УДК 517.55

ДВУМЕРНЫЕ РАЗНОСТНЫЕ УРАВНЕНИЯ В НЕКОТОРЫХ ЗАДАЧАХ КОМБИНАТОРНОГО АНАЛИЗА[1]

Е.К.Лейнартас, Я.О.Тесленко*

В работе ставится и изучается краевая задача для двумерных разностных уравнений с постоянными коэффициентами.

Классическим приемом решения комбинаторных задач служит отыскание рекуррентного соотношения, которому удовлетворяет изучаемая величина, и последующее его решение. Одним из наиболее эффективных является при этом метод производящих функций, который в одномерном случае для рекуррентных соотношений с постоянными коэффициентами позволяет найти общее решение в форме линейной комбинации "элементарных решений" вида $f(x) = x^k\lambda^x$, где λ — корень характеристического многочлена. Многомерные рекуррентные соотношения изучены значительно хуже, хотя и встречаются в конкретных комбинаторных задачах (см., например, [3, 4]). Как правило, при этом возникают естественные "краевые" условия. Три примера такого рода приведены в данной работе. Эти примеры и послужили основанием для того, чтобы сформулировать задачу с краевыми условиями для двумерного разностного уравнения в общем виде. Введем необходимые обозначения и определения.

Обозначим $\mathbb{Z}^2_+$ — пространство целочисленных двумерных векторов с неотрицательными компонентами, $x = (x_1, x_2)$ — точки этого пространства, $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2)$ — мультииндексы, A — конечное множество мультииндексов $\{\alpha\} \in A \subset \mathbb{Z}^2_+$. *Двумерным линейным разностным уравнением* относительно неизвестной функции $f(x)$ назовем соотношение вида

$$\sum_{\alpha\in A} c_\alpha f(x+\alpha) = 0, x \in \mathbb{Z}^2_+ \tag{1}$$

где a_α — коэффициенты уравнения. *Многочлен* $P(\lambda) = \sum_{\alpha\in A} a_\alpha \lambda^\alpha$ называется *характеристическим*, $\lambda^\alpha = \lambda_1^{\alpha_1} \cdot \lambda_2^{\alpha_2}$, а уравнение

$$P(\lambda) = \sum_{\alpha\in A} c_\alpha \lambda^\alpha = 0 \tag{2}$$

— характеристическим для уравнения (1).

Корни характеристического уравнения в случае $n = 2$ образуют кривую в $\mathbb{C}^2$ (бесконечное число корней), поэтому искать решение в форме конечной суммы частных решений вида $\lambda^x = \lambda_1^{x_1} \cdot \lambda_2^{x_2}$ не представляется возможным.

На уравнение (1) наложим следующее ограничение: пусть $A = \{\alpha\}$ удовлетворяет условию $0 \le \alpha_1 \le m_1$ и $0 \le \alpha_2 \le m_2$, причем можно считать, что $c_{m_1 m_2} = 1$. Требуется найти неизвестную функцию $f(x)$, удовлетворяющую (1) и условиям

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2) &= \varphi_{x_2}(x_1), x_2 = 0, 1, \ldots, m_2 - 1, \\ f(x_1, x_2) &= \psi_{x_1}(x_2), x_1 = 0, 1, \ldots, m_1 - 1, \end{aligned} \tag{3}$$

где $\varphi_{x_2}, \psi_{x_1}$ — заданные функции целочисленного аргумента, причем выполнены условия их согласования:

$$\varphi_{x_2}(x_1) = \psi_{x_1}(x_2),\ 0 \le x_1 \le m_1 - 1,\ 0 \le x_2 \le m_2 - 1.$$

Обозначим $\mathbb{Z}^2_+ + (\alpha_1, \alpha_2)$ сдвиг множества $\mathbb{Z}^2_+$ на вектор (α_1, α_2), положим $S = \mathbb{Z}^2_+ \setminus (\mathbb{Z}^2_+ + (m_1, m_2))$ и определим функцию $s(x_1, x_2)$ следующим образом:

$$s(x_1, x_2) = \begin{cases} \psi_{x_1}(x_2), & 0 \le x_1 \le m_2 - 1, x_2 \text{ — любое}, \\ \varphi_{x_2}(x_1), & 0 \le x_2 \le m_2 - 1, x_1 \text{ — любое}, \\ 0, & \text{для остальных } x_1, x_2. \end{cases}$$

[1]Работа выполнена при поддержке РФФИ, грант 02-01-00167.
*©Е.К.Лейнартас, Я.О.Тесленко, Красноярский государственный университет, 2004.

Кроме того, обозначим $M = \{\mathbb{Z}_+^2 - (m_1, m_2)\} \setminus \mathbb{Z}_+^2$. Непосредственно проверяется, что $M = \{x \in \mathbb{Z}^2 : x \notin \mathbb{Z}_+^2$, но существует $\alpha \in A$ такое, что $x + \alpha \in S\}$.

Определим λ-преобразование функции целочисленного аргумента $f(x)$ формулой:

$$F(\lambda) = \sum_{x \in \mathbb{Z}_+^2} \frac{f(x)}{\lambda^{x+I}}, \text{ где } I = (1, \dots, 1).$$

Теорема 1. *Задача* (1), (3) *всегда имеет решение* $f(x)$ *и притом единственное.*

Доказательство. На множестве S функцию определим формулой $f(x_1, x_2) = s(x_1, x_2)$. Из уравнения (1) и условия $c_{m_1,m_2} = 1$ следует, что $f(x_1 + m_1, x_2 + m_2) = \sum\limits_{\alpha \in A, \alpha \neq (m_1, m_2)} c_\alpha f(x + \alpha)$, и, полагая $(x_1, x_2) = (0, 0)$, определяем значение f в точке $f(m_1, m_2)$. Далее последовательно вычисляем значения f в точках $(x_1 + m_1, x_2 + m_2)$, полагая $(x_1, x_2) = (0, p)$ и $(x_1, x_2) = (p, 0)$, где $p = 1, 2, 3, \dots$ На следующем шаге определяем значения f в точке $(m_1 + 1, m_2 + 1)$, а затем в точках $(m_1 + 1, m_2 + 1 + p)$ и $(m_1 + 1 + p, m_2 + 1)$ для $p = 1, 2, 3, \dots$

Очевидно, что таким образом определенная функция f является решением задачи (1), (3) и решение это единственное. □

Теорема 2. *λ-преобразование любого решения задачи* (1), (3) *имеет вид*

$$F(\lambda_1, \lambda_2) = \frac{K(\lambda_1, \lambda_2)}{P(\lambda_1, \lambda_2)}, \textit{ где } K(\lambda_1, \lambda_2) = \sum_{x \in M} \left[\sum_{\alpha \in A} c_\alpha S(x + \alpha) \right] \frac{1}{\lambda^{x+I}}.$$

Доказательство. Пусть $f(x)$ — решение задачи (1), (3) и $F(\lambda)$ — ее λ-преобразование. Умножим характеристический многочлен $P(\lambda)$ на $F(\lambda)$.

$$P(\lambda)F(\lambda) = \left(\sum_{\alpha \in A} c_\alpha f(x + \alpha) \right) \left(\sum_{x \in \mathbb{Z}_+^2} \frac{f(x)}{\lambda^{x+I}} \right) =$$

$$= \sum_{x \in \mathbb{Z}_+^2} \left(\sum_{\alpha \in A} c_\alpha f(x + \alpha) \right) \frac{1}{\lambda^{x+I}} + \sum_{x \in M} \left(\sum_{\alpha \in A} c_\alpha f(x + \alpha) \right) \frac{1}{\lambda^{x+I}}.$$

Так как $f(x)$ — решение (1), то первое слагаемое равно нулю. Поскольку $f(x)$ удовлетворяет начальным данным (3) и для $x \in M$ имеем $x + \alpha \in S$, то во второй сумме мы имеем $f(x + \alpha) = s(x + \alpha)$. Таким образом, $P(\lambda)F(\lambda) = K(\lambda)$. Это завершает доказательство. □

Применим теорему 2 к уравнениям, возникающим при решении некоторых комбинаторных задач.

Задача 1. Разностное уравнение для биномиальных коэффициентов имеет вид

$$f(x_1 + 1, x_2 + 1) - f(x_1, x_2 + 1) - f(x_1, x_2) = 0. \tag{4}$$

Требуется найти решение $f(x_1, x_2)$, удовлетворяющее условиям $f(x_1, 0) = \varphi(x_1)$, $f(0, x_2) = \psi(x_2)$, где φ, ψ — заданные функции целочисленного аргумента, $\varphi(0) = \psi(0)$.

λ-преобразование решения $f(x_1, x_2)$ имеет вид

$$F(\lambda_1, \lambda_2) = \frac{K(\lambda)}{\lambda_1 \lambda_2 - \lambda_2 - 1},$$

где

$$K(\lambda) = \sum_{x_1 \geq 0} \frac{\varphi(x_1)}{\lambda_1^{x_1}} - \sum_{x_1 \geq 0} \frac{\varphi(x_1)}{\lambda_1^{x_1+1}} + \sum_{x_1 \geq 0} \frac{\psi(x_2)}{\lambda_2^{x_2}} - \frac{\varphi(0) + \psi(0)}{2}.$$

Задача 2. Разностное уравнение для числа сочетаний с "успехами" (см. [3, с.54]) имеет вид

$$f(x_1 + 2, x_2 + 1) - (f x_1 + 1, x_2 + 1) - y f(x_1 + 1, x_2) - (1 - y) f(x_1, x_2) = 0,$$

здесь y — параметр.

Требуется найти решение $f(x_1,x_2)$, удовлетворяющее условиям $f(x_1,0)=\varphi(x_1)$, $f(0,x_2)=\psi_1(x_2)$, $f(1,x_2)=\psi_2(x_2)$, где φ,ψ_1,ψ_2 — заданные функции целочисленного аргумента.

λ-преобразование решения $f(x_1,x_2)$ имеет вид

$$F(\lambda)=\frac{K(\lambda)}{\lambda_1^2\lambda_2-\lambda_1\lambda_2-y\lambda_1-(1-y)},$$

где

$$K(\lambda)=\left(\lambda_1-1-\frac{y}{\lambda_2}\right)\sum_{x_2\geq 0}\frac{\psi_1(x_2)}{\lambda_2^{x_2}}+(\lambda_1-1)\sum_{x_1\geq 0}\frac{\varphi(x_1)}{\lambda_1^{x_1}}+\sum_{x_2\geq 0}\frac{\psi_2(x_2)}{\lambda_2^{x_2}}.$$

Задача 3. Эта задача формулируется как проблема абитуриента (см. [4, с.105]) и приводит к необходимости найти решение разностного уравнения

$$f(x_1+1,x_2+5)-f(x_1,x_2+2)-f(x_1,x_2+1)-f(x_1,x_2)=0,$$

удовлетворяющего следующим условиям:

$$f(0,x_2)=f(x_1,0)=f(x_1,1)=f(x_1,2)=0,\ \text{и}$$

$$f(x_1,3)=f(x_1,4)=\begin{cases}0, & x_1\neq 1\\ 1, & x_1=1\end{cases}$$

λ-преобразование решения $f(x_1,x_2)$ имеет вид

$$F(\lambda)=\frac{K(\lambda)}{\lambda_1\lambda_2^5-\lambda_2^2-\lambda_2-1},$$

где $K(\lambda)=(\lambda_2+1)/\lambda_1$.

Список литературы

[1] Лейнартас Д.Е. *О задаче Коши для многомерного разностного уравнения с постоянными коэффициентами*/ Д.Е.Лейнартас // Известия вузов. Математика. – 2002. – №1. – С. 79–80.

[2] Гельфонд А.О. *Исчисление конечных разностей* / А.О.Гельфонд. – М.: Гос. изд-во физ.-мат. лит., 1959.

[3] Риордан Дж. Комбинаторные тождества/ Дж.Риордан. – М.: Наука, 1972.

[4] Виленкин Н.Я. *Комбинаторика*/ Н.Я.Виленкин. – М.: Наука, 1969.

[5] Лейнартас Е.К. *Двумерные разностные уравнения в некоторых задачах комбинаторного анализа*/ Е.К.Лейнартас, Я.О.Тесленко // Многомерный комплексный анализ: Сб. тез. междунар. конф. / Краснояр. гос. ун-т. – Красноярск, 2002. – С. 26.

TWODIMENSIONAL DIFFERENCE EQUATIONS AND SOME PROBLEM OF THE COMBINATORIAL ANALYSIS

E.K.Leinartas, Y.O.Teslenko

We formulate and study the boundary-value problem for the linear twodimensional difference equation with constant coefficients.