А.М. Аронов, А.М. Скрипка*

О ПОНЯТИИ ГЕОМЕТРИЧЕСКОГО МЫШЛЕНИЯ (НА МАТЕРИАЛЕ ЭЛЕМЕНТАРНОЙ ГЕОМЕТРИИ)

Все, кто занимается проблемой преподавания геометрии в школе – авторы учебников и методических пособий, преподаватели, употребляют термин «геометрическое мышление». Однако они не определяют данный термин. В философском и математическом словарях этот термин отсутствует.

Задача данной работы – сконструировать модель геометрического мышления, состоящую из двух линий: линии рефлексии и линии понимания. Наш подход предполагает уровневую структуру данных линий.

Опишем линию рефлексии.

Анализ литературы показал, что термин «геометрическое мышление» употребляется в трех значениях:

- конструирование [1], [2];
- воображение, в котором «происходят сложения и разделения фигур» [3. С. 145];
- образное мышление, мотивирующее использовать наглядные опоры в решении задач [4].

По выделенным значениям можно заметить, что все авторы выделяют как компонент геометрического мышления оперирование образами (фигурами). «Геометрическое мышление есть пространственно-временное конструирование, а предмет геометрии - пространство и его отношения, временная динамика пространственных конструкций …. Деятельность геометра предстает как организация и переорганизация пространственных элементов во времени, а цель - изучение существующих здесь возможностей» [2. С. 67]. При рассмотрении геометрического мышления в значении «конструирование» оперирование образами определяет его. При рассмотрении геометрического мышления в значениях «воображение» и «образное мышление» делается упор на то, как происходит оперирование – мысленно или натурально.

Оперирование образами составляет первый уровень линии рефлексии геометрического мышления. Мы считаем важным конкретизировать этот уровень и выделить следующие действия по оперированию образами: 1) выделение частей данной фигуры; 2) конструирование новой фигуры из данных; 3) конструирование новой фигуры из фигур, которые предварительно требуется найти. На языке Прокла первое действие есть «разделение фигур», второе и третье – «сложение фигур».

Выделение частей данной фигуры означает, что части этой фигуры начинают рассматриваться как самостоятельные объекты, которые находятся друг с другом в определенном отношении, заданном исходной фигурой. Конструирование новой фигуры из данных означает, что даны некоторые фигуры и их надо воспринять как новую фигуру, если эти фигуры уже находятся в некотором соотношении, либо построить из них новую фигуру, если отношение между ними задано в словесной форме. Конструирование новой фигуры из неданных фигур подразумевает, что есть некоторое представление о новой фигуре. Это представление может быть оформлено в виде свойств, которыми должна обладать эта фигура. Однако исходные фигуры, из которых будет состоять новая фигура, не известны, то есть они пока не воспринимаются как те, из которых можно сконструировать нужную. В некоторых задачах исходные фигуры надо дополнительно вводить. Как правило, при решении геометрической задачи все три действия оперирования образами имеют место.

Упорядочивает действия оперирования образами, управляет ими логика. Во всех программах обучения геометрии указывается, что занятия геометрией способствуют развитию логического мышления. В то же время многие авторы, занимающиеся проблемой математического мышления и математической одаренности (В. Коммерел, Г. Томас, В. Хаскер, Т. Циген, А.Я. Хинчин и другие), указывают на то, что логика является компонентом математического мышления. Возникает вопрос: какова логическая основа геометрического мышления, в чем ее специфика, или логика геометрического мышления не отличается от логики математического мышления?

Никто из перечисленных авторов не выделяет специфики проявления логики в геометрической деятельности, геометрическом мышлении. По работам этих авторов можно сделать вывод, что логика геометрического мышления такая же, как логика математического мышления. Для нее характерны слежение в максимальной степени за правильностью течения мысли и гарантия от ошибок, представление всей совокупности имеющихся возможностей и учтение каждой из них [5. С. 20]. Разница между этими двумя логиками состоит лишь в том, на каком материале они присутствуют. В геометрии логика проявляется в действиях с образами, в математике вообще – в действиях с числами, множествами и т.д.

Между тем в рамках школьного обучения логическая основа геометрического мышления имеет собственную специфику. В геометрии учащиеся впервые встречаются с задачами на доказательство, необходимостью обосновывать каждое свое предположение или действие ссылкой на соответствующие факты. «Доказательство – это процесс, деятельность, в ходе которой логические ходы возникают, наделяются смыслом и актуализируются» [6. С. 139]. То есть в геометрических задачах логика носит содержательный характер.

При обучении арифметике и алгебре, других разделов школьной математики предлагаются типовые задачи, где каждый шаг решения определяется соответствующим алгоритмом. В решении таких задач имеет место формальная логика.

Итак, логика является следующим компонентом линии рефлексии геометрического мышления. Она дает представление о конечном результате оперирования образами и тем самым придает оперированию осмысленность, а также описывает способы оперирования в форме логического текста – оформленного решения задач.

Конкретизация уровня логики позволяет выделить следующие действия: 1) выделение элементарных логических связок; 2) конструирование из элементарных логических связок более сложных; 3) построение логических связок. Логическими связками мы называем зафиксированные отношения между объектами, заданными условием задачи или появившимися в процессе ее решения.

Элементарные логические связки («элементарные задачи» [7]) – это «во-первых, задачи, «решаемые с помощью одного действия», и, во-вторых, более сложные задачи, решение которых нам уже известно из имеющегося опыта решения задач» [7, с.183]. В школе элементарные логические связки называют шагами решения, шагами доказательства. Объединения элементарных логических связок представляют собой этапы решения задачи. Этапы решения могут быть сконструированы формально или по совершаемым на них действиям. Примером формальных этапов служат необходимость и достаточность при доказательстве критериев. Примером этапов, сконструированных по действиям, служат подзадачи, решение которых обеспечивает решение исходной задачи [7. С. 183].

Выделение элементарных логических связок и конструирование из них более сложных, то есть первые два действия на уровне логики обычно имеют место при работе с развернутым логическим текстом, представляющим результат какого-либо исследования. Развернутыми логическими текстами являются, например, доказательства, представленные в учебниках (см., например, [8]): они содержат «лишние» слова, не влияющие на строгость доказательства и предназначенные для удобного чтения и лучшего понимания текста учеником. В отличие от первых двух третье действие на уровне логики – построение логических связок – имеет место при самостоятельном решении задачи.

При анализе решения геометрической задачи происходит слежение за обоснованностью применения тех или иных способов оперирования образами. Это слежение не является функцией логики. Оно присуще следующему, последнему компоненту линии рефлексии геометрического мышления, который мы называем металогикой.

Металогическая работа заключается в исследовании способов оперирования образами. Здесь ищутся ответы на вопросы: при каких условиях способ работает (основания способа); почему этот способ работает и верен ли он (обоснование способа); когда предпочтительнее использовать именно этот способ (оценка способа). Выделение оснований, обоснование и оценка способа – это те действия, которые осуществляются на уровне металогики.

В геометрии основаниями способа являются аксиомы, которые явно или неявно в нем используются. В зависимости от способа в его основании могут лежать все аксиомы соответствующей теории или их часть.

Обоснованием способа служит метод геометрии (метод от противного, метод вспомогательной фигуры и др.), благодаря которому он получен. Иногда при решении одной геометрической задачи одновременно применяются разные методы. Тогда способ решения такой задачи обосновывается множеством всех используемых в решении методов. Существование методов геометрии, лежащих в основе способа решения задачи, подтверждает верность этого способа.

При оценке способа надо выяснить, чем этот способ лучше или хуже других. Наиболее распространенным критерием оценивания в математике является лаконизм, «стремление найти кратчайший путь, отсутствие «воды» [5. С. 21]. Другими критериями могут быть возможность обобщения способа, использование определенных теоретических фактов и др.

Выделенные компоненты линии рефлексии представляют собой уровни этой линии, где оперирование образами – наиболее низкий уровень, а металогика – наиболее высокий.

С точки зрения образования пребывание человека на каком-либо уровне линии рефлексии свидетельствует о наличии у него внепредметных способностей, соответствующих данному и предшествующим уровням. Так, для человека, находящегося на уровне оперирования образами, характерно умение разбирать и заново собирать предметы, изобретать новые предметы для собственных целей и др. Человек, находящийся на уровне логики, кроме перечисленных обладает способностями находить ошибки в действиях, выстраивать план действий, искать варианты решений, предвидеть их последствия и т.д. Человек, находящийся на уровне металогики, в дополнение к перечисленным способностям может выделять допущения, на которых основываются варианты решений, выделять основания своих или чужих действий, оценивать варианты решений и др.

Итак, в нашей модели линия рефлексии геометрического мышления имеет три компонента. Эти компоненты соответствуют трем главным объектам исследования истины, выделенным Б. Паскалем. «… Первый – открытие истины, когда ее ищут, второй – ее доказательство, когда ею обладают, и последний – выяснение ее отличия от заблуждения, когда она подвергается проверке… При проверке, согласуется ли доказательство данной истины с известными правилами доказательства, выясняется, точно ли она доказана» [9. С. 125].

Опишем линию понимания геометрического мышления.

Геометрическое мышление, как и любое другое, оперирует знаниями. Это оперирование происходит на трех уровнях: просто знание, понимание, применение (сравните с когнитивной частью таксономии Блума [10]).

Уровень знания предполагает наличие информации об исследуемом объекте, ее узнавание и возможность воспроизведения при необходимости. В процессе мышления этот уровень отвечает за актуализацию знаний. «… Без наличия каких-нибудь знаний никакая познавательная деятельность … невозможна» [7. С. 50]. На уровне понимания наличная информация об объекте анализируется и эффективно упорядочивается. «Понимание предполагает … выявление смысла познаваемого объекта» [11. С. 112]. В процессе мышления уровень понимания отвечает за выбор нужной информации из всей имеющейся. На уровне применения распознаются ситуации, в которых может быть применима данная информация. Здесь из имеющихся знаний формируются новые. В процессе мышления уровень применения отвечает за адекватное применение информации, выбранной на уровне понимания.

Уровни знания, понимания и применения образуют линию понимания.

В отличие от линии рефлексии, где действия выделялись из специфики каждого уровня, на линии понимания действия всех уровней одинаковы, единообразны. Конкретизация уровней линии понимания позволяет выделить три действия: совершенное, совершаемое и будущее.

Действие совершенное закончено и, в силу своей законченности, дано полностью. К совершенному действию можно вернуться, его можно воспроизвести или использовать как пример. Обычно в совершенном действии используется его результат. Действие совершаемое начато, но не закончено. В нем постоянно надо удерживать, что уже сделано и что сделать еще предстоит. Действие будущее пока не начато и дано только в воображении. Это действие является наиболее сложным, поскольку нужно предвидеть возможные трудности и контролировать действие в представлении о нем. Необходим опыт совершения действий, чтобы планировать будущие действия.

Вернемся к общей модели геометрического мышления. Уровни линии понимания присутствуют на каждом уровне линии рефлексии геометрического мышления, и в целом нашу модель геометрического мышления можно представить в виде следующей таблицы.

В представленной модели геометрической мышление не линейно, - оно имеет матричную форму. В образовании принято строить линейные модели мышления. Например, линейную структуру имеет модель геометрического мышления, предложенная П.-Х. ван Хиле [12]. В одномерных моделях уровни мышления определяют этапы его формирования. То есть мышление в своем развитии проходит все свои уровни. Но как проходит развитие мышления с нелинейной структурой, как мышление такого типа может быть сформировано в результате образования?

Формирование геометрического мышления, как и его развитие, начинается с пересечения «знание – оперирование образами». Данное пересечение образует первый этап формирования геометрического мышления. Здесь происходит знакомство с геометрическими фигурами и действиями с ними. Первый этап в нашей модели соответствует нулевому уровню в модели геометрического мышления, предложенной ван Хиле [12].

Второй этап формирования состоит из пересечений «знание – оперирование», «понимание – оперирование», «знание – логика», «понимание – логика». Для описания содержания этого этапа мы используем понятие Л.С. Выготского о зоне ближайшего развития и его представления, связанные с формированием высших психических функций. В нашем подходе второй этап начинается с пересечения «понимание – логика», которое является зоной ближайшего развития второго этапа. Далее второй этап может развиваться в двух направлениях: «с пониманием по линии рефлексии» и «с рефлексией по линии понимания». При этом происходит систематизация материала первого этапа и его переосмысление.

В нашей модели второй этап формирования геометрического мышления соответствует второму уровню в модели ван Хиле. Основным достижением этого этапа является установление взаимосвязи между геометрическими фактами.

На третьем этапе формирования осваиваются пересечения «применение – оперирование», «применение – логика», «знание – металогика», «понимание – металогика», «применение – металогика». Здесь же переосмысливается материал второго этапа. Третий этап начинается с пересечения «применение – металогика», которое составляет зону его ближайшего развития и далее может развиваться в разных направлениях по линии рефлексии и линии понимания.

Таблица 1

Модель геометрического мышления

	Оперирование образами	Логика	Металогика
Знание			
Понимание			
Применение			

В нашей модели третий этап формирования геометрического мышления соответствует четвертому уровню в модели ван Хиле. Основным достижением этого этапа является построение геометрических теорий.

Таким образом, наша модель формирования геометрического мышления состоит из трех этапов. Представим эти этапы по основным результатам, которые достигаются на них (рис. 1).

По нашим наблюдениям, большинство учащихся к окончанию школы находятся на втором этапе формирования геометрического мышления. Некоторые из них достигают зоны ближайшего развития третьего этапа. Однако завершения третьего этапа не достигает никто. Последнее наблюдение совпадает с замечанием А.А. Столяра, что построение геометрических теорий «не может осуществляться ни на одном этапе обучения геометрии в средней школе» [7, с.58]. Таким образом, средняя школа не может полностью сформировать у учащихся геометрическое мышление, и эту задачу принимают математические факультеты вузов.

Знакомство с геометрическими фигурами и действиями с ними → Установление взаимосвязи между геометрическими фактами → Построение геометрических теорий

Рис. 1

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Аронов А.М. Роль и функции задач на построение в формировании геометрического мышления школьников: метод. пособие / А.М. Аронов, Н.Б. Кабанова. – Краснояр. гос. у-нт. – Красноярск, 2004. – 21 с.
2. Кант И. Собр. соч.: в 8 т. / И. Кант. - М.: Чоро, 1994. - Т.3.
3. Прокл Диадох. Комментарий к первой книге «Начал» Евклида / пер. Ю.А. Шичалина / Прокл Диадох. – М. - 1994.
4. Крутецкий В.А. Психология математических способностей школьников / В.А. Крутецкий. – М.: Просвещение, 1968. – 432 с.
5. Хинчин А.Я. О воспитательном эффекте уроков математики / А.Я. Хинчин // Математическое просвещение, 1961. - Вып.6. – С. 7-28.
6. Нуждин Г. Доказательство / Г. Нуждин // Вопросы философии. - 1998. - №9. – С.138-149.
7. Столяр А.А. Педагогика математики: учебное пособие для физ.-мат. фак. пед. ин-тов / А.А. Столяр. – Минск: Выш. шк., 1986. – 414 с.
8. Погорелов А.В. Геометрия: учеб. для 7-11 кл. общеобразоват. учреждений / А.В. Погорелов. – М.: Просвещение, 1995. – 384 с.
9. Паскаль Б. Соображения относительно геометрии вообще. О геометрическом уме и искусстве убеждать / Б. Паскаль // Вопросы философии. - 1994. - №6. – С.125-142.
10. Bloom B.S. Human Characteristics and School Learning. New York, 1976.
11. Гусев С.С. Проблема понимания в философии: Филос.-гносеологический анализ / С.С. Гусев, Г.Л. Тульчинский. – М.: Политиздат, 1985. - 192 с.
12. Van Hiele P.H., Geldorf D. Die Bedeutung der Denkenbenen im Unterrichtssystem der deduktiven Methode // Didaktik der Mathematik. Darmstadt Wissenschaftliche Buchgeschaft, 1978.