УДК 515.142.324

О ДВУМЕРНЫХ ПРОСТРАНСТВАХ С ПРЕДПИСАННЫМИ ГРУППАМИ ГОМОЛОГИЙ[1]

Р.В.Ульверт*

Для любой счетной абелевой группы G, на основе ее представления в виде объединения возрастающей последовательности конечно порожденных подгрупп, строится двумерное (одномерное, если G — свободная абелева группа) клеточное пространство с первой группой гомологий, изоморфной G.

Для любой группы G известен способ построения клеточного пространства X размерности два (размерности один, если группа свободна), фундаментальная группа $\pi_1(X)$ которого изоморфна G. Построение осуществляется следующим образом ([1], следствие 2.2, с.231). В G выбираются система образующих $\{g_\alpha\}$ и система соотношений $\{r_\beta\}$. Группа G есть фактор-группа свободной группы F, порожденной множеством $\{g_\alpha\}$ ([2], с.117). Для букета окружностей $X^1 = \bigvee_\alpha S^1$ (т.е. топологической суммы окружностей S^1_α с отмеченными точками O_α, в которой отождествлены все отмеченные точки: $O_\alpha = O$) будем иметь $\pi_1(X^1) \cong F$. Остается «заклеить» 2-клетками все петли в X^1, соответствующие соотношениям в группе G.

В частности, для любой абелевой группы A, в силу существования эпиморфизма $\pi_1(X) \to H_1(X)$ с ядром $[\pi_1(X), \pi_1(X)]$ (гомоморфизм Гуревича [3], с.119–120), пространство X, построенное по описанному выше способу, дает пример пространства с первой гомологической группой, изоморфной A.

Если абелева группа A не более чем счетна, то, как мы покажем в данной работе, процедуру построения пространства X с $H_1(X) \cong A$ можно уточнить. А именно, X будет искаться в виде предела возрастающей последовательности вложенных пространств, состоящих из конечного числа клеток размерности ≤ 2. Отметим, что эта же идея лежит в основе построения некоторых пространств более высокой размерности с предписанными одномерными гомологиями: для любой счетной абелевой группы A без кручения можно построить узел N с $H_1(\mathbb{R}^3 \setminus N) \cong A$ (Понтрягин [4]), а также область голоморфности D в $\mathbb{C}^n$, $n > 1$, с $H_1(D) \cong A$ (Штейн [5]; Рамшпотт, [6]). Мы не будем ограничивать себя, как это было в [4]–[6], условием отсутствия в группе элементов конечного порядка.

Для начала исследуем случай, когда A — конечно порожденная абелева группа. Любая такая группа разлагается в прямую сумму циклических групп (см., например, [2], с.132):

$$A = \bigoplus_{i=1}^{s} \langle g_i \rangle. \tag{1}$$

Следующее предложение (см. [3], теорема Борсука на с.43, теорема 4 на с.107) позволит построить пространство X с $H_1(X) \cong A$ в виде букета пространств X_i с $H_1(X_i) \cong \langle g_i \rangle$.

Предложение 1. *Если $(X_\alpha; O_\alpha)$, $\alpha \in \Lambda$, — клеточные пространства с отмеченными 0-клетками O_α, то*

$$H_1(\bigvee_{\alpha\in\Lambda} X_\alpha) = \bigoplus_{\alpha\in\Lambda} H_1(X_\alpha).$$

Если $\langle g_i \rangle$ — бесконечная циклическая группа, то положим $X_i = (S^1_i; O_i)$. Пусть a_i — цикл, соответствующий обходу окружности S^1_i против часовой стрелки, начатому из точки O_i. Тогда a_i — образующая бесконечной циклической группы $H_1(X_i)$. Будем писать $X_i = (a_i; O_i)_1$ (нижний индекс подчеркивает размерность пространства X_i).

Опишем случай, когда $\langle g_i \rangle$ — циклическая группа конечного порядка.

Воспользуемся стандартными обозначениями для факторпространств многоугольников с попарно отождествленными сторонами (см., например, §37 в [7]). Обозначим через

$$(a_1^{\varepsilon_1} a_2^{\varepsilon_2} \dots a_n^{\varepsilon_n}; O)$$

[1]Работа выполнена при поддержке гранта Президента РФ для ведущих научных школ НШ-1212.2003.1.

фактор-пространство многоугольника с диаграммой склейки сторон

$$a_1^{\varepsilon_1} a_2^{\varepsilon_2} \dots a_n^{\varepsilon_n}, \quad \varepsilon_i \in \{-1, 1\}, \tag{2}$$

и отождествленными вершинами O (O — отмеченная точка). Например, для пространств M_p сферы с p ручками (связная сумма p торов) и сферы N_q с q листами Мебиуса (связная сумма q проективных плоскостей) будем иметь

$$M_p = (a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} a_2 b_2 a_2^{-1} b_2^{-1} \dots a_p b_p a_p^{-1} b_p^{-1}; O), \quad N_q = (a_1 a_1 a_2 a_2 \dots a_q a_q; O).$$

В диаграмме (2) последовательности вида $\underbrace{aa \dots a}_{n}$ будем сокращенно обозначать через na. Например, $N_q = (2a_1 2a_2 \dots 2a_q; O)$. Вместо a^{-1} будем писать $(-a)$.

Теорема 1. *Если $A = \langle g \rangle$ — циклическая группа конечного порядка $n > 1$, то $H_1((na; O)) \cong A$, при этом $H_1((na; O))$ порождается циклом a.*

При $n = 2$ утверждение теоремы представляет известный факт о гомологиях проективной плоскости. Доказательство для $n > 2$ в точности повторяет соответствующее доказательство для проективной плоскости (см. [8]).

По аналогии с компактными неориентируемыми поверхностями N_q, для которых (см. §38 в [7])

$$H_1(N_q) \cong \mathbb{Z}^{q-1} \oplus \mathbb{Z}_2,$$

естественно рассматривать связные суммы q пространств $(na; O)$, $n > 2$, для которых будет

$$H_1((na_1 na_2 \dots na_q; O)) = \bigoplus_{i=1}^{q-1} \langle a_i \rangle \oplus \langle a_1 + a_2 + \dots + a_q \rangle \cong \mathbb{Z}^{q-1} \oplus \mathbb{Z}_n.$$

Теперь можем положить для конечных циклических слагаемых $\langle g_i \rangle$ разложения (1) $X_i = (|g_i| a_i; O_i)$ и резюмировать наши рассуждения в виде следующего утверждения.

Теорема 2. *Пусть $A = \bigoplus_{i=1}^{s} \langle g_i \rangle$ — конечно порожденная абелева группа. Тогда для пространства*

$$X = \bigvee_{i=1}^{s} X_i, \quad X_i = \begin{cases} (a_i; O_i)_1, & \text{если } |g_i| = \infty, \\ (|g_i| a_i; O_i), & \text{если } |g_i| < \infty, \end{cases}$$

будем иметь

$$A \cong H_1(X) = \bigoplus_{i=1}^{s} \langle a_i \rangle.$$

Изоморфизм $A \cong H_1(X)$ сопоставляет элементу g_i цикл a_i.

Пусть теперь A — произвольная счетно порожденная абелева группа. Нетрудно видеть, что в этом случае A может быть представлена в виде объединения возрастающей последовательности конечно порожденных подгрупп: если $A = \langle h_1, h_2, \dots, h_n, \dots \rangle$, то для подгрупп $A^n = \langle h_1, h_2, \dots, h_n \rangle$ будем иметь (см.[2], с.45)

$$A^n \subseteq A^{n+1},\ n = 1, 2, \dots, \quad A = \bigcup A^n.$$

Любая бесконечная подпоследовательность последовательности групп A^n также будет давать в объединении группу A. Вложения подгрупп можно считать строгими.

Опишем конструкцию пространства X с $H_1(X) \cong A$.

Теорема 3. *Пусть A — счетно порожденная абелева группа, представленная в виде объединения возрастающей последовательности конечно порожденных подгрупп A^n:*

$$A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A^n, \quad A^1 \subset A^2 \subset \dots \subset A^n \subset A^{n+1} \subset \dots .$$

Пусть каждая из подгрупп A^n разложена в прямую сумму циклических подгрупп

$$A^n = \bigoplus_{i=1}^{s_n} \langle g_{ni} \rangle,$$

и вложение $A^n \subset A^{n+1}$ осуществляется с помощью соотношений

$$g_{ni} = \sum_{j=1}^{s_{n+1}} \xi_{ij}^{n+1} g_{n+1,j},\ i = 1, 2, \dots, s_n. \tag{3}$$

Тогда для возрастающей последовательности пространств

$$X^1 \subset X^2 \subset \dots \subset X^n \subset X^{n+1} \subset \dots,$$

рекурсивно построенных по элементам g_{ni} в виде

$$X^1 = \bigvee_{i=1}^{s_1} X_i^1, \tag{4}$$

$$X^{n+1} = X^n \cup \bigvee_{i=1}^{s_{n+1}} X_i^{n+1} \cup \bigvee_{i=1}^{s_n} (-a_{ni}\xi_{i1}^{n+1} a_{n+1,1} \xi_{i2}^{n+1} a_{n+1,2} \dots \xi_{is_{n+1}}^{n+1} a_{n+1,s_{n+1}}; O_i), \tag{5}$$

где

$$X_i^n = \begin{cases} (a_{ni}; O_i)_1, & \text{\textit{если} } |g_{ni}| = \infty, \\ (|g_{ni}| a_{ni}; O_i), & \text{\textit{если} } |g_{ni}| < \infty, \end{cases} \tag{6}$$

будем иметь

$$H_1(X^n) \cong A^n, \quad H_1(\bigcup X^n) \cong A.$$

Доказательство. Вложение $X^n \subset X^{n+1}$ понимается как клеточное отображение вложения клеточного подпространства X^n в клеточное пространство X^{n+1}. Пространство $X = \bigcup X^n$ представляет из себя бесконечное связное клеточное пространство с единственной 0-клеткой O. Вложения $X^n \subset X^{n+1}$ и $X^n \subset X$ индуцируют вложения соответствующих алгебраических комплексов (сингулярных или клеточных):

$$\mathcal{K}_*^n \subset \mathcal{K}_*^{n+1}, \quad \mathcal{K}_*^n \subset \mathcal{K}_*.$$

При этом $\mathcal{K}_* = \bigcup \mathcal{K}_*^n$.

Объединение $\bigcup \mathcal{K}_*^n$ можно трактовать (см. [9]) как предел прямого спектра комплексов $\mathcal{K}_*^n$ и соответствующих отображений вложения: $\mathcal{K}_* = \lim \mathcal{K}_*^n$. Поскольку $H_1(\lim \mathcal{K}_*^n) = \lim H_1(\mathcal{K}_*^n)$ ([9], п.5.20 на с.340), то

$$H_1(X) = H_1(\mathcal{K}_*) = H_1(\lim \mathcal{K}_*^n) = \lim H_1(\mathcal{K}_*^n) = \lim H_1(X^n).$$

Так как группа A есть предел прямого спектра групп A^n и их вложений: $A = \lim A^n$, то для доказательства теоремы достаточно показать, что прямые спектры групп A^n с отображениями вложения

$$i_{nm} : A^n \to A^m,\ n \geq m,$$

и групп $H_1(X^n)$ с отображениями вложения

$$i'_{nm} : H_1(X^n) \to H_1(X^m),\ n \geq m,$$

естественно эквивалентны.

Установим изоморфизм групп A^n и $H_1(X^n)$. Для $n = 1$ изоморфизм $\varphi_1 : A^1 \to H_1(X^1)$ существует по теореме 2. При этом $\varphi_1(g_{1i}) = a_{1i}$. Пусть изоморфизм $\varphi_n : A^n \to H_1(X^n)$, такой, что $\varphi_n(g_{ni}) = a_{ni}$, уже построен. Группу A^{n+1} можно представить как абелеву группу, порожденную элементами g_{ni}, $g_{n+1,i}$ с соотношениями на порядки этих элементов и соотношениями (3). В свою очередь, группа $H_1(X^{n+1})$ порождена циклами a_{ni}, $a_{n+1,i}$, связанными, в соответствии с (4)–(6), соотношениями

$$a_{ni} \sim \sum_{j=1}^{s_{n+1}} \xi_{ij}^{n+1} a_{n+1,j},$$

и соотношениями на порядки элементов

$$|g_{ni}| a_{ni} \sim 0, \quad |g_{n+1,i}| a_{n+1,i} \sim 0.$$

Положим $\varphi_{n+1}(g_{n+1,i}) = a_{n+1,i}$, $\varphi_{n+1}(g_{ni}) = \varphi_n(g_{ni})$. При этом φ_{n+1} определяет взаимно-однозначное соответствие между образующими и определяющими соотношениями групп A^{n+1} и $H^1(X^{n+1})$. Это означает, что отображение φ_{n+1}, распространенное по линейности на всю группу A^{n+1}, определяет изоморфизм $\varphi_{n+1} : A^{n+1} \to H_1(X^{n+1})$. При этом φ_{n+1} есть продолжение изоморфизма φ_n. Последнее влечет равенство

$$\varphi_{n+1} \circ i_{n,n+1} = i'_{n,n+1} \circ \varphi_n. \tag{7}$$

Итак, имеется последовательность изоморфизмов $\varphi_n : A^n \to H_1(X^n)$, для которых выполняется (7). Это и означает, что $\{\varphi_n\}$ — естественная эквивалентность прямых спектров групп $\{A^n; i_{nm}\}$ и $\{H_1(X^n); i'_{nm}\}$.

`Список литературы

[1] Масси У. *Алгебраическая топология. Введение* / У.Масси. – Новокузнецк: ИО НФМИ, 2000.

[2] Курош А.Г. *Теория групп* / А.Г.Курош. – М.: Наука, 1967.

[3] Фоменко А.Т. *Курс гомотопической топологии* / А.Т.Фоменко, Д.Б.Фукс. – М.: Наука, 1989.

[4] Pontrjagin L. *Über den algebraischen inhalt topologischer Dualitätssätze* / L.Pontrjagin // Math. Ann. – 1931. – V. 105. – P.165–205.

[5] Stein K. *Analytische funktionen mehrerer komplexer veränderlichen zu vorgegebenen periodizitätsmoduln und das zweite Cousinsche problem* / K.Stein // Math. Ann. – 1951.– V.123. – P.201–222.

[6] Ramspott K.-J. *Existenz von holomorphiegebieten zu vorgegebener erster bettischer grupp* / K.-J.Ramspott // Math. Ann. – 1959. – V. 138. – P.342–355.

[7] Зейферт Г. *Топология* / Г.Зейферт, В.Трельфалль. – Ижевск: НИЦ "Регулярная и хаотическая динамика", 2001.

[8] Кузвесов К.В. *О группах гомологий некоторых поверхностей с самопересечением* / К.В.Кузвесов, Р.В.Ульверт // Вестник КрасГУ. – Красноярск, 2002. – Вып. 1 – С. 134–143.

[9] Дольд А. *Лекции по алгебраической топологии* / А.Дольд. – М.: Мир, 1976.

ABOUT TWO-DIMENSIONAL SPACES WITH GIVEN HOMOLOGY GROUPS

R.V.Ulvert

For every countable abelian group G, basing upon its presentation as the union of increasing sequence of finite generated subgroups, is built two-dimensional (or one-dimensional if G is a free abelian group) cellular space with the first homology group isomorphic to G.