О.В. Знаменская, Т.В. Костюк*

УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ ДЕЯТЕЛЬНОСТНОГО ВВЕДЕНИЯ ПОНЯТИЯ КРИВОЙ В КУРСЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ ГЕОМЕТРИИ ДЛЯ СТУДЕНТОВ ПЕДАГОГИЧЕСКИХ СПЕЦИАЛЬНОСТЕЙ

Многолетний опыт преподавания показывает, что при классической организации обучения студентов-педагогов математике у них не складывается обобщенного представления о ряде ключевых математических понятий, а также о том, какие мыслительные процедуры приводят к появлению математической идеализации. Причина этого – отсутствие в обучении математиков – педагогов деятельностной компоненты [1] математического образования, в рамках которой студенты – будущие преподаватели математики смогли бы получить самостоятельно опыт построения математического знания. Если студенты-математики имеют возможность выполнять математическое исследование на старших курсах при работе над курсовыми и дипломными работами, то студенты педагогических специальностей лишены и этой возможности. Более того, не просто усваивая готовое знание, а активно участвуя в его построении, студент может освоить саму форму научной деятельности, поскольку, как отмечает известный математик и методист Д. Пойа [2], в своем творчестве математик пользуется общими методами естественно-научного исследования, излагая в форме определений, доказательств и теорем (а это и есть готовое знание) лишь результаты своих исследований.

Перед преподавателем-предметником, поставившим перед собой такую образовательную цель – организацию деятельностного изучения студентами математических дисциплин, возникает две новые задачи. Первая задача – организовать учебную «квазиисследовательскую» деятельность студентов, дать им возможность самим повторить ее на своих товарищах. Учебным содержанием здесь являются средства построения математических объектов, процесс идеализации и формализации; средства движения в предмете (замещение, исследование, моделирование, проблематизация), выделение общих способов и методов решения задач, построение модели объекта и действий с ней и т.д. Затруднения, вызываемые собственной обучающей работой, вызывают реальную необходимость в логико-предметных и педагогических знаниях, обсуждениях. Отметим, что учебно-исследовательская деятельность студентов реализуема далеко не на любом предметном содержании. В рамках «готовой» системы сведений (что представляет собой содержание большинства математических дисциплин в вузе) нет места исследовательскому вопросу, поскольку развитая теория есть ответ на исследовательский вопрос, который, вместе с ходом исследования, остается за рамками изложения. Таким образом, возникает вторая, достаточно трудная задача – произвести логико-предметную реконструкцию с целью выделения логики построения понятия, развитой формой которого является данная теория, а начальной формой – некоторое поле интуитивных представлений об исследуемом объекте (предпонятие). Классический пример логико-предметной реконструкции теоретического понятия числа проделал В.В.Давыдов для организации обучения математики в начальной школе по системе Д.Б. Эльконина – В.В. Давыдова [1], см. также [3].

Нашей целью являлось реализовать деятельностный подход к математическому образованию студентов на материале курса «Дифференциальная геометрия». Для этого из всех понятий курса далеко не случайно выбрано понятие кривой, поскольку, как будет показано далее, именно его изучение позволяет задать деятельностную компоненту обучения, сделать студента соучастником построения теоретического и практического знания, организовать и усилить творческую деятельность студентов.

Одним из образовательных эффектов деятельностного введения понятия кривой является принятие студентами самой задачи логико-предметной реконструкции развития понятия и, как следствие, попытки выделить логику формирования понятий в других математических дисциплинах. Заметим, что опыт выделения логики построения математического знания очень важен для формирования исследовательской компетентности.

Обсудим образовательную ценность отдельных аспектов понятия кривой как объекта дифференциальной геометрии. Дифференциальная геометрия – разветвленная и глубокая область математики, значение которой со временем все более возрастает, начинается с теории кривых. Понятием кривой пользовался уже Евклид, однако потребовались века, чтобы дать этому понятию точное математическое определение. В общем курсе дифференциальной геометрии теория кривых проходится довольно бегло, поскольку студенты уже работали с кривыми в курсах анализа и аналитической геометрии. В то же время довольно много внимания уделяется понятиям поверхности и многообразия, наиболее трудным для уяснения студентами.

Однако теория кривых содержит в себе огромный образовательный потенциал, а именно, при ее изучении может быть реализован общий методологический подход к идеализации геометрических объектов, в том числе к определению основных объектов изучения в курсе дифференциальной геометрии (гладких поверхностей, многообразий). Ведь исторически именно в теории кривых впервые в дифференциальной геометрии даются точные

определения и понятия, вырабатывается геометрическая интуиция, которая затем развивается при изучении поверхностей и многообразий.

Наша задача – выстроить логику введения понятия кривой так, чтобы максимально реализовать образовательный потенциал, заложенный в теории кривых. В том числе ввести понятие кривой как пропедевтику понятия многообразия, что облегчило бы восприятие и усилило самостоятельность при изучении других разделов дифференциальной геометрии и, как следствие, сэкономило усилия и время на их освоение.

Несомненную ценность для математического образования студентов представляют следующие три аспекта понятия кривой: *понятие кривой как отображения, кривой как класса эквивалентных путей и, наконец, кривой как одномерного многообразия*. Поясним, в чем заключается эта ценность.

Основная проблема, которая решается при построении понятия кривой как объекта дифференциальной геометрии, – это создание такого аналитического описания, которое корректно определяло бы геометрические объекты, соответствующие нашим интуитивным представлениям о кривой линии. Таким образом методологическая (и значит общематематическая) ценность данного понятия состоит в том, что при построении общего определения кривой становятся явными все существенные трудности задачи описания геометрического объекта аналитическим языком.

Основной способ конструирования общего определения кривой, исторически берущий начало от Декарта, Жордана и Пеано [4], состоит в наложении ограничений на аналитическое описание, «отсекающих» соответствующие этим описаниям геометрические объекты, которые противоречат представлениям о кривой.

Основное средство при построении идеализации – примеры и контрпримеры, проясняющие существенные условия формулируемых определений. Заметим, что благодаря введению ограничений через рассмотрение примеров и контрпримеров становится возможным излагать понятие кривой как строящееся, развивающееся понятие, что позволяет организовать его изучение через исследование, т.е. инициировать деятельность самих студентов по составлению примеров и выяснению корректности определений.

Объективная трудность, с которой мы сталкиваемся при определении понятия кривой при помощи параметрического задания (кривой как отображения), – неоднозначность аналитического описания геометрических объектов. Преодоление этой трудности приводит к понятию кривой как класса эквивалентных путей, которая имеет как узко предметную, так и общематематическую ценность. Последняя состоит в том, что при определении кривой как класса эквивалентности мы реализуем общий подход к определению математических объектов, рефлексия этого факта вносит вклад в формирование математической грамотности студентов. Действительно, все математические объекты определяются с точностью до некоторого отношения эквивалентности, т.е. любой математический объект есть на самом деле класс в каком-то смысле тождественных объектов. Например, эквивалентность обыкновенных дробей задается основным свойством дроби (при умножении числителя и знаменателя дроби на натуральное число значение дроби не изменится). Также мы отождествляем алгебраические выражения, имеющие разную форму записи, если одно из них получается из другого при помощи тождественных преобразований. Ценность же этого аспекта в рамках курса «Дифференциальной геометрии» заключается в том, что при введении кривой как класса эквивалентности сразу становится ясно, почему свойства кривизны и кручения изучаются для случая натурально параметризованной кривой и, уже после этого, выводятся формулы для произвольной параметризации. Действительно, мы можем выбрать любой представитель из класса эквивалентных кривых, а для натурально параметризованных кривых теория наиболее прозрачна.

Другая объективная трудность, с которой мы сталкиваемся, связана с тем, что введенный нами способ аналитического задания кривой (глобально) не позволяет определять целый класс кривых типа окружности (гомеоморфных окружности). Эта трудность преодолевается за счет перехода от глобальной к локальной ситуации через развитие способа определения кривой.

Гладкие многообразия являются современными объектами изучения дифференциальной геометрии, однако для большинства студентов-педагогов это понятие представляется слишком абстрактным и достаточно трудным для усвоения. Введение гладких кривых как одномерных многообразий может служить пропедевтикой абстрактного понятия многообразия.

Достичь желаемых образовательных эффектов при его изучении студентами позволяет изложение понятия кривой в соответствии с описанной далее логикой.

Наша идея состоит в том, чтобы логически последовательно развернуть все три аспекта определения кривой. В логике введения понятия кривой пять этапов (блоков) и переходов, осуществляемых как внутри, так и между блоками. В каждом блоке обозначены проблемные переходы, т.е. ситуации, когда создаются такие условия, что определение становится некорректным и в результате возникает необходимость в его уточнении и видоизменении.

Опишем теперь подробнее содержание каждого блока и переходов.

Блок 1 «Предпонятие кривой». Сложившиеся у студентов при изучении курсов анализа и аналитической геометрии представления о кривых еще не образуют предпонятие, поэтому специально должно быть сформировано само поле интуитивных представлений о кривой, формализация которых позволила бы построить понятие кривой как объекта дифференциальной геометрии. Данный блок обеспечен пособием [7].

Блок 2 «Определение параметризованной кривой». Определение параметризованной кривой строится через уточнение первичного определения путем приведения контрпримеров. Первичное определение формализует сложившееся к настоящему моменту у студентов предпонятие кривой, которое оказывается неполным (например, не включающим непрерывность отображения). Неполнота определения обнаруживается через анализ контрпримеров. Возникает исследовательский вопрос: какие минимальные условия на отображение $r(t)$ нужно наложить, чтобы определяемое этим отображением множество точек плоскости было именно кривой линией?

Таким образом, основной способ конструирования определения гладкой параметризованной кривой – наложение условий на отображение. Действительно, если на отображение не накладывать никаких ограничений, могут получиться объекты, противоречащие нашим интуитивным представлениям о кривой линии.

Блок 3 «Определение элементарной кривой». Необходимость введения отношения эквивалентности на множестве параметризованных кривых возникает из-за того, что аналитическая модель кривой неоднозначно описывает геометрический объект. Возникает вопрос: как определить, при каких условиях два разных отображения задают одну и ту же кривую на плоскости?

Идея о функции замены параметра появляется у студентов в результате анализа случая двух параметрических заданий одной кривой, где связь между параметрами известна еще из школьной геометрии и потому легко поддается анализу. Обобщение этого примера завершает построение топологического определения элементарной кривой.

Блок 4 «Определение гладкой элементарной кривой». Необходимость дополнительного условия дифференцируемости диктуется методом исследования свойств кривых. Переход осуществляется от определения гладкой параметризованной кривой к определению кривой как класса гладких эквивалентных путей. Исследуется корректность последнего определения. Оно будет корректно, если условие дифференцируемости накладывается также на функцию замены параметра.

Блок 5 «Кривая как одномерное многообразие» содержит один переход. К понятию многообразия приводит невозможность задать глобально уравнениями от одного параметра уже такую простую кривую, как окружность. Поэтому для различных частей окружности приходится определять свои гомеоморфные отображения, согласованные между собой, т.е. переходить к локальному определению кривой. Формализуя пример с окружностью и аналогичный пример с эллипсом, мы приходим к способу задания кривой при помощи локальных координат, т.е. к определению одномерного многообразия.

Опишем методику деятельностного введения понятия кривой. Основной метод введения понятия кривой – его уточнение через приведение примеров и контрпримеров. Заметим, что способ определения понятия через контрпримеры принят в математической культуре [5]. Неоднократные попытки математиков дать определение кривой (определение Жордана) и привести контрпримеры к этому определению (кривая Пеано) свидетельствует о том, что именно таким образом развивалось понятие кривой и в истории математики [4].

Именно благодаря введению ограничений через рассмотрение примеров и контрпримеров становится возможным ввести понятие кривой как развивающееся понятие, что позволяет организовать его изучение через исследование, т.е. инициировать деятельность самих студентов по составлению примеров и выяснению корректности определений [6].

Основным методом изучения является усвоение нового содержания через анализ и оформление студентами своего опыта. Наиболее эффективно, если учебно-исследовательская (квазиисследовательская) задача вначале решается в коллективно-распределенной форме, а затем в малых учебных группах по 2-4 человека.

Методику оформления представлений можно разбить на два этапа. На первом этапе происходит работа с представлениями самих студентов по поводу рассматриваемого объекта. Представления выкладываются, систематизируются, строится схема, обобщающая полученные результаты. На втором этапе происходит столкновение обобщенных представлений студентов (возможно, объективно неверных) с культурными образцами (кривая Пеано, другие примеры), определение уточняется, дополняется или проблематизируется, фиксируются результаты. Заметим, что для подобной работы с представлениями необходима коммуникация, что диктует семинарскую, дискуссионную форму занятий.

Основными формами учебных занятий являются семинары и мастерские, а также, на заключительном этапе, самостоятельная работа студентов (проведение самостоятельного мини-исследования).

Наиболее подходящим является блочный принцип изучения, который с одной стороны, дает возможность более концентрированного введения содержания, с другой - позволяет более эффективно организовать самостоятельную работу.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Давыдов В.В. Учебная деятельность и моделирование / В.В. Давыдов, А.У. Варданян. – Ереван, 1981.
2. Пойа Д. Как решать задачу / Д. Пойа. – М.: Учпедгиз, 1959. – 126 с.

3. Розин В.М. Логико-семиотический анализ знаковых средств геометрии (к построению учебного предмета) / В.М. Розин // Педагогика и логика. - М.: Касталь, 1993.
4. Аминов Ю.А. Дифференциальная геометрия и топология кривых / Ю.А. Аминов. - М.: Гл. ред. физ.-мат. лит., 1987. - 159 с.
5. Лакатос И. Доказательства и опровержения (как доказывается теорема) / пер. с англ. И.Н. Веселовского. – М.: Наука, 1967.
6. Аронов А.М. Учебно-образовательное пространство в педагогике развития: математическое образование: Монография / А.М. Аронов, С.В. Ермаков, О.В. Знаменская; Красояр. гос. у-нт. - Красноярск, 2001. – 173 с.
7. Знаменская О.В. Плоские и пространственные кривые: учеб. пособие / О.В. Знаменская, Т.В. Костюк; Краснояр. гос. у-нт. – Красноярск, 2004. – 94 с.