.Н.Шипина // Вычислительные технологии. – 2003. – Т.8. – Вып. 3. – С. 139-146.
- [3] БЕЛОВ Ю.Я. *Метод слабой аппроксимации* / Ю.Я.Белов, С.А.Кантор / Краснояр. гос. ун-т. – Красноярск, 1999.

## ON THE STABILIZATION OF THE SOLUTION OF ONE INVERSE PROBLEM FOR A SYSTEM OF MIXED TYPE

**R.V.Sorokin**

*In the paper it is considered the questions of stabilization of solution of inverse problem of determination of source function for system of mixed type in multidimensional case. The analogical problem in one-dimensional case was investigated in the paper [2].*