СПЕЦИАЛЬНЫЕ ФУНКЦИИ

УДК 517.581

КОМБИНАТОРНЫЕ СВОЙСТВА ОТНОШЕНИЯ Г-ФУНКЦИИ

В.А. Степаненко*

Выводятся некоторые комбинаторные свойства отношения Г-функции, используя различные представления решений тринома.

В работе выводится соотношение

$$\frac{\Gamma(\frac{1+m_1k}{m})}{\Gamma(\frac{1-m_1'k}{m})}=\frac{1-m_1'k}{m}\sum_{k-1=l_2+\ldots+(k-1)l_k}\frac{(-1)^{k-1+l_2+\ldots+l_k}}{m^{k-1+l_2+\ldots+l_k}}\times$$

$$\times\frac{(k-1+l_2+\ldots+l_k)!}{l_2!\ldots l_k!}\left(\frac{(m_1)_2^-}{2!}\right)^{l_2}\ldots\left(\frac{(m_1)_k^-}{k!}\right)^{l_k}, \tag{1}$$

где $k>0$, $m>m_1$, $m_1'=m-m_1$, $(m_1)_r^-=(m_1)_r-(-m_1')_r$, а $(m_1)_r=m_1(m_1+1)\ldots(m_1+(r-1))$ и $(-m_1')_r=(-1)^r m_1'(m_1'-1)\ldots(m_1'-(r-1))$ — хорошо известные символы Похгаммера (см. [1]).

Конечная сумма в правой части формулы (1) берется по разбиениям числа $k-1$, наиболее часто встречающимся в различных задачах комбинаторики (см. [2], [3], [4]).

Доказательство соотношения (1).

Рассмотрим алгебраическое уравнение ("трином")

$$y^m+xy^{m_1}-1=0, \tag{2}$$

где $m>m_1$ — натуральные числа. Главное решение уравнения (2) (то есть то, которое равно 1 при $x=0$) по формуле Меллина (см. [5]) выглядит так:

$$y=1+\frac{1}{m}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!}\frac{\Gamma(\frac{1+m_1k}{m})}{\Gamma(\frac{m+1-m_1'k}{m})}x^k\,. \tag{3}$$

Выразим из (2) коэффициенты x через y: $x=\frac{1}{y^{m_1}}-y^{m_1'}$, произведем замену $y=w+1$, получим

$$x=\frac{1}{(1+w)^{m_1}}-(1+w)^{m_1'}. \tag{4}$$

Пользуясь разложениями прогрессии

$$\frac{1}{(1+w)^{m_1}}=1-m_1w+\frac{(m_1)_2}{2!}w^2-\frac{(m_1)_3}{3!}w^3+\frac{(m_1)_4}{4!}w^4-\ldots$$

и бинома

$$(1+w)^{m_1'}=1+m_1'w+\frac{(-1)^2(-m_1')_2}{2!}w^2+\frac{(-1)^3(-m_1')_3}{3!}w^3+\frac{(-1)^4(-m_1')_4}{4!}w^4+\ldots,$$

из (4) получаем представление x в виде ряда Маклорена по степеням w:

$$x=-mw-\frac{(-1)^2(-m_1')_2+(-1)^1(m_1)_2}{2!}w^2-\frac{(-1)^3(-m_1')_3+(-1)^2(m_1)_3}{3!}w^3-\ldots\quad. \tag{5}$$

Коэффициенты разложения таковы:

$$a_1=-m,\ a_r=\frac{(-1)^r(m_1)_r-(-1)^r(-m_1')_r}{r!}=\frac{(-1)^r}{r!}((m_1)_r-(-m_1')_r),\quad (r\geqslant 2).$$

Назовем *комбинированным символом Похгаммера* разность вида $(m_1)_r - (-m_1')_r$ и обозначим её $(m_1)_r^-$, тогда имеем:

$$a_1 = -m,\, a_r = \frac{(-1)^r}{r!}(m_1)_r^- . \tag{6}$$

Обратим ряд (5) по формуле Сильвестра (см. [6]), получим обратный ряд:

$$w = \sum_{k=1}^{\infty} c_k x^k, \tag{7}$$

$$c_k = \frac{(-1)^k}{k! m^k} \sum_{k-1=l_2+\ldots+(k-1)l_k} \frac{(-1)^{k-1+l_2+\ldots+l_k}}{m^{l_2+\ldots+l_k}} \frac{(k-1+l_2+\ldots+l_k)!}{l_2!\ldots l_k!} \left(\frac{(m_1)_2^-}{2!}\right)^{l_2} \ldots \left(\frac{(m_1)_k^-}{k!}\right)^{l_k} . \tag{8}$$

Вспоминая, что $w = y+1$ и сравнивая коэффициенты при x^k в (3) и (7), получаем:

$$\frac{(-1)^k}{mk!} \frac{\Gamma(\frac{1+m_1 k}{m})}{\Gamma(\frac{m+1-m_1' k}{m})} = \frac{(-1)^k}{k! m^k} \sum_{k-1=l_2+\ldots+(k-1)l_k} \frac{(-1)^{k-1+l_2+\ldots+l_k}}{m^{l_2+\ldots+l_k}} \frac{(k-1+l_2+\ldots+l_k)!}{l_2!\ldots l_k!} \times$$

$$\times \left(\frac{(m_1)_2^-}{2!}\right)^{l_2} \ldots \left(\frac{(m_1)_k^-}{k!}\right)^{l_k} . \tag{9}$$

Заменяя $\Gamma(\frac{m+1-m_1' k}{m})$ на $\frac{1-m_1' k}{m}\Gamma(\frac{1-m_1' k}{m})$ и сокращая обе части (9) $\frac{(-1)^k}{k!}$, получаем (1).

Если в (1) взять $m = 2$, $m_1 = 1$ (тогда $m_1' = 1$), то выражение $\frac{\Gamma(\frac{1+k}{2})}{\Gamma(\frac{1-k}{2})}$ встречается в соотношениях между функциями Лежандра $P_0^k(x)$ и $Q_0^k(x)$, являющихся решениями уравнений Лежандра

$$(1-z^2)\frac{d^2 w}{dz^2} - 2z\frac{dw}{dz} + (\nu(\nu+1) - k^2(1-z^2)^{-1})w = 0, \tag{10}$$

где z, ν, k могут принимать любые значения (см. [7]). Возьмем $\nu = 0$, тогда имеет место формула

$$(1-z^2)\left(P_0^k(z)\frac{d}{dz}Q_0^k(z) - Q_0^k(z)\frac{d}{dz}P_0^k(z)\right) = 2^{2k}\frac{\Gamma(1+\frac{k}{2})}{\Gamma(1-\frac{k}{2})}\frac{\Gamma(\frac{1+k}{2})}{\Gamma(\frac{1-k}{2})},\ \text{(см. [7], стр. 146)}. \tag{11}$$

Так как

$$\Gamma\left(1-\frac{k}{2}\right) = \frac{\pi}{\sin\frac{\pi k}{2}\Gamma(\frac{k}{2})},$$

а $\Gamma\left(1+\frac{k}{2}\right) = \frac{k}{2}\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)$, то правая часть (11) равна

$$2^{2k}\frac{k}{2\pi}\sin\frac{\pi k}{2}\left(\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)\right)^2 \frac{\Gamma(\frac{1+k}{2})}{\Gamma(\frac{1-k}{2})}. \tag{12}$$

Список литературы

[1] Прудников А.П. *Интегралы и ряды* /А.П.Прудников, Ю.А.Брычков, О.И.Маричев. – М.: Наука, 1981. – 798 с.

[2] Кнут Д. *Искусство программирования для ЭВМ* / Д.Кнут. – Т.3. – М.: Мир, 1978. – 844 с.

[3] Эндрюс Г. *Теория разбиений* / Г. Эндрюс. – М.: Наука, 1982. – 844 с.

[4] Риордан Дж. *Введение в комбинаторный анализ* / Дж. Риордан. – М.: Иностр. лит., 1963. – 287 с.

[5] Mellin H.J. *Resolution de l'equation algebrique general a l'aide de la fonction*/ H.J.Mellin // S.C.R. Acad. Sc. – 1921. – T. 172. – P. 658-661.

[6] Sylvester I.I. *Note on Burman's law for the inversion of the independent variable* / I.I.Sylvester // Philos. Mag. – 1854. – V. 8. – P. 535–540.

[7] Бейтмен Г. *Высшие трансцендентные функции* / Г.Бейтмен, А.Эрдейи. – Т. 1. – М.: Наука, 1965. – 294 с.

COMBINATORIAL RELATIONS OF FRACTION FOR Γ FUNCTION

V.A.Stepanenko

It is proved some combinatorial relations of fraction for Γ *function using the different representations for solutions of trinome.*