

РЕШЕНИЕ ТРИНОМИАЛЬНЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ С ПОМОЩЬЮ ИНТЕГРАЛОВ ОТ ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ФУНКЦИЙ¹

Е.Н.Михалкин*

Получены интегральные формулы для решения алгебраического триномиального уравнения с интегрированием элементарных функций.

Известно решение Меллином (см. [1] или [2]) общего алгебраического уравнения вида

$$z^m + x_{m-1}z^{m-1} + \dots + x_1z - 1 = 0.$$

Оно представляется в виде интеграла по неограниченному множеству, к тому же под знаком интеграла стоят гамма-функции; интегральное же представление для решения уравнения с помощью логарифмического вычета предполагает интегрирование по замкнутому контуру, зависящему от параметров. В настоящей статье предлагаются интегральные формулы для решения алгебраического уравнения с интегрированием элементарных функций. В этой формуле область сходимости значительно шире, чем в интегральной формуле Меллина и в ряде Лагранжа для решения $z(x)$.

Основным результатом данной работы является следующая

Теорема 1. *Ветвь алгебраической функции $z(x)$ решения уравнения*

$$z^n + xz^p - 1 = 0, \quad (1)$$

с условием $z(0) = 1$, допускает представление в виде интеграла

$$z(x) = 1 + \frac{1}{2n\pi} \int_0^1 t^{\frac{1-n}{n}} (1-t)^{-\frac{1+n}{n}} \left[e^{\frac{(n-2)}{2n}\pi i} \ln(xt^{\frac{p}{n}}(1-t)^{\frac{n-p}{n}} - e^{\frac{p}{n}\pi i}) + \right. \\ \left. + e^{-\frac{(n-2)}{2n}\pi i} \ln(xt^{\frac{p}{n}}(1-t)^{\frac{n-p}{n}} - e^{-\frac{p}{n}\pi i}) + 2\pi \frac{p-n}{n} \sin \frac{n-2}{2n}\pi \right] dt.$$

Здесь ветви логарифма определены в односвязной области плоскости переменного x , из которой удалены лучи $x = \left\{ \tau e^{\pm \frac{p\pi i}{n}} : \tau \geq \frac{1}{\left(\frac{p}{n}\right)^{\frac{p}{n}} \left(\frac{n-p}{n}\right)^{\frac{n-p}{n}}} \right\}$ и выбираются условием $\ln(-e^{\pm \frac{p}{n}\pi i}) = \mp \frac{n-p}{n}\pi i$.

1 Доказательство теоремы 1

Для доказательства воспользуемся интегральным представлением Меллина-Барнса. Напомним, что, следуя Меллину (см. [1] или [2]), основное решение уравнения (1) можно записать в виде интеграла Меллина-Барнса:

$$z(x) = \frac{1}{2\pi i n} \int_{\operatorname{Re} u = \frac{1}{2}} \frac{\Gamma(u)\Gamma\left(\frac{1-pu}{n}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{n} + \frac{n-p}{n}u + 1\right)} x^{-u} du. \quad (2)$$

Вычисляя интеграл (2) как сумму вычетов, расположенных слева от контура интегрирования, получим следующее разложение в круге $|x| < \frac{1}{\left(\frac{p}{n}\right)^{\frac{p}{n}} \left(\frac{n-p}{n}\right)^{\frac{n-p}{n}}}$:

$$z(x) = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \Gamma\left(\frac{1+pk}{n}\right)}{k! \Gamma\left(\frac{n+1-k(n-p)}{n}\right)} x^k.$$

Далее, пользуясь формулой дополнения $\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin \pi z}$, перепишем рассматриваемый ряд:

$$z(x) = \frac{1}{\pi n} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \Gamma\left(\frac{1+pk}{n}\right) \Gamma\left(\frac{-1+k(n-p)}{n}\right) \sin \pi \left(\frac{n+1-k(n-p)}{n}\right)}{k!} x^k =$$

¹Работа поддержана грантом Минобразования РФ (С.-Петербург) Е 02-1-138.

* © Е.Н.Михалкин, Красноярский государственный университет, mikhalkin@bk.ru, 2005.

$$= 1 + \frac{1}{\pi n} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k \Gamma\left(\frac{1+pk}{n}\right) \Gamma\left(\frac{-1+k(n-p)}{n}\right) \sin \pi\left(\frac{n+1-k(n-p)}{n}\right)}{k!} x^k.$$

Теперь, применяя интегральное представление для бета-функции (см. [3, с. 25]), а также формулу, связывающую гамма-функцию с бета-функцией (см. [3, с. 26]), получим:

$$\begin{aligned} z(x) &= 1 + \frac{1}{\pi n} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k \Gamma(k) \sin \pi\left(\frac{n+1-k(n-p)}{n}\right)}{k!} x^k \int_0^1 t^{\frac{1-n+pk}{n}} (1-t)^{\frac{-1-n+k(n-p)}{n}} dt = \\ &= 1 + \frac{1}{\pi n} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k \sin \pi\left(\frac{n+1-k(n-p)}{n}\right)}{k} x^k \int_0^1 t^{\frac{1-n+pk}{n}} (1-t)^{\frac{-1-n+k(n-p)}{n}} dt = \\ &= 1 + \frac{1}{\pi n} \int_0^1 t^{\frac{1-n}{n}} (1-t)^{-\frac{1+n}{n}} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k \sin \pi\left(\frac{n+1-k(n-p)}{n}\right)}{k} \left[xt^{\frac{p}{n}}(1-t)^{\frac{n-p}{n}}\right]^k dt. \end{aligned}$$

Последнее выражение получено перестановкой знаков $\sum$ и $\int$ ввиду того, что ряд

$$h(x, t) := \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k \sin \pi\left(\frac{n+1-k(n-p)}{n}\right)}{k} \left[xt^{\frac{p}{n}}(1-t)^{\frac{n-p}{n}}\right]^k,$$

участвующий под интегралом в последнем выражении, равномерно сходится для $|x| < 1$.

Этот ряд фактически зависит от величины

$$y := xt^{\frac{p}{n}}(1-t)^{\frac{n-p}{n}},$$

поэтому целесообразно ввести ряд

$$H(y) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k \sin \pi\left(\frac{n+1-k(n-p)}{n}\right)}{k} y^k.$$

Тогда

$$H'(y) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \sin \pi\left(\frac{n+1-k(n-p)}{n}\right) y^{k-1}.$$

Группируя в последнем выражении по n членов, начиная с первого, получаем:

$$H'(y) = \frac{\sum_{k=1}^n (-1)^k \sin \pi\left(\frac{n+1-k(n-p)}{n}\right) y^{k-1}}{1 + (-1)^{p+1} y^n} = - \frac{\sum_{k=2}^{n+1} \sin \pi\left(\frac{kp-p+1}{n}\right) y^{k-2}}{1 + (-1)^{p+1} y^n}. \quad (3)$$

Итак, основное решение $z(x)$ уравнения (1) представлено в следующем виде:

$$z(x) = 1 + \frac{1}{\pi n} \int_0^1 t^{\frac{1-n}{n}} (1-t)^{-\frac{1+n}{n}} h(x, t) dt,$$

где $h(x, t)$ — значение при $y = xt^{\frac{p}{n}}(1-t)^{\frac{n-p}{n}}$ первообразной рациональной функции

$$\widetilde{H(y)} = - \frac{\sum_{k=2}^{n+1} \sin \pi\left(\frac{kp-p+1}{n}\right) y^{k-2}}{1 + (-1)^{p+1} y^n}.$$

Для нахождения функции $H(y)$ воспользуемся следующим свойством:

Утверждение 1. Многочлены, стоящие в числителе и знаменателе (3), имеют $n - 2$ общих корня; причем два оставшихся корня знаменателя $y_1 = e^{\pi i \frac{p}{n}}$, $y_2 = e^{-\pi i \frac{p}{n}}$ не являются корнями числителя.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем данное утверждение для случая, когда n, p нечетные. В этом случае каждый корень знаменателя имеет вид $y = e^{\pi i \frac{l}{n}}$, где l — нечетное число. Пусть $l \neq \pm p$. Для рассматриваемых y получим следующую цепочку равенств:

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \sum_{k=2}^{n+1} \sin \pi \left(\frac{kp-p+1}{n} \right) y^{k-2} &= \sum_{k=2}^{n+1} \sin \pi \left(\frac{kp-p+1}{n} \right) \cos \left(\frac{\pi lk}{n} - \frac{2\pi l}{n} \right) = \\ &= \sin \pi \left(\frac{p+1}{n} \right) + \frac{1}{2} \left[\sum_{k=3}^{n+1} \sin \pi \left(\frac{kp-p+1+lk-2l}{n} \right) - \sum_{k=3}^{n+1} \sin \pi \left(\frac{-kp+p-1+lk-2l}{n} \right) \right]. \end{aligned}$$

В последнем выражении часть слагаемых, стоящих под знаками $\sum$, сократится, а именно: под первым знаком $\sum$ останется $-\sin \pi \left(\frac{p+1}{n} \right)$ (значение, противоположное значению $\sin \pi \left(\frac{kp-p+1+lk-2l}{n} \right)$ при $k=2$), под вторым же знаком $\sum$ останется $\sin \pi \left(\frac{p+1}{n} \right)$ (значение, противоположное $\sin \pi \left(\frac{-kp+p-1+lk-2l}{n} \right)$ при $k=2$). Следовательно,

$$\operatorname{Re} \sum_{k=2}^{n+1} \sin \pi \left(\frac{kp-p+1}{n} \right) y^{k-2} = 0.$$

Аналогично,

$$\begin{aligned} 2\operatorname{Im} \sum_{k=3}^{n+1} \sin \pi \left(\frac{kp-p+1}{n} \right) y^{k-2} &= 2 \sum_{k=3}^{n+1} \sin \pi \left(\frac{kp-p+1}{n} \right) \sin \left(\frac{\pi lk}{n} - \frac{2\pi l}{n} \right) = \\ &= \sum_{k=3}^{n+1} \cos \pi \left(\frac{kp-p+1-lk+2l}{n} \right) - \sum_{k=3}^{n+1} \cos \pi \left(\frac{kp-p+1+lk-2l}{n} \right) = 0. \end{aligned}$$

(Здесь под каждым знаком $\sum$ остане́тся выражение $-\cos \pi \left(\frac{p+1}{n} \right)$). Справедливость утверждения для остальных n и p проверяется аналогично. Заметим, что оставшийся корень числителя (3) не является корнем знаменателя (так как он действительный).

Из доказанного утверждения следует:

$$H'(y) = \frac{A_1}{y - e^{\frac{p}{n}\pi i}} + \frac{A_2}{y - e^{-\frac{p}{n}\pi i}}. \quad (4)$$

Найдем константы A_1 и A_2 (опять же для случая, когда p и n нечетные). Из системы уравнений

$$\begin{cases} H'(0) = -\sin \pi \left(\frac{p+1}{n} \right) \\ H' \left(-\frac{\sin \pi \left(\frac{p+1}{n} \right)}{\sin \pi \left(\frac{np+1}{n} \right)} \right) = 0 \end{cases}$$

(последнее уравнение системы получается с использованием из формул Виета) получаем, что A_1 и A_2 — сопряженные числа, причём $\operatorname{Re} A_1 = \operatorname{Re} A_2 = \frac{1}{2} \sin \frac{\pi}{n}$. Далее, приведём (4) к общему знаменателю и умножим числитель и знаменатель на выражение:

$$\begin{aligned} (y - e^{\frac{\pi i}{n}})(y - e^{-\frac{\pi i}{n}})(y - e^{3\frac{\pi i}{n}})(y - e^{-3\frac{\pi i}{n}})(y - e^{5\frac{\pi i}{n}})(y - e^{-5\frac{\pi i}{n}}) \cdot \dots \cdot (y - e^{\frac{(p-2)\pi i}{n}})(y - e^{-\frac{(p-2)\pi i}{n}}) \times \\ \times (y - e^{\frac{(p+2)\pi i}{n}})(y - e^{-\frac{(p+2)\pi i}{n}}) \cdot \dots \cdot (y - e^{\frac{(n-2)\pi i}{n}})(y - e^{-\frac{(n-2)\pi i}{n}}). \end{aligned}$$

В числителе полученного выражения при y^{n-3} следующий коэффициент:

$$\begin{aligned} -A_1 \left(2 \cos \frac{\pi}{n} + 2 \cos \frac{3\pi}{n} + 2 \cos \frac{5\pi}{n} + \dots + 2 \cos \frac{(p-2)\pi}{n} + \cos \frac{p\pi}{n} + 2 \cos \frac{(p+2)\pi}{n} + \dots \right. \\ \left. \dots + 2 \cos \frac{(n-2)\pi}{n} - i \sin \frac{p\pi}{n} \right) - A_2 \left(2 \cos \frac{\pi}{n} + 2 \cos \frac{3\pi}{n} + 2 \cos \frac{5\pi}{n} + \dots + 2 \cos \frac{(p-2)\pi}{n} + \right. \\ \left. + \cos \frac{p\pi}{n} + 2 \cos \frac{(p+2)\pi}{n} + \dots + 2 \cos \frac{(n-2)\pi}{n} + i \sin \frac{p\pi}{n} \right). \end{aligned}$$

Разделив в (3) числитель и знаменатель на $y + 1$, приходим к следующему уравнению:

$$\begin{aligned} & A_1 \left(2 \cos \frac{\pi}{n} + 2 \cos \frac{3\pi}{n} + \dots + \cos \frac{p\pi}{n} + \dots + 2 \cos \frac{(n-2)\pi}{n} - i \sin \frac{p\pi}{n} \right) + \\ & + A_2 \left(2 \cos \frac{\pi}{n} + 2 \cos \frac{3\pi}{n} + \dots + \cos \frac{p\pi}{n} + \dots + 2 \cos \frac{(n-2)\pi}{n} + i \sin \frac{p\pi}{n} \right) = \\ & = \sin \pi \left(\frac{np - p + 1}{n} \right) - \sin \pi \left(\frac{np + 1}{n} \right). \end{aligned}$$

Решая уравнение, с учетом, что $A_1 = \frac{1}{2} \sin \frac{\pi}{n} + yi$, $A_2 = \bar{A}_1$, получаем: $y = \frac{1}{2} \cos \frac{\pi}{n}$.

Итак,

$$A_1 = \frac{1}{2} \left(\sin \frac{\pi}{n} + i \cos \frac{\pi}{n} \right) = \frac{1}{2} e^{i\pi \frac{n-2}{2n}}, \quad A_2 = \frac{1}{2} \left(\sin \frac{\pi}{n} - i \cos \frac{\pi}{n} \right) = \frac{1}{2} e^{-i\pi \frac{n-2}{2n}}.$$

Тогда

$$H'(y) = \frac{1}{2} \left(\frac{e^{\pi i \frac{n-2}{2n}}}{y - e^{\frac{p\pi i}{n}}} + \frac{e^{-\pi i \frac{n-2}{2n}}}{y - e^{-\frac{p\pi i}{n}}} \right), \quad (5)$$

следовательно,

$$H(y) = \frac{1}{2} \left(e^{\pi i \frac{n-2}{2n}} \ln(y - e^{\frac{p\pi i}{n}}) + e^{-\pi i \frac{n-2}{2n}} \ln(y - e^{-\frac{p\pi i}{n}}) + C \right). \quad (6)$$

Замечание 1. Равенство (5) получено для случая, когда n и p нечетные. Нетрудно проверить, используя аналогичные вычисления, что (5) справедливо для любых натуральных n и p .

Для выполнения первоначального условия $z(0) = 1$ выберем C так, чтобы выполнялось равенство $h(x, t) = 0$ в точке $x = 0$ или, что то же самое, $H(0) = 0$. Для этого запишем (6) (при $y = 0$) в виде

$$ie^{\pi i \frac{n-2}{2n}} \left(\frac{(p+n)\pi}{n} + 2\pi k_1 \right) + ie^{-\pi i \frac{n-2}{2n}} \left(\frac{(n-p)\pi}{n} + 2\pi k_2 \right) + C = 0,$$

примем $k_1 = -1$, $k_2 = 0$, что соответствует выбору ветвей логарифма условием

$$\ln \left(-e^{\pm \frac{p}{n} \pi i} \right) = \mp \frac{n-p}{n} \pi i. \quad (7)$$

Тогда

$$C = 2\pi \frac{p-n}{n} \sin \frac{n-2}{2n} \pi.$$

Итак, показано, что

$$\begin{aligned} h(x, t) = & \frac{1}{2} \left(e^{\frac{(n-2)\pi i}{n}} \ln \left(xt^{\frac{p}{n}} (1-t)^{\frac{n-p}{n}} - e^{\pi i \frac{p}{n}} \right) + e^{-\frac{(n-2)\pi i}{n}} \ln \left(xt^{\frac{p}{n}} (1-t)^{\frac{n-p}{n}} - e^{-\pi i \frac{p}{n}} \right) + \right. \\ & \left. + 2\pi \frac{p-n}{n} \sin \frac{n-2}{2n} \pi \right), \quad (8) \end{aligned}$$

где ветви логарифма выбираются условием (7). Логарифмические функции в (8) определены во всей плоскости переменного x , за исключением лучей $x = \left\{ \tau e^{\pm \frac{p\pi i}{n}} : \tau \geq \frac{1}{\left(\frac{p}{n}\right)^{\frac{p}{n}} \left(\frac{n-p}{n}\right)^{\frac{n-p}{n}}} \right\}$.

Список литературы

- [1] MELLIN H.J. *Résolution de l'équation algébrique générale à l'aide de la fonction gamma* / H.J.Mellin // C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I. Math. – 1921. – V.172. – P. 658–661.
- [2] СЕМУШЕВА А.Ю. *Продолжение исследований Меллина о решении алгебраических уравнений* / А.Ю. Семушева, А.К. Цих // Комплексный анализ и дифференциальные операторы. – Красноярск: КрасГУ. – 2000. – С. 134–146.
- [3] ЛЕБЕДЕВ Н.Н. *Специальные функции и их приложения* / Н.Н. Лебедев. – М.: Гос. изд-во физ.-мат. литературы, 1963.

**SOLUTION OF THE TRINOMIAL ALGEBRAIC EQUATIONS BY MEANS OF
INTEGRALS WITH ELEMENTARY FUNCTIONS**

E.N.Mikhalkin

Integral formula for the solution of algebraic equation with three terms is represented, using as integrand only the power and logarithmic functions.