УДК 519.6

ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ МЕТОДЫ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ НАВЬЕ-СТОКСА ВЯЗКОЙ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ[1]

В.В. Шайдуров[*]

Работа содержит краткий обзор современного состояния вычислительных методов решения уравнений Навье-Стокса вязкой несжимаемой жидкости. В качестве основного способа дискретизации обсуждается метод конечных элементов.

Обозначения

$\mathbf{u} = (u_1, u_2)$ или $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$ – вектор скоростей в двумерном $(d = 2)$ или трехмерном случае $(d = 3)$;

p – давление;

Ω – двумерная или трехмерная открытая ограниченная область с точками $x = (x_1, ..., x_d)$;

$\partial\Omega$ – ее граница;

$n = n(x)$ – единичный вектор внешней нормали;

∇ – оператор градиента: $(\partial/\partial x_1, ..., \partial/\partial x_d)$;

Δ – оператор Лапласа: $\partial^2 / \partial x_1^2 + ... + \partial^2 / \partial x_p^2$;

$(a)^T$ – означает транспозицию матрицы или вектора;

ν – малая величина, характеризующая вязкость;

$\bar{v}$ – средняя скорость в области;

$\bar{l}$ – характерная длина области;

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 02-01-00523).

Re – число Рейнольдса.

В настоящей статье мы обсудим современные вычислительные методы решения математической модели для вязкого ньютоновского потока, описываемого уравнениями Навье-Стокса

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} - \nu \Delta \mathbf{u} + (\mathbf{u} \cdot \Delta)\, \mathbf{u} + \nabla p = \mathbf{f}, \tag{1}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \tag{2}$$

в некотором цилиндре $\Omega \times (0, T)$ с открытой ограниченной областью Ω размерности $d = 2$ или $d = 3$.

Что касается краевых условий, то мы предположим на части Γ границы $\partial\Omega$ выполненными главные краевые условия

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}^{in} \quad \text{на} \quad \Gamma, \tag{3}$$

моделирующие условия прилипания $\left(\mathbf{u}^{ih} = 0\right)$ на жесткой части границы, а также скорость потока на входе в область. Что касается выходного потока, то условие вида (3) является искусственным и довольно ограничительным. Оно не может быть произвольным хотя бы из-за совпадения расхода жидкости на входе и выходе, а при нескольких выходах становится непредсказуемым. Несколько менее ограничительным является условие на выходе

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial n} = 0, \tag{4}$$

означающее установившийся режим. Но оно не поддерживает такие реальные гидродинамические течения, как пульсации и вихревые движения вблизи выхода, и поэтому ставится вдали от реального процесса, существенно увеличивая расчетную область. Еще более мягким является условие

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u}_n \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial n} = 0, \tag{5}$$

где $\mathbf{u}_n$ – компонента скорости, нормальная к границе. С математической точки зрения это условие нелинейно. Но в численных расчетах $\mathbf{u}_n$ берется с предыдущего временного слоя, что алгоритмически линеаризует это равенство. Видно, что оно является частью уравнения (1) и хорошо описывает конвективное движение, пренебрегая диффузионным эффектом и вкладом давления около границы. Поэтому чем больше на выходе преобладает конвективный перенос, тем лучше результат для методов невысокого порядка аппроксимации [1] в смысле выноса возмущений за пределы области без обратного влияния. Для методов более высокого порядка аппроксимации возможно порождение паразитических осцилляций.

В последнее десятилетие все более популярным становится краевое условие, предложенное Р. Раннахером и его группой [2]. Оно действительно является естественным по классификации вариационных постановок, т.е. не накладывает дополнительных ограничений на подпространство конечных элементов в отличие от главных краевых условий, например (3). Мы будем использовать его в неоднородном виде, более точно описывающем физическое явление:

$$-\nu \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial n} + p\,\mathbf{n} = p_{ext}\,\mathbf{n} \quad \text{на} \quad \Gamma_{nat}, \tag{6}$$

где p_{ext} – давление во внешней среде на выходе из Ω. В этом случае интегрирование по частям дает равенство

$$\nu(\nabla \mathbf{u}, \nabla \varphi)_\Omega - (p, \nabla \cdot \varphi)_\Omega = \int\limits_{\partial\Omega} \left\{ \nu \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial n} - p\mathbf{n} \right\} d\sigma + (\nu \Delta \mathbf{u} + \nabla p, \varphi)_\Omega \tag{7}$$

с произвольной функцией $\varphi \in H_0^1(\Omega, \Gamma)$. Поскольку φ равна нулю на Γ, граничный интеграл редуцируется с $\partial\Omega$ на Γ_{nat} и дает дополнительное слагаемое в вариационной формулировке

$$\int_{\Gamma_{nat}} \left\{ \nu \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial n} - p\mathbf{n} \right\} \varphi \, d\sigma = - \int_{\Gamma_{nat}} p_{ext} \mathbf{n} \, \varphi \, d\sigma .$$

В силу этих причин вариационная формулировка выглядит следующим образом: *найти функции* $u(x,t)$ *и* $p(x,t)$ *такие, что* $u(x,t) - u^{in}(x,t) \in \mathbf{H}_0^1(\Gamma, \Omega)$ *и* $p(x,t) \in L$ *с параметром* $t \in (0,T]$, *с начальным условием* $u(x,0) = u^{\circ}(x)$ *в* Ω *и*

$$\left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}, \mathbf{v} \right)_{\Omega} + a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + n(\mathbf{u}, \mathbf{u}, \mathbf{v}) + b(p, \mathbf{v}) = (f, \mathbf{v})_{\Omega} + \int_{\Gamma_{nat}} p_{ext} \mathbf{n} \cdot \mathbf{v} \, d\tau$$

$$\forall \, \mathbf{v} \in \mathbf{H}_0^1(\Omega, \Gamma), \tag{8}$$

$$b(q, \mathbf{u}) = 0 \quad \forall \, q \in L. \tag{9}$$

Если $\Gamma = \partial\Omega$, то граничный интеграл в правой части исчезает, поскольку $\Gamma_{nat} = \varnothing$. Здесь билинейные и трилинейная формы имеют следующий вид:

$$a(u,v) = \nu(\nabla u, \nabla v)_{\Omega} := \nu \sum_{i,j=1}^{d} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}, \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right)_{\Omega},$$

$$b(p,v) = -(p, \nabla v, w)_{\Omega},$$

$$c(u,v,w) = (u \cdot \nabla v, w)_{\Omega}.$$

Очевидно, что в стационарном случае зависимость от t исчезает, первое слагаемое в (8) обращается в нуль и необходимость в начальном условии отпадает.

Основные трудности решения задачи

Мы сконцентрируем внимание на “ламинарных” потоках, когда число Рейнольдса $\mathrm{Re} \sim \bar{v}\,\bar{l}\,/\,\nu$ лежит в пределах $1 \le \mathrm{Re} \le 10^5$. Тогда мы получаем следующие трудности в ходе численного решения:

1. Сложная структура течения влечет необходимость довольно мелкой сетки для детализации решения в зонах мелких вихрей, внутренних и пограничных слоев.
2. При больших числах Рейнольдса возникающая структура решения существенно зависит от данных задачи, поэтому предпочтительнее сетки, настраиваемые на конкретное решение, что делает апостериорный подход более эффективным, чем априорный.
3. Ограничение (9) не содержит $\partial p / \partial t$, и система не разрешается относительно этой производной, что влечет использование неявных методов, по крайней мере, для этого ограничения.
4. Нелинейные эффекты, большие числа Рейнольдса, и ограничение (9) могут вызвать три типа неустойчивостей. Первый возникает из возможности экспоненциального изменения решения благодаря зависимости коэффициентов от решения, что преодолевается аккуратной аппроксимацией решения и коэффициентов, зависящих от него. Разумеется, нелинейность выливается в проблему устойчивости линеаризации. Во-вторых, большое число Рейнольдса делает преобладающим конвективное движение, что требует определенных схем или дискретизаций (направленных по потоку) либо некоторых приемов стабилизации для обеспечения устойчивости. И, в третьих, ограничение (9) ведет к специфической оценке, называемой в литературе условием Ладыженской–Бабушки–Брецци (далее – условие ЛББ). Оно исключает локальные неустойчивости в виде ложных осцилляций при вычислении давления.
5. Решение нестационарной задачи существенно зависит от времени, что влечет адаптацию сетки на каждом временном шаге. Это требует локальных оценок производных решения и по времени, и по пространству.

Удобнее преодолевать эти трудности с помощью метода конечных элементов (а не конечных разностей или конечных объемов) по следующим причинам. Метод конечных элементов представляет собой метод Галеркина, основанный на вариационной формулировке задачи Навье-Стокса в подходящих функциональных пространствах, и определяет "дискретную" аппроксимацию в определенных конечномерных подпространствах кусочно-полиномиальных функций. Такой подход обеспечивает, с одной стороны, высокую вычислительную гибкость, вплоть до адаптации к конкретному решению, а с другой – прямолинейный математический анализ погрешности, основанный на существенных свойствах непрерывной задачи.

Пространственная дискретизация

В этом разделе мы рассмотрим стационарную задачу. Сначала введем триангуляцию T_h замыкания $\overline{\Omega}$ замкнутыми выпуклыми ячейками K, являющимися треугольниками или четырехугольниками в двумерном случае. Пусть T_h удовлетворяет обычным условиям регулярности:

1) $\overline{\Omega} = \bigcup_{K \in T_h} K$;

2) любая грань ячейки K в трехмерном случае или ее ребро в двумерном случае являются общими только с одной другой ячейкой K или целиком лежат на границе $\partial\Omega$.

Положим $h_k :=$ diameter(K) и $h := \max_{K \in T_h} h_k$.

Далее, введем пространство конечных элементов на триангуляции T_h. В отличие от метода Петрова-Галеркина (с целью упрощения) возьмем одни и те же пространства пробных и тестовых функций. Для $H_0^1(\Omega, \Gamma)$ возьмем

$$H_h := \left\{ v_h \in H_0^1(\Omega, \Gamma) : \left. v_h \right|_K \in P(K) \ \ \forall K \in \mathrm{T}_h \right\},$$

а для L

$$L_h := \left\{ q_h \in L : \left. q_h \right|_K \in Q(K) \ \ \forall K \in \mathrm{T}_h \right\},$$

где $P(K)$ и $Q(K)$ являются некоторыми пространствами элементарных функций на ячейке K. В простых и наиболее распространенных вариантах $P(K)$ и $Q(K)$ являются пространствами многочленов.

На общей ячейке с криволинейной гранью или ребром мы вынуждены работать с параметрическими элементами. То есть локальные функции формы $\left. v_h \right|_K$ и $\left. q_h \right|_K$ конструируются с использованием преобразования $\psi_K : \hat{K} \to K$ фиксированного образца $\hat{K}$ и ячейки K так, что $v_h(\psi_K(\cdot))$ является многочленом на $\hat{K}$. Эта конструкция необходима, чтобы:

- сохранить глобальную непрерывность поэлементных функций $v_h \in H_h$ и $q_h \in L_h$;
- аппроксимировать часть криволинейной границы Γ с главными краевыми условиями.

Аппроксимация криволинейной границы производит помимо $\overline{\Omega}$ приближенную замкнутую область $\overline{\Omega}_h$ с границей $\partial\Omega_h$ и переформулирует пункты 1), 2) с учетом $\overline{\Omega}_h$, $\partial\Omega_h$ вместо $\overline{\Omega}$, $\partial\Omega$.

Порядок аппроксимации при конечно-элементной дискретизации выражается в свойствах локальной аппроксимации используемыми функциями формы. Например, использование линейных и d-линейных функций формы дает аппроксимацию второго порядка для достаточно гладкой функции v:

$$\| v - I_h v \| + h_K \| \nabla(v - I_h v) \| \ \le \ c_I h_K^2 \| v \|, \tag{13}$$

где $I_h v \in H_h$ является "узловым интерполянтом" функции $v \in H_0^1(\Omega_h, \Gamma_h) \cap H^2(\Omega)$. В более общих случаях $I_h v$ является функцией, которая совпадает с v относительно определенных линейных функционалов, таких как поточечные значения в некоторых узлах, средние значения на ребрах или гранях и т.д.

Итак, на конечно-элементной триангуляции T_h мы определили конечномерные пространства

$$H_h \in H_0^1(\Omega_h, \Gamma_h), \quad L_h \subset L.$$

Тогда дискретный аналог стационарной задачи вида (8), (9) записывается следующим образом: *найти* $\mathbf{u}_h = \mathbf{u}_h^{in} + \mathbf{v}_h$ *с* $\mathbf{v}_h \in \mathbf{H}_h$ *и* $p_h \in L_h$*, такие, что*

$$a_h(\mathbf{u}_h, \mathbf{w_h}) + n_h(\mathbf{u}_h, \mathbf{u}_h, \mathbf{w_h}) + b_h(p_h, \mathbf{w_h}) = (f, \mathbf{w_h})_\Omega \quad \forall \mathbf{w_h} \in \mathbf{H}_h, \tag{14}$$

$$b_h(q_h, \mathbf{u}_h) = 0 \quad \forall q_h \in L, \tag{15}$$

где $\mathbf{u}_h^{in}$ – подходящая аппроксимация $\mathbf{u}^{in}$, а дискретные формы определены как поэлементные суммы:

$$a_h(\varphi, \psi) := \sum_{K \in \mathrm{T}_h} \nu(\nabla\varphi, \nabla\psi)_K,$$

$$n_h(\varphi, \psi, \xi) := \sum_{K \in \mathrm{T}_h} (\varphi \cdot \nabla\psi, \xi)_K, \tag{16}$$

$$b_h(q,\varphi) := \sum_{K \in T_h} (q, \nabla \cdot \varphi)_K .$$

Здесь индекс *K* означает не только интегрирование по *K,* но и возможное применение некоторых квадратурных формул на *K*.

Практически решение задачи (14), (15) сводится к конечномерной системе нелинейных алгебраических уравнений

$$\begin{pmatrix} A(\alpha,\beta) & B \\ B^T & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \end{pmatrix} \tag{17}$$

с векторами неизвестных α и β, относящихся к скоростям и давлению соответственно. Для того чтобы (14), (15) позволяло найти давление p_h устойчивым образом, на пространства H_h, L_h накладывают так называемое условие Ладыженской–Бабушки–Брецци

$$\inf_{q_h \in L_h} \left\{ \sup_{\mathbf{w}_h \in \mathbf{H}_h} \frac{b_h(q_h, w_h)}{\|q_h\| \|\nabla w_h\|} \right\} \geq \gamma > 0 \tag{18}$$

с константой γ, не зависящей от *h*. Это условие вместе с эллиптичностью $a_h(\mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h)$ обеспечивает единственность и устойчивость решения в $\mathbf{H}_h \times L_h$.

Прямолинейный анализ сходимости вместе с (12) дает априорную оценку

$$\| \nabla(\mathbf{u} - \mathbf{u}_h) \|_{\Omega_h} + \| p - p_h \|_{\Omega_h} \leq ch \{ \| \mathbf{u} \|_{2,\Omega} + \| p \|_{1,\Omega} \}. \tag{19}$$

Прием Нитше-Обэна дает дополнительную оценку

$$\| \mathbf{u} - \mathbf{u}_h \|_{\Omega_h} \leq ch^2 \{ \| \mathbf{u} \|_{2,\Omega} + \| p \|_{1,\Omega} \}. \tag{20}$$

Примеры устойчивых подпространств

Начнем с простейшей пары конечных пространств:

$$H_h = \left\{ v_h \in H_0^1(\Omega_h, \Gamma_h) : \left. v_h \right|_K \in Q_1(K) \ \forall K \in T_h \right\}, \tag{21}$$

$$L_h = \left\{ q_h \in L : \left. q_h \right|_K \in P_0(K) \ \forall K \in T_h \right\}, \tag{22}$$

где

$$Q_1(K) = \left\{ v \circ \psi_K^{-1} : v \in \mathrm{span}\{1, x_1, x_2, x_1 x_2\} \right\}, \tag{23}$$

$$P_0(K) = \left\{ q \circ \psi_K^{-1} : q \in \mathrm{span}\{1\} \right\}. \tag{24}$$

К сожалению, эта пара пространств (точнее, $H_h^d \times L_h$) не удовлетворяет условию ЛББ. Чтобы этого достичь, достаточно удалить часть базисных функций в L_h. Например [10], для двумерных четырехугольников можем скомбинировать по четыре элемента *K,* имеющих одну общую вершину, в макроэлемент M и вместо четырех базисных функций в $P_0(M)$ взять только три, исключив наиболее осциллирующую функцию из базиса. В итоге вместо L_h получим его подпространство $\widetilde{L}_h$, которое вместе с H_h удовлетворяет условию ЛББ. Алгоритмически системы (14), (15) или (17) собираются с помощью пространств H_h и L_h (а не $\widetilde{L}_h$), но на соответствующих вычислительных этапах проводится ортогонализация функций к указанным быстроосциллирующим функциям на каждом *M*.

Другой путь достижения устойчивости состоит в повороте узлов пространств для скоростей. С этой целью в выпуклом четырехугольнике *K* проведем две медианы через середины противоположных ребер и введем локальные координаты ξ, η вдоль медиан с началом в точке их пересечения. Положим [1]

$$\widetilde{Q}_1(K) = \mathrm{span}\left\{ 1, \xi, \eta, \xi^2 - \eta^2 \right\}$$

и введем множество M_h средних точек всех ребер *S* четырехугольников триангуляции T_h. Затем положим:

$$\widetilde{\mathbf{H}}_h = \Big\{ \mathbf{v}_h \in L^2(\Omega)\times L^2(\Omega):\ \mathbf{v}_h \in \widetilde{Q}_1(K)\times\widetilde{Q}_1(K)\ \ \forall K \in T_h;$$
$$\mathbf{v}_h(z)\big|_K = \mathbf{v}_h(z)\big|_{K'}\quad \forall z \in M_h \cap (K \cap K');$$
$$\mathbf{v}_h(z) = 0 \quad \forall z \in M_h \cap \Gamma_h \Big\}.$$

Видно, что $\widetilde{\mathbf{H}}_h$ не принадлежит $\mathbf{H}_0^1$, что ведет к “неконформному” методу. Тем не менее пара $\widetilde{\mathbf{H}}_h$ и L_h из (22) лежит в области определения дискретной задачи (14)–(15), удовлетворяет условию ЛББ (18) и оценкам (19), (20).

Видно, что пространства для давления построены попроще, отсюда меньший порядок аппроксимации. Это в какой-то мере диктуется условием (18). Для того чтобы достигнуть более богатого выбора, в работах [1], [11] предлагается подправить (15) некоторыми слагаемыми метода наименьших квадратов:

$$b_h(q_h,\mathbf{u}_h)+c_h(q_h,p_h)=g_h(\mathbf{u}_h,q_h), \tag{25}$$

где

$$c_h(q_h,p_h)=\frac{\alpha}{\nu}\sum_{K\in T_h} h_K^2\left(\nabla q_h,\nabla p_h\right)_K,$$

$$g_h(\mathbf{u}_h,q_h)=\frac{\alpha}{\nu}\sum_{K\in T_h} h_K^2\left(\nabla q_h,\mathbf{f}+\nu\Delta\mathbf{u}_h-\mathbf{v}_h\cdot\nabla\mathbf{u}_h\right)_K.$$

Дополнительные слагаемые оставляют уравнение (15) полностью совместным, поскольку они исключаются при подстановке точного решения $(\mathbf{u},p)$ вместо $(\mathbf{u}_h,p_h)$. В итоге можно взять одинаковые подпространства функций формы для скоростей и давления

$$\widetilde{Q}_1(K)=\left\{q\circ\psi_K^{-1}:\ q\in\operatorname{span}\{1,x_1,x_2,x_1x_2\}\right\}$$

и получить устойчивый алгоритм, для которого будут выполнены оценки (19), (20).

Очевидно обобщение этого метода стабилизации давления (регуляризации) на трехмерный случай.

Четырехугольники (особенно прямоугольники и квадраты) более удобны в алгоритмическом смысле по сравнению с треугольниками благодаря меньшему числу конечных элементов при одном диаметре элементов и некоторым свойствам, индуцированным декартовым произведением одномерных отрезков. Например, так получаются квадратурные формулы на *K*. Для треугольных элементов аналогичные формулы несколько сложнее и вновь дают большее число арифметических операций.

В трехмерном случае алгоритмическое различие между тетраэдрами и прямоугольниками (точнее, прямоугольными параллелепипедами) становится еще значительнее. Тем не менее в часто встречаемом случае использования прямоугольных элементов внутри области определения в окрестности криволинейной части границы Г удобнее использовать тетраэдры.

Первая пара пространств на треугольниках аналогична неконформным четырехугольным элементам с поворотом узлов. Пусть K – треугольник. Положим

$$P_1(K)=\operatorname{span}\{1,x_1,x_2\}$$

и введем множество M_h середин всех ребер S регулярной триангуляции T_h. Тогда положим:

$$\widetilde{\mathbf{H}}_h = \Big\{ \mathbf{v}_h \in L^2(\Omega)\times L^2(\Omega):\ \mathbf{v}_h \in P_1(K)\times P_1(K)\ \ \forall K \in T_h;$$
$$\mathbf{v}_h(z)\big|_K = \mathbf{v}_h(z)\big|_{K'}\quad \forall z \in M_h \cap (K \cap K');$$
$$\mathbf{v}_h(z) = 0 \quad \forall z \in M_h \cap \Gamma_h \Big\},$$
$$L_h = \Big\{ q_h \in L:\ q_h\big|_K \in P_0(K)\ \ \forall K \in T_h \Big\}. \tag{26}$$

Степени свободы для скоростей берутся в качестве значений в серединах ребер S, а для давления – в центрах треугольников. Поэтому функции v_h не будут непрерывными на Ω_h и $\widetilde{\mathbf{H}}_h$ здесь тоже не принадлежит $\mathbf{H}_0^1$, что ведет к неконформному методу. Тем не менее, эта пара $\widetilde{\mathbf{H}}_h$ и L_h лежит в области определения дискретной задачи, удовлетворяет условию ЛББ и оценкам сходимости (19), (20).

При одновременном использовании четырехугольников с треугольниками достаточно сопрячь формулы (25) и (26) следующим образом:

$$v_h\ |_K \in \begin{cases} P_1(K)\times P_1(K), & \text{если } K - \text{треугольник},\\ \widetilde{Q}_1(K)\times\widetilde{Q}_1(K), & \text{если } K - \text{выпуклый четырехугольник}.\end{cases}$$

Наконец, мы продемонстрируем еще один подход для поддержки условия ЛББ. Простая пара треугольных конформных элементов для скоростей из $H_0^1(\Omega)$ со степенями свободы в вершинах треугольников и постоянных элементов для давления не удовлетворяет условию ЛББ. В принципе, для обеспечения устойчивости достаточно сделать подпространство для давления победнее, объединив по четыре треугольника в макроэлемент с постоянной функцией формы. Но более плодотворно обогатить подпространства для скоростей путем добавления кубических функций-"пузырей" на каждом треугольнике. В *барицентрических координатах* $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$ треугольника K эта функция записывается в виде $\lambda_1\lambda_2\lambda_3$, равна нулю вдоль трех сторон K и действительно похожа на пузырь. Итак, пусть

$$\widetilde{P}_1(K)=\mathrm{span}\{1,\lambda_1,\lambda_2,\lambda_1\lambda_2\lambda_3\},$$

и положим

$$\widetilde{\mathbf{H}}_h=\left\{\mathbf{v}_h\in\left(H_0^1(\Omega_h,\Gamma_h)\right)^2:\ \mathbf{v}_h\in\widetilde{P}_1(K)\times\widetilde{P}_1(K)\ \ \forall K\in\mathrm{T}_h\right\}.$$

Тогда получаем конформную пару $\widetilde{\mathbf{H}}_h$ и L_h из (26), которая удовлетворяет условию ЛББ и оценкам сходимости (19), (20).

Заметим, что различные приемы, продемонстрированные здесь для обеспечения условия ЛББ, были придуманы для конечных элементов низкого порядка. Ситуация с элементами высокого порядка попроще: обычные конформные пары на треугольниках $P_{l+1}(K)$ и $P_l(K)$ или конформные пары на четырехугольниках $Q_{l+1}(K)$ и $Q_l(K)$, соответственно, для скоростей и давления удовлетворяют условию ЛББ для $l>0$ при некоторых условиях регулярности [3].

Дискретизация по времени

Теперь рассмотрим нестационарную задачу (8)–(9). Для ее дискретизации используются два главных подхода: метод прямых и метод Ротэ.

Метод Ротэ. В этом методе сначала проводится дискретизация задачи только по времени. Для этого введем сетку по времени

$$0=t_0<t_1<\ldots<t_k<\ldots<t_m=T$$

с шагами $\tau_k=t_k-t_{k-1}$. Затем применим, например, неявную схему Эйлера:

$$\tau_k^{-1}(\mathbf{u}^k-\mathbf{u}^{k-1},\mathbf{v})_\Omega+a(\mathbf{u}^k,\mathbf{v})+c(\mathbf{u}^k,\mathbf{u}^k,\mathbf{v})+b(p^k,\mathbf{v})=\left(f^k,\mathbf{v}\right)_\Omega+\int_{\Gamma_{nat}}P_{ext}n\cdot v\,d\tau\qquad\forall\,\mathbf{v}\in\mathbf{H}_0^1(\Omega,\Gamma),\tag{27}$$

$$b(q,\mathbf{u}^k)=0\quad\forall\,q\in L,\ k=1,2,\ldots,m.\tag{28}$$

Затем каждая из этих стационарных задач дискретизуется одним из методов, описанных в предыдущем разделе. Это приводит к системе алгебраических уравнений, которые нелинейны из-за коэффициента $\mathbf{u}^k$ в слагаемом $c(\mathbf{u}^k,\mathbf{u}^k,\mathbf{v})$. В принципе, в эволюционных уравнениях эта нелинейность обходится использованием значений коэффициентов с предыдущего слоя: $c(\mathbf{u}^{k-1},\mathbf{u}^k,\mathbf{v})$. В этом случае получаем линейную алгебраическую систему, правда, с несимметричной матрицей. Несимметрия вновь порождается этим же слагаемым. Наиболее простой способ получить симметричную матрицу состоит в явной форме $c(\mathbf{u}^{k-1},\mathbf{u}^{k-1},\mathbf{v})$. В итоге после пространственной дискретизации остальных слагаемых получается симметричная, но не положительно определенная матрица. Известно, что для симметричных матриц итерационные методы решения более разнообразны и эффективны. Явная форма трилинейной формы $c(\cdot)$ не дает сильных ограничений на размер шага по времени. В этом случае неравенство Куранта для обеспечения устойчивости имеет вид

$$\tau_k\le ch_{k-1},\tag{29}$$

где h_{k-1} – минимальный размер элементов K в T_h на слое k–1. То есть пространственный и временной шаги остаются одного порядка. Иное дело с операторами второго порядка, например, породившими $a(\cdot,\cdot)$. Попытка отнести его на предыдущий уровень приводит к неравенству Куранта

$$\tau_k \le ch_{k-1}^2, \tag{30}$$

что является весьма ограничительным, особенно для пространственно адаптируемых сеток.

Существенный вопрос состоит в повышении порядка точности схем аппроксимации по времени, который мы обсудим одновременно для двух подходов.

Метод прямых. В этом методе сначала проводится дискретизация по пространству методом конечных элементов. Поэтому вместо алгебраических уравнений получается система обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\mathbf{M}\frac{d\mathbf{x}(t)}{dt} + \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + C(\mathbf{x}(t))\,\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{y}(t) = \mathbf{f}(t), \tag{31}$$

$$-\mathbf{B}^T\mathbf{x}(t) = 0, \quad t \ge 0. \tag{32}$$

Матрицы масс $\mathbf{M}$, жесткости $\mathbf{A}$ и градиентов $\mathbf{B}$ не зависят от времени. Нелинейная матрица $\mathbf{C}(\cdot)$ содержит алгебраические слагаемые, порождаемые конвективными дифференциальными слагаемыми и, возможно, стабилизирующими слагаемыми. Для упрощения описания введем обозначение $\mathsf{A}(\cdot) = \mathbf{A} + \mathbf{C}(\cdot)$.

Для решения системы (31)–(32) можно использовать несколько подходов. Мы начнем с наиболее используемого семейства схем, записываемых с помощью параметра θ:

$$\begin{gathered}\left(\mathbf{M} + \theta\tau\mathsf{A}^n\right)\mathbf{x}^n + \mathbf{B}\mathbf{y}^n = \left(\mathbf{M} - (1-\theta)\,\tau\mathsf{A}^{n-1}\right)\mathbf{x}^{n-1} + \theta\tau\mathbf{b}^n + (1-\theta)\,\tau\mathbf{b}^{n-1},\\ -\mathbf{B}^T\mathbf{x}^n = 0,\end{gathered} \tag{33}$$

где $\mathbf{x}^n = \mathbf{x}(t_n)$, $\mathbf{y}^n = \mathbf{y}(t_n)$ и $\mathsf{A}^n = \mathsf{A}(\mathbf{x}_n)$. Это семейство содержит неявную схему Эйлера при $\theta = 1$ первого порядка аппроксимации, явную схему Эйлера при $\theta = 0$ тоже первого порядка аппроксимации и неявную схему Кранка-Николсона при $\theta = 1/2$ второго порядка аппроксимации.

Неявная схема Эйлера наиболее устойчива. Она сильно A-устойчива [6], но очень диссипативна и поэтому малопригодна для вычислений нестационарных потоков (при τ~1/Re и более) из-за вычислительной вязкости $\tau/2 \cdot \partial^2\mathbf{x}/\partial t^2$ (главный член погрешности аппроксимации).

Менее стабильна явная схема. Она условно устойчива при выполнении условия типа (30), что приводит к весьма малому шагу по времени. В дополнение, схема не является явной в буквальном смысле из-за матрицы $\mathbf{B}$ на слое t_n.

Схема Кранка-Николсона имеет незначительную диссипацию. К примеру, главный член погрешности аппроксимации выражения $\partial\mathbf{x}/\partial t$ имеет вид $\tau^2/3 \cdot \partial^3\mathbf{x}/\partial t^3$ и второй порядок малости. Она является A-устойчивой, но не сильно A-устойчивой. Эта более слабая устойчивость иногда накапливает неустойчивости, вызванные грубыми возмущениями в данных или их сильными изменениями по времени. Их влияние можно сделать меньше, уменьшая шаг по времени, что увеличивает вычислительную стоимость.

Другой путь состоит в использовании θ-схемы дробных шагов, успешно применяемый Р. Раннахером и его соавторами [1]:

$$\begin{gathered}\left(\mathbf{M} + \alpha\theta\tau\mathsf{A}^{n-1+\theta}\right)\mathbf{x}^{n-1+\theta} + \theta\tau\mathbf{B}\mathbf{y}^{n-1+\theta} = \left(\mathbf{M} - \beta\theta\,\tau\mathsf{A}^{n-1}\right)\mathbf{x}^{n-1} + \theta\tau\mathbf{b}^{n-1},\\ -\mathbf{B}^T\mathbf{x}^{n-1+\theta} = 0,\\ \left(\mathbf{M} + \beta\theta'\tau\mathsf{A}^{n-\theta}\right)\mathbf{x}^{n-\theta} + \theta'\tau\mathbf{B}\mathbf{y}^{n-\theta} = \left(\mathbf{M} - \alpha\theta'\,\tau\mathsf{A}^{n-1+\theta}\right)\mathbf{x}^{n-1+\theta} + \theta'\tau\mathbf{b}^{n-1+\theta},\\ -\mathbf{B}^T\mathbf{x}^{n-\theta} = 0,\\ \left(\mathbf{M} + \alpha\theta\tau\mathsf{A}^{n}\right)\mathbf{x}^{n} + \theta\tau\mathbf{B}\mathbf{y}^{n} = \left(\mathbf{M} - \beta\theta\,\tau\mathsf{A}^{n-\theta}\right)\mathbf{x}^{n-\theta} + \theta\tau\mathbf{b}^{n-\theta},\\ -\mathbf{B}^T\mathbf{x}^{n} = 0.\end{gathered} \tag{34}$$

Здесь $\theta = 1 - \sqrt{2}/2 = 0{,}292893...$, $\theta' = 1 - 2\theta$, $\alpha \in (1/2, 1]$, $\beta = 1 - \alpha$. Для достижения сильной A-устойчивости необходимо $\beta < \alpha$. Специальный выбор $\alpha = (1-2\theta)/(1-\theta) = 0{,}585786...$ приводит к равенству $\alpha\theta = \beta\theta'$, которое дает одинаковые коэффициенты в левых частях трех систем (34). Но такие качества, как нелинейность и несимметричность операторов этих систем, вовлекают дополнительные итерационные процессы линеаризации и значительно сужают круг используемых итерационных процессов.

Чтобы обойти эти сложности, можно использовать схемы, неявные для линейной вязкости и вклада давления, но явные для нелинейных конвективных слагаемых. Например, такая k-шаговая схема Адамса-Башфорта может быть выписана довольно просто:

$$\mathbf{M}\mathbf{x}^{n+1} = \mathbf{M}\mathbf{x}^{n} - \tau\sum_{j=0}^{k-1}\alpha_j \mathbf{C}\left(\mathbf{x}^{n-1}\right)x^{n-j} - \tau\sum_{j=0}^{k}\beta_j\left(\mathbf{A}\mathbf{x}^{n-j+1} + \mathbf{B}\mathbf{y}^{n-j+1} - \mathbf{b}^{n-j+1}\right),$$

$$-\mathbf{B}^T\mathbf{x}^{n+1} = 0. \tag{35}$$

На каждом временном шаге необходимо решать только одну систему линейных алгебраических уравнений

$$\left(\mathbf{M} + \tau\beta_0\mathbf{A}\right)\mathbf{x}^{n+1} + \tau\beta_0\mathbf{B}\mathbf{y}^{n+1} = \mathbf{g}^{n+1},$$

$$-\mathbf{B}^T\mathbf{x}^{n+1} = 0 \tag{36}$$

с заданной правой частью $\mathbf{g}^{n+1}$. Действительно, матрица линейна и может быть сделана симметричной домножением последней группы уравнений на $-\tau\beta_0$. Для $k = 2$ эта схема наиболее популярна и имеет коэффициенты $\alpha_0 = \alpha_1 = 1/2$ и $\beta_2 = \beta_1 = 1/2$, $\beta_0 = 0$. Для чисто конвективной проблемы эта схема слабо неустойчива, но при добавлении естественной и вычислительной диссипации становится более устойчивой. Схемы третьего и четвертого порядков точности свободны от этого недостатка, но имеют все меньшую область сходимости, приводящую к весьма мелким шагам по времени.

Методы расщепления

В принципе, эта группа методов может быть записана и в алгебраической форме после дискретизации, и в дифференциальной форме для исходной задачи. Мы выберем второй, более лаконичный путь.

Главная идея состоит в расщеплении дифференциального оператора на более простые. Например, пусть метод Ротэ на шаге t_n приводит к дифференциальной задаче

$$\frac{\mathbf{u}^n - \mathbf{u}^{n-1}}{\tau} - \nu\Delta\mathbf{u}^n + \left(\mathbf{u}^n\cdot\nabla\right)\mathbf{u}^n + \nabla p^n = \mathbf{f}^n \quad \text{в} \quad \Omega, \tag{37}$$

$$\nabla\cdot\mathbf{u}^n = 0 \quad \text{в} \ \Omega$$

с краевыми условиями

$$\mathbf{u}^n = \mathbf{g}^n \quad \text{на} \ \Gamma. \tag{38}$$

Чорин, а затем Темам [7] предложили разбить описываемый физический процесс на два: конвекцию-диффузию и вклад давления. Это приводит к двум задачам:

$$\frac{\hat{\mathbf{u}}^n - \mathbf{u}^{n-1}}{\tau} - \nu\Delta\hat{\mathbf{u}}^n + \left(\mathbf{u}^{n-1}\cdot\nabla\right)\hat{\mathbf{u}}^n = \mathbf{f}^n \quad \text{в} \quad \Omega \tag{39}$$

с краевыми условиями (38) и

$$\frac{\mathbf{u}^n - \hat{\mathbf{u}}^{n-1}}{\tau} + \nabla p^n = 0 \quad \text{в} \quad \Omega, \tag{40}$$

$$\nabla\cdot\mathbf{u}^n = 0 \quad \text{в} \ \Omega \tag{41}$$

с краевыми условиями

$$\mathbf{n}\cdot\mathbf{u}^n = \mathbf{n}\cdot\mathbf{g}^n \quad \text{на} \ \Gamma. \tag{42}$$

Мы “заморозили” коэффициент $\mathbf{u}^{n-1}$ в конвективном слагаемом в (39), чтобы сделать эту задачу линейной. Следующее изменение состоит в краевом условии (42), которое слабее, чем (38). Последнее привело бы к переопределению задачи и в общем случае могло не дать ни одного решения.

Такая разница в типе краевых условий обычно приводит к некоторым разновидностям искусственных пограничных слоев. Эта задача не является исключением, и получаем пограничный слой в давлении амплитудой $O\left((\nu\tau)^{1/2}\right)$.

Этот метод расщепления и некоторые другие можно вывести и другими способами. Например, Чорин вывел его как “проекционный”, в котором вторая подзадача эквивалентна проектированию решения $\hat{\mathbf{u}}^n$ первой подзадачи в пространство функций с нулевой дивергенцией. Другая точка зрения состоит в стабилизации (41) малым дополнительным слагаемым, содержащим давление:

$$\nabla\cdot\mathbf{u} - \tau\Delta p = 0 \quad \text{в} \ \Omega, \quad \partial p/\partial n = 0 \ \text{ на } \ \partial\Omega. \tag{43}$$

Эта точка зрения позволила доказать оценку [9]

$$\left| p^n(x) - p(x,t_n) \right| \le c\sqrt{\tau}\exp\left(-\alpha d(x) \big/ \sqrt{\mu\tau}\right) + O(\tau),$$

где $d(x)$ – расстояние от точки x до границы $\partial\Omega$.

Видно, что первая подзадача имеет эллиптический тип с несимметричным оператором. После дискретизации по пространству получим систему с несимметричной матрицей, для которой методы решения менее эффективны, чем для симметричных матриц.

Поэтому полезно использовать метод расщепления на две подзадачи с несимметричным нелинейным оператором и с симметричным линейным. Первая подзадача конвекции имеет вид

$$\frac{\hat{\mathbf{u}}^n - \mathbf{u}^{n-1}}{\tau} + \left(\hat{\mathbf{u}}^n \cdot \nabla\right) \hat{\mathbf{u}}^n = \mathbf{f}^n \quad \text{в} \quad \Omega \tag{44}$$

с краевым условием

$$\hat{\mathbf{u}}^n = \mathbf{g}^n \quad \text{на} \quad \Gamma \quad \text{где} \quad \mathbf{n}\cdot\hat{\mathbf{u}}^n < 0. \tag{45}$$

Вторая подзадача типа Стокса имеет форму

$$\frac{\mathbf{u}^n - \hat{\mathbf{u}}^{n-1}}{\tau} - \nu\Delta\mathbf{u}^n + \nabla p^n = 0 \quad \text{в} \quad \Omega,$$

$$\nabla\cdot\mathbf{u}^n = 0 \quad \text{в} \quad \Omega$$

с краевыми условиями (38).

Поскольку эта схема имеет первый порядок аппроксимации, можно использовать вместо (44) явную схему

$$\frac{\hat{\mathbf{u}}^n - \mathbf{u}^{n-1}}{\tau} + \left(\hat{\mathbf{u}}^{n-1} \cdot \nabla\right) \hat{\mathbf{u}}^{n-1} = \mathbf{f}^{n-1} \quad \text{в} \quad \Omega. \tag{46}$$

Тем не менее снова граничное условие (45) слабее, чем (38), и может приводить к искусственному пограничному слою на $\partial\Omega$ там, где $\mathbf{n}\cdot\mathbf{u}^{n-1} > 0$. Чтобы это обойти, можно разнести слагаемое $-\nu\Delta\mathbf{u}$ в обе подзадачи, что сделает краевые условия (38) корректными для обеих подзадач. Более того, Р. Гловински создал θ -схему этого типа со вторым порядком аппроксимации:

$$\begin{cases} \dfrac{\mathbf{u}^{n-1+\theta} - \mathbf{u}^{n-1}}{\theta\tau} - \alpha\nu\Delta\mathbf{u}^{n-1+\theta} + \nabla p^{n-1+\theta} = f^{n-1+\theta} + \beta\nu\Delta\mathbf{u}^{n-1} - \left(u^{n-1}\cdot\nabla\right)\mathbf{u}^{n-1} \ \text{в} \ \Omega, \\ \nabla\cdot\mathbf{u}^{n-1+\theta} = 0 \ \text{в} \ \Omega, \\ \mathbf{u}^{n-1+\theta} = g^{n-1+\theta} \ \text{на} \ \partial\Omega; \end{cases} \tag{47}$$

$$\begin{cases} \dfrac{\mathbf{u}^{n-\theta} - \mathbf{u}^{n-1+\theta}}{(1-2\theta)\tau} - \beta\nu\Delta\mathbf{u}^{n-\theta} + (\mathbf{u}^{n-\theta}\cdot\nabla)\mathbf{u}^{n-\theta} = f^{n-\theta} + \alpha\nu\Delta\mathbf{u}^{n-1+\theta} - \nabla p^{n-1+\theta} \ \text{в} \ \Omega, \\ \mathbf{u}^{n-\theta} = g^{n-\theta} \ \text{на} \ \partial\Omega; \end{cases} \tag{48}$$

$$\begin{cases} \dfrac{\mathbf{u}^{n} - \mathbf{u}^{n-\theta}}{\theta\tau} - \alpha\nu\Delta\mathbf{u}^{n} + \nabla p^{n} = f^{n} + \beta\nu\Delta\mathbf{u}^{n-\theta} - \left(u^{n-\theta}\cdot\nabla\right)\mathbf{u}^{n-\theta} \ \text{в} \ \Omega, \\ \nabla\cdot\mathbf{u}^{n} = 0 \ \text{в} \ \Omega, \\ \mathbf{u}^{n} = g^{n} \ \text{на} \ \partial\Omega. \end{cases} \tag{49}$$

Первая и последняя подзадачи являются линейными задачами Стокса, а вторая – нелинейная задача конвекции–диффузии без ограничения в виде уравнения неразрывности. Эта схема имеет такие же числовые параметры, как и (34). Более того, эта схема была предшествующей и ее свойства индуцировали аналогичные свойства у (47)–(49), как, например, сильная A-устойчивость.

Итак, мы рассмотрели лишь одну модель из нескольких, более или менее сложных. Но проанализированные алгоритмы и приемы являются ядром или аналогами того, что требуется в других моделях. Более сложные модели могут включать уравнения для температуры, солености, примесей и даже реагирующих компонентов. Менее сложные модели возникают при некоторых упрощениях, таких как усреднение в некоторых направлениях, пренебрежение диффузией и т.п. Но каждый раз исследователь должен выбрать наиболее адекватную модель для исследования явления.

Что можно ожидать в направлении вычислительных алгоритмов в ближайшее время? Во-первых, будет продолжаться параллельная реализация эффективных вычислительных алгоритмов для все более сложных моделей. Во-вторых, продолжится развитие и применение многосеточных алгоритмов для повышения эффективности вычислительных процедур. В-третьих, будет продолжено создание локальных оценок погрешности в целях апостериорной оптимизации триангуляций и порядка многочленов в методе конечных элементов, особенно для нестационарных задач. И, наконец, будут созданы многостадийные одношаговые методы типа Рунге-Кутты, Розенброка и т.п. с третьим и четвертым порядком точности, включая схемы, явные для конвекции и неявные для диффузии и вклада давления.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Rannacher R. Finite Element Methods for the Imcompressible Navier-Stokes Equations. In: G. Galdi, J.G. Heywood, R. Rannacher, eds. Fundamental Directions in Nathematical Fluid Mechanics. – Berlin: Birkhäuser, 2000.
2. Shyy W., Mittal R. Solution Methods for Incompressible Navier-Stokes Equations. In: R.W. Johnson, ed. The Handbook of Fluid Dynamics. In: R.W. Johnson, ed. The Handbook of Fluid Dynamics. – Heidelberg: Springer and Boca Raton; Florida: CRC Press LLC, 1998.
3. Brezzi F. and Fortin M. Mixed and Hybrid Finite Element Methods. – Berlin-Heidelberg-New York: Springer, 1991.
4. Шайдуров В.В. Многосеточные методы конечных элементов. – М.: Наука, 1989.
5. Hackbush W. Multi-Grid Methods and Applications. – Berlin, New York: Springer, 1985.
6. Hairer E., Wanner G. Solving Ordinary Differential Equations II / Stiff and Differential-Algebraic Problems. – Heidelberg: Springer, 1996.
7. Темам Р. Уравнения Навье-Стокса. Теория и численный анализ. – М.: Мир, 1981.
8. Glowinski R. Splitting methods for the numerical solution of the incompressible Navier-Stokes equations. In: Vistas in Applied Mathematics. Numerical Analysis. Atmospheric Sciences. Immunology. Ed. by Balakrishnan A.V., Dorodnitsyn A.A., Lions J.L. New York: Optimization Software. – 1986. – P.57–95.
9. Prohl A. Projection and Quasi-Compressibility Methods for Solving the Incompressible Navier-Stokes Equations. – Stuttgart: Teubner, 1997.
10. Mansfield L. On Finite Element Subspaces over Quadrilateral and Hexahedral Meshes for Incompressible Viscous Flow Problems. – Numer. Math. – 1984. – V.45. – P.165–172.
11. Turek S. Efficient Solvers for Incompressible Flow Problems. An Algorithmic and Computational Approach. – Berlin, Heidelberg: Springer, 1999.
12. Temam R. Some Developments on Navier-Stokes Equations in the Second Half of the 20^{th} Century. In: Development of Mathematics 1950-2000. Ed.: D.Serre. Basel: Birkhäuser, 2000. – P.1049–1106.
13. The Handbook of Fluid Dynamics. – N.Y.: CRC Press; Berlin, Heidelberg: Springer, 1998.
14. Ладыженская О.А. Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости. – М.: Физматгиз, 1961.

COMPUTATIONAL METHODS FOR NAVIER-STOKES EQUATIONS OF VISCOUS INCOMPRESSIBLE FLOW

V.V. Shaidurov

The paper contains a short state-of-art review of computational methods for solving Navier-Stokes equations of viscous incompressible flow. The finite element method is discussed as the main technique of discretization.