УДК 515.172.6, 517.55

О ДВУМЕРНЫХ ТОРИЧЕСКИХ ПРЕДМНОГООБРАЗИЯХ[1]

А.В.Щуплев*

Каждое торическое многообразие кодируется некоторым веером (коническим полиэдром) так, что существует комбинаторное соответствие между конусами веера и разбиением многообразия на торы. Такие многообразия могут быть представлены в виде фактор-пространств аффинных множеств по действию группы, изоморфной тору.

В настоящей работе показано, что, стартуя с кратных вееров, можно строить торические предмногообразия (то есть многообразия без свойства хаусдорфовости), которые представляются в виде фактор-пространств по действию алгебраического тора. При этом в двумерном случае k-кратным конусам веера соответствуют "k-слипшиеся" торы.

Торические многообразия являются одним из наиболее хорошо изученных типов многообразий. По-видимому, впервые точное определение торического многообразия было дано М.Демазюром в начале 1970-х годов с точки зрения действия тора на многообразиях. Позднее был разработан целый ряд новых подходов к определению торического многообразия ([1], [2], [3], [4]). При помощи методов торической геометрии был получен ряд результатов в алгебраической геометрии и в теории гипергеометрических функций, в частности в работах В.Батырева и А.К.Циха.

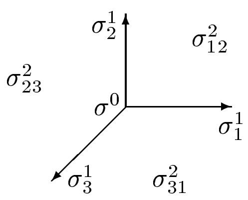
Торическое многообразие размерности n кодируется веером (симплициальным коническим полиэдром) $\Sigma \subset \mathbb{R}^n$. *Веером* (*коническим полиэдром*) Σ в $\mathbb{R}^n$ называется разбиение $\mathbb{R}^n$ на конусы с условиями: если некоторый конус входит в Σ, то и все его грани также входят в Σ; конусы из Σ могут пересекаться только по общим граням.

Обычная трактовка проективного пространства $\mathbb{P}^n$ как аффинного пространства с присоединенными к нему бесконечно удаленными точками скрывает единство подхода к определению торического многообразия. Целесообразнее компактифицировать не аффинное пространство, а его подмножество — тор $\mathbb{T}^n \simeq (\mathbb{C}\setminus\{0\})^n$. С этой точки зрения существует комбинаторное соответствие между разбиением $\mathbb{P}^n$ на торы различных размерностей и некоторым коническим полиэдром.

Например, у разбиения проективной плоскости на торы

$$\mathbb{CP}_2 = \mathbb{T}^2 \sqcup \mathbb{T}^1_1 \sqcup \mathbb{T}^1_2 \sqcup \mathbb{T}^1_3 \sqcup \mathbb{T}^0_{12} \sqcup \mathbb{T}^0_{23} \sqcup \mathbb{T}^0_{31}$$

(объединение дизъюнктное) есть двойственная интерпретация — веер.



При этом единственному двумерному тору $\mathbb{T}^2$ соответствует единственный 0-мерный конус σ^0, трем одномерным торам $\mathbb{T}^1_i$ — одномерные конусы σ^1_i, трем нульмерным торам $\mathbb{T}^0_{ij}$ — двумерные конусы σ^2_{ij}.

Наряду с этой трактовкой из синтетической геометрии существует другая, более алгебраическая, трактовка через введение однородных координат и построение аналитической геометрии; при этом

$$\mathbb{CP}_2 = (\mathbb{C}^3 \setminus \{0\})/_\sim$$

— множество комплексных прямых в $\mathbb{C}^3$, проходящих через точку 0. Нас интересует то, что это фактор-пространство по действию группы, изоморфной тору, имеющей представление в виде диагональных матриц.

В общем случае, если задан n-мерный веер Σ в $\mathbb{R}^n$, то ему сопоставляется n-мерное комплексное торическое многообразие X_Σ, при этом каждому k-мерному конусу в Σ соответствует единственный тор в X_Σ размерности $(n-k)$. Для этой конструкции также существует ее реализация на языке обобщенно-однородных координат как фактор-пространства $\mathbb{C}^m \setminus Z$ (m – число 1-мерных конусов в

[1]Работа выполнена при поддержке гранта Минобразования, С.-Петербург, № Е02-1-138.

веере Σ) по действию группы G [4]. При этом аналитическое множество Z и группа G, изоморфная $\mathbb{T}^m$, определяются в терминах веера Σ.

Ввиду того, что с торическими многообразиями удобно работать, доводя вычисления до окончательных формул, различными авторами предпринимались попытки расширить это понятие, сохранив при этом комбинаторное соответствие между многообразием и некоторым коническим полиэдром или его обобщением. В одном случае класс торических многообразий расширяется за счет рассмотрения вещественных унитарных торических многообразий и ассоциированных с ними мульти-вееров, конусы которых могут накладываться друг на друга [5], во втором [6] предъявляются торические предмногообразия и связанные с ними системы вееров.

Определение 1. *Торическое предмногообразие* — это многообразие, возможно нехаусдорфовое, вместе с эффективным действием алгебраического тора на нем, имеющим всюду плотную орбиту.

Следует отметить, что впервые понятие торического предмногообразия появилось в статье [7], в которой показано, что каждое нормальное многообразие над алгебраически замкнутым полем допускает замкнутое вложение в торическое предмногообразие, что позволяет считать торические предмногообразия естественными объектами алгебраической геометрии.

В настоящей работе показывается, что кратным веерам над $\mathbb{R}^2$ могут быть сопоставлены двумерные торические предмногообразия, которые представляются в виде фактор-пространств по действию группы, изоморфной тору. Более того, верна теорема, утверждающая, что торическое предмногообразие, ассоциированное с кратным веером допускает разбиение на орбиты

$$X_{k\Sigma} = \mathbb{T}^2 \sqcup \left(\bigsqcup_{\substack{\sigma\in\Sigma \\ \dim\sigma>0}} \{k\} \times \mathbb{T}_\sigma^{2-\dim\sigma} \right),$$

где $\{k\}$ — топологическое пространство с k элементами и дискретной топологией, причем топология предмногообразия такова, что торы размерности меньшей двух "подклеиваются" к $\mathbb{T}^2$ в виде "слипшихся" орбит.

1. Конструкция торического предмногообразия по кратному вееру

1. Определения

Пусть Σ — полный симплициальный примитивный веер Σ в $\mathbb{R}^2$, то есть веер, обладающий свойствами:

a) $\bigcup_{\sigma\in\Sigma} = \mathbb{R}^2$ (условие полноты);

b) каждый конус веера является заостренным (не содержит линейного подпространства) и число ребер в нем равно его размерности (условие симплициальности);

c) одномерные образующие каждого конуса максимальной размерности можно выбрать такими, чтобы они являлись базисом решетки $\mathbb{Z}^2$ (условие примитивности).

Рассмотрим веер Σ, одномерные конусы которого порождены целочисленными векторами $v^1, \ldots, v^m$, обойденный k раз. Этот веер можно интерпретировать как веер на k-листной римановой поверхности с точкой ветвления в начале координат, проекция которого на $\mathbb{R}^2$ совпадает с Σ. Занумеруем одномерные конусы веера в порядке их обхода против часовой стрелки. При каждом новом обходе конусов веера Σ каждый одномерный конус получает новый номер. Будем нумеровать одномерные конусы, чьи проекции на $\mathbb{R}^2$ совпадают, номерами, сравнимыми по модулю m. Таким образом, получим mk одномерных конусов. Естественно считать, что одномерные конусы порождены векторами $v^1, \ldots, v^{mk}$. Будем считать, что двумерные конусы $\sigma_{i,\,i+1}$ порождены векторами v^i и v^{i+1} (при этом $v^{mk+1} = v^1$). Обозначим такой веер $k\Sigma$. При данном подходе каждый конус ненулевой размерности в Σ входит в веер $k\Sigma$ ровно k раз.

Определение 2. Пусть Σ — полный симплициальный примитивный веер в $\mathbb{R}^2$. Веер $k\Sigma$, $k \in \mathbb{N}$, полученный k-кратным поднятием Σ на риманову поверхность функции $\sqrt[k]{w}$, будем называть *кратным веером над* $\mathbb{R}^2$.

Следует отметить, что при $k = 1$ кратный веер, конечно, совпадает с веером в традиционном понимании. Кроме того, кратный веер является мульти-веером и не может быть представлен в виде системы вееров.

В классическом случае [4] аналитическое множество Z определяется как

$$Z = \{z \in \mathbb{C}^m : z^{\widehat{\sigma}} = \prod_{\rho \notin \sigma(1)} z_\rho = 0 \quad \forall \sigma \in \Sigma\},$$

где $\sigma(1)$ – множество одномерных конусов, образующих σ; а группа $G \subset \mathbb{T}^m$, действующая в $\mathbb{C}^m \setminus Z$, как

$$G = \left\{ g = (\lambda_1^{\mu_1^1} \dots \lambda_{m-n}^{\mu_1^{m-n}}, \dots, \lambda_1^{\mu_m^1} \dots \lambda_{m-n}^{\mu_m^{m-n}}) : \lambda \in \mathbb{T}^{m-n} \right\},$$

где μ_i^j – коэффициенты линейно независимых соотношений над $\mathbb{Z}$ между образующими всех одномерных конусов веера Σ:

$$\mu_1^j v^1 + \dots + \mu_m^j v^m = 0. \tag{1}$$

Определим множество Z' и группу G' для веера $k\Sigma$ по аналогии с этими определениями, но при этом будем исходить из образующих одномерных конусов веера $v^1, \dots, v^{mk}$.

Множество Z' в нашем случае можно записать как $Z' = \bigcup\limits_{1<|i-j|<mk-1} \{z'_i = z'_j = 0\}$.

Построим группу $G' \subset \mathbb{T}^{mk}$, действующую в $\mathbb{C}^{mk} \setminus Z'$. Кроме соотношений (1) необходимо добавить соотношения $v^i - v^{i+tm} = 0$, где $t = 1, \dots, k-1$. Всего соотношений $m-2+m(k-1) = mk-2$. Запишем коэффициенты всех соотношений в матрицу размером $(mk-2) \times mk$:

$$\begin{pmatrix}
\mu_1^1 & \mu_2^1 & \dots & \mu_m^1 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
\mu_1^{m-2} & \mu_2^{m-2} & \dots & \mu_m^{m-2} & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
1 & 0 & \dots & 0 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots \\
1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 0 & \dots \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
0 & 1 & \dots & 0 & 0 & -1 & \dots & 0 & 0 & \dots \\
0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -1 & \dots \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots
\end{pmatrix}.$$

В итоге каждый элемент группы $G' \simeq \mathbb{T}^{mk-2}$ можно записать следующим образом:

$$\begin{aligned}
g' = (&\lambda_1^{\mu_1^1} \dots \lambda_{m-2}^{\mu_1^{m-2}} \lambda_{m-2+1} \dots \lambda_{m-2+k-1}, \\
&\lambda_1^{\mu_2^1} \dots \lambda_{m-2}^{\mu_2^{m-2}} \lambda_{m-2+k} \dots \lambda_{m-2+2k-2}, \dots, \\
&\lambda_1^{\mu_m^1} \dots \lambda_{m-2}^{\mu_m^{m-2}} \lambda_{mk-2-(k-2)} \dots \lambda_{mk-2}, \\
&\lambda_{m-2+1}^{-1}, \lambda_{m-2+k}^{-1}, \dots, \lambda_{mk-2-(k-2)}^{-1}, \\
&\lambda_{m-2+2}^{-1}, \lambda_{m-2+k+1}^{-1}, \dots, \lambda_{mk-2-(k-3)}^{-1}, \dots, \\
&\lambda_{m-2+(k-1)}^{-1}, \lambda_{m-2+2(k-1)}^{-1}, \dots, \lambda_{mk-2}^{-1}).
\end{aligned}$$

Дадим определение:

Определение 3. *Торическим предмногообразием $X_{k\Sigma}$, ассоциированным с кратным веером $k\Sigma$*, назовем фактор-пространство ${(\mathbb{C}^{mk} \setminus Z')}/{G'}$.

Докажем корректность определения $X_{k\Sigma}$.

Предложение. *Определение пространства $X_{k\Sigma}$ корректно.*

Доказательство. Для доказательства корректности определения достаточно показать, что через каждую точку $\mathbb{C}^{mk} \setminus Z'$ проходит единственная орбита действия группы G, не пересекающая Z'. Пусть через точку $z \in \mathbb{C}^{mk} \setminus Z'$ проходит две различные орбиты, то есть существуют $g_1, g_2 \in G'$ такие, что не существует никакого $g_3 \in G'$, что $g_1 \cdot z = g_3 \cdot (g_2 \cdot z)$. Однако для любых $g_1, g_2 \in G'$ в качестве g_3 можно взять $g_1 g_2^{-1} \in G'$.

Покажем, что орбиты действия G' не пересекают Z'. Это легко следует из того, что $G' \subset \mathbb{T}^{mk}$. Орбиты точек из торической части $\mathbb{C}^{mk} \setminus Z'$ полностью лежат в ней. Если j-я координата точки z' равна нулю, то j-е координаты точек орбиты, проходящей через z', также равны нулю, а остальные ненулевые, то есть орбита точки z' не пересекает Z'. Если у точки из $\mathbb{C}^{mk} \setminus Z'$ две координаты z'_j и z'_{j+1} равны нулю, то ее орбита полностью лежит в плоскости $\{z'_j = z'_{j+1} = 0\} \subset \mathbb{C}^{mk} \setminus Z'$. □

2. Формулировка и доказательство теоремы

Теорема. *Пусть Σ — полный симплициальный примитивный веер в $\mathbb{R}^2$. Тогда $X_{k\Sigma}$ обладает структурой торического предмногообразия и допускает разбиение на орбиты*

$$X_{k\Sigma} = \mathbb{T}^2 \sqcup \left(\bigsqcup_{\substack{\sigma \in \Sigma \\ \dim \sigma > 0}} \{k\} \times \mathbb{T}_\sigma^{2-\dim \sigma} \right),$$

где $\{k\}$ — топологическое пространство с k элементами и дискретной топологией.

Доказательство. Определим отображение из $\mathbb{C}^{mk} \setminus Z'$ на $\mathbb{C}^m \setminus Z$ следующей формулой:

$$(z'_1, \dots, z'_{mk}) \longmapsto (z'_1 z'_{m+1} z'_{2m+1} \dots z'_{m(k-1)+1}, \dots, z'_m z'_{2m} \dots z'_{mk}). \qquad (2)$$

Отметим, что отображение определено корректно. Точка z из $\mathbb{C}^{mk} \setminus Z'$ с координатами $z'_j = z'_{j+1} = 0$ переходит при отображении в точку $z \in \mathbb{C}^m \setminus Z$, так как из всех ее координат равны нулю только $z_{(j \mod m)}$ и $z_{(j+1 \mod m)}$.

Прообразами точки $z \in \mathbb{C}^m \setminus Z$, одна из координат которой $z_j = 0$, в $\mathbb{C}^{mk} \setminus Z'$ являются k точек z'^s, $s = 0, \dots, k-1$, из всех координат которых равны нулю только z'^s_{j+sm}. У точки $z \in \mathbb{C}^m \setminus Z$, две из координат которой $z_j = z_{j+1} = 0$, в $\mathbb{C}^{mk} \setminus Z'$ ровно k прообразов – точки z'^s, $s = 0, \dots, k-1$, из всех координат которых равны нулю только z'^s_{j+sm} и z_{j+1+sm}.

Действие G' в $\mathbb{C}^{mk} \setminus Z'$ индуцирует действие в $\mathbb{C}^m \setminus Z$, совпадающее с действием группы G. Действительно, если $z'_1 = g' \cdot z'_2$ в $\mathbb{C}^{mk} \setminus Z'$, а z_1 и z_2 – образы z'_1 и z'_2 соответственно, то существует $g \in G$ такое, что $z_1 = g \cdot z_2$. Элемент g однозначно определяется по g'.

Любая орбита $G'(z'_1, \dots, z'_{mk})$, где $(z'_1, \dots, z'_{mk}) \in \mathbb{T}^{mk}$, однозначно определяется точкой $(z'_1, z'_2, 1, \dots, 1)$. Действительно, получающаяся при этом система уравнений на $\lambda \in \mathbb{T}^{mk-2}$ всегда разрешима за счет линейной независимости (1). Это означает, что прообразом каждой орбиты действия G в $\mathbb{T}^m$ при отображении (2) является единственная орбита действия G' в $\mathbb{T}^{mk}$. Однако у орбит в $\mathbb{C}^m \setminus Z$, образующих в X_Σ торы размерности, меньшей двух, с учетом вышеприведенных рассуждений, ровно k прообразов. Следовательно, фактор-пространство $X_{k\Sigma}$ допускает разбиение:

$$X_{k\Sigma} = \mathbb{T}^2 \sqcup \left(\bigsqcup_{\substack{\sigma \in \Sigma \\ \dim \sigma > 0}} \{k\} \times \mathbb{T}_\sigma^{2-\dim \sigma} \right).$$

Фактор-пространство $X_{k\Sigma}$ покрывается системой окрестностей $\{U_{\sigma^{(2)}} : \sigma^{(2)} \in \Sigma\}$. Обозначим $z'^{(i)} = (z'_{1+m(i-1)}, z'_{2+m(i-1)}, \dots, z'_{mi})$, $i = 1, \dots, k$. Считая один из конусов веера за положительный квадрант $\mathbb{R}^2_+$ (не ограничивая общности, пусть это будет конус, порожденный v^1 и v^2), в торе $\bigcap\limits_{\sigma = \sigma^{(2)}} U_\sigma \simeq \mathbb{T}^2$ можно задать систему координат

$$w = [z'^{(1)}]^V \dots [z'^{(k)}]^V, \qquad (3)$$

где $[z'^{(i)}]^V$ обозначает

$$\left(z'_{1+m(i-1)} z'^{v_1^{3+m(i-1)}}_{3+m(i-1)} \dots z'^{v_1^{mi}}_{mi},\ z'_{2+m(i-1)} z'^{v_2^{3+m(i-1)}}_{3+m(i-1)} \dots z'^{v_2^{mi}}_{mi}\right).$$

Функции перехода между координатными окрестностями следующие: в окрестности U_σ, где конус $\sigma \in \Sigma$ порожден векторами $v^{j_1}, \dots, v^{j_n}$, действуют локальные координаты $y = [z'^{(1)}]^{C_J^{-1}V} \dots [z'^{(k)}]^{C_J^{-1}V}$ (столбцы матрицы C_J образованы координатами векторов $v^{j_1}, \dots, v^{j_n}$). Таким образом, при $k = 1$ пространство $X_{k\Sigma}$ обладает структурой гладкого многообразия, а при $k > 1$ становится нехаусдорфовым, то есть является торическим предмногообразием. □

2. Примеры

1. Рассуждения, подобные приведенным выше, можно провести и для единственного полного примитивного симплициального веера в $\mathbb{R}$ — веера, соответствующего сфере Римана, обойденного два раза. Целочисленные образующие его одномерных конусов: $v^1 = 1$, $v^2 = -1$, $v^3 = 1$, $v^4 = -1$.

Обозначим этот веер через 2Σ.

В данном случае Z' — это подмножество в $\mathbb{C}^4$ — объединение всех координатных плоскостей коразмерности 2:

$$Z' = \{z_1 = z_2 = 0\} \cup \{z_1 = z_3 = 0\} \cup \{z_1 = z_4 = 0\} \cup \\ \cup \{z_2 = z_3 = 0\} \cup \{z_2 = z_4 = 0\} \cup \{z_3 = z_4 = 0\},$$

а элементы группы G' представляются в виде $g' = (\lambda_1\lambda_2,\, \lambda_1\lambda_3,\, \lambda_2^{-1},\, \lambda_3^{-1}),\ \lambda \in \mathbb{T}^3$.

Под действием G' множество $\mathbb{C}^4 \setminus Z'$ расслаивается на непересекающиеся орбиты вида $\{z \in \mathbb{C}^4 \setminus Z' : z_1z_3 - yz_2z_4 = 0\}$, где $y \in \mathbb{T}^1$, то есть $X_{2\Sigma}$ содержит тор $\mathbb{C}_*$ как всюду плотное подмножество, и y — локальная координата в нем. Для $y = 0$ в $\mathbb{C}^4 \setminus Z'$ существует две орбиты: $\{z_1 = 0\}$ и $\{z_3 = 0\}$, то есть в $X_{2\Sigma}$ получаем две точки с координатой $y = 0$, любые окрестности которых пересекаются. Делая замену $y = \dfrac{1}{w}$, для $w = 0\,(y = \infty)$ аналогично получаем вторую точку, в которой нарушается хаусдорфовость. Таким образом, $X_{2\Sigma}$ является сферой Римана, две точки которой, а именно 0 и ∞, входят с кратностью два.

2. Пусть дан веер проективной плоскости Σ (см. рис.), обойденный два раза. Образующие его одномерных конусов следующие

$$v^1 = (1,\,0),\quad v^2 = (0,\,1),\, v^3 = (-1,\,-1),\quad v^4 = (1,\,0),\quad v^5 = (0,\,1),\quad v^6 = (-1,\,-1).$$

Рассматривая веер 2Σ на двулистном накрытии $\mathbb{R}^2 \simeq \mathbb{C}$ с точкой ветвления $(0,\,0)$, двумерными конусами будем считать конусы, натянутые на векторы v^i и v^{i+1} ($v^7 = v^1$). Тогда веер 2Σ определяет следующее аналитическое множество:

$$\begin{aligned} Z' =&\{z_1 = z_3 = 0\} \cup \{z_1 = z_4 = 0\} \cup \{z_1 = z_5 = 0\} \cup \\ \cup&\{z_2 = z_4 = 0\} \cup \{z_2 = z_5 = 0\} \cup \{z_2 = z_6 = 0\} \cup \\ \cup&\{z_3 = z_5 = 0\} \cup \{z_3 = z_6 = 0\} \cup \{z_4 = z_6 = 0\}. \end{aligned}$$

Между образующими существует 4 линейно независимых соотношений над $\mathbb{Z}$, и группа, определяемая коэффициентами этих соотношений, есть $G' = \left\{g = (\lambda_1\lambda_2, \lambda_1\lambda_3,\, \lambda_1\lambda_4,\, \lambda_2^{-1}, \lambda_3^{-1}, \lambda_4^{-1}) :\ \lambda \in \mathbb{T}^4\right\}$.

Под действием G' множество $\mathbb{C}^6 \setminus Z'$ расслаивается на орбиты вида

$$\left\{ z \in \mathbb{C}^6 \setminus Z' : \begin{cases} z_1z_4 - yz_2z_5 = 0, \\ z_3z_6 - wz_2z_5 = 0, \end{cases} \quad \text{где } (y,\,w) \in \mathbb{T}^2 \right\}. \tag{4}$$

Координатами в торической части предмногообразия $\mathbb{T}^2 \subset X_{2\Sigma} = {(\mathbb{C}^6 \setminus Z')}/{G'}$ служат $y = \dfrac{z_1z_4}{z_2z_5}$ и $w = \dfrac{z_3z_6}{z_2z_5}$.

Чтобы определить координаты в $X_{2\Sigma}$ орбит, лежащих в $\{z_2z_5 = 0\}$, необходимо сделать замену $y = \dfrac{1}{u}$, $w = \dfrac{v}{u}$. Получаем, что орбита представляет собой пересечение

$$\begin{cases} z_2z_5 - uz_1z_4 = 0, \\ z_3z_6 - vz_1z_4 = 0 \end{cases}$$

и локальные координаты орбиты $u = \dfrac{z_2z_5}{z_1z_4}$ и $v = \dfrac{z_3z_6}{z_1z_4}$, что согласуется с (3).

Для определения координат орбит, лежащих в $\{z_1z_4 = 0,\, z_2z_5 = 0\}$ необходимо сделать замену $y = \dfrac{k}{l}$, $w = \dfrac{1}{l}$. Тогда локальные координаты орбиты — это $k = \dfrac{z_1z_4}{z_3z_6}$ и $l = \dfrac{z_2z_5}{z_3z_6}$. Нетрудно проверить, что любая орбита имеет конечные координаты хотя бы в одной из трех координатных окрестностей.

Уравнения орбит, чьи координаты в какой-либо координатной окрестности лежат в торе $\mathbb{T}^2$, однозначно определяются из (4) и функций перехода между координатами. Рассмотрим координатную окрестность с координатами (y, w). Если координата $y = 0$, то для любого $w \in \mathbb{T}$ в $\mathbb{C}^6 \setminus Z'$ существует две орбиты: $\{z_1 = 0,\ z_3z_6 - wz_2z_5 = 0\}$ и $\{z_4 = 0,\ z_3z_6 - wz_2z_5 = 0\}$, то есть каждая точка с координатами $(0, w)$, $w \in \mathbb{T}$ входит в многообразие два раза. Аналогично $(y, 0)$, $y \in \mathbb{T}$ входят в многообразия по два раза. Однако для точки $(0, 0)$ в $\mathbb{C}^6 \setminus Z'$ существует также две, а не четыре орбиты: $\{z_1 = z_2 = 0\}$ и $\{z_4 = z_5 = 0\}$.

Подобная ситуация складывается и в остальных координатных окрестностях, но с учетом функций перехода между координатами в пересечении окрестностей получаем, что в $X_{2\Sigma}$ один двумерный тор, три одномерных тора в виде с кратностью два и три нульмерных тора-точки также с кратностью два. Из вида функций перехода между координатными окрестностями следует, что без учета кратностей точек $X_{2\Sigma}$ является комплексной проективной плоскостью.

Изучим индуцированную топологию в окрестности точки с кратностью 2. Пусть точка имеет координаты $z = 0$ и $w = 1$. Этой точке в пространстве $\mathbb{C}^6 \setminus Z'$ соответствуют две орбиты: $\{z_1 = 0,\ z_3z_6 - z_2z_5 = 0\}$ и $\{z_4 = 0,\ z_3z_6 - z_2z_5 = 0\}$. Однако непрерывным образом попасть из одной точки в другую можно только выйдя в торическую часть многообразия.

В точке с координатами $y = 0$ и $w = 0$ пересекается два одномерных тора с кратностью два: $\{y = 0\}$ и $\{w = 0\}$. В $\mathbb{C}^6 \setminus Z'$ этим торам соответствуют подмножества $\{z_1 = 0\}$ и $\{z_4 = 0\}$, $\{z_3 = 0\}$ и $\{z_6 = 0\}$. В пространстве $\mathbb{C}^6 \setminus Z'$ они пересекаются только по орбитам двух точек, поэтому, если не выходить в торическую часть (двумерную), то из одномерного тора, соответствующего $\{z_1 = 0\}$, непрерывным образом можно попасть только в одномерный тор, соответствующий $\{z_6 = 0\}$, а из тора, соответствующего $\{z_3 = 0\}$, — только в тор, соответствующий $\{z_4 = 0\}$. Аналогичная ситуация и в других нульмерных торах-точках.

Список литературы

[1] Хованский А.Г. *Многогранники Ньютона (разрешение особенностей)* /А.Г. Хованский// Итоги науки и техники. Современные проблемы математики. – М.: ВИНИТИ, 1983. – Т.22. – С. 207–239.

[2] Oda T. *Convex Bodies and Algebraic Geometry*/ T. Oda. – Berlin et al. Springer-Verlag, 1988.

[3] Fulton W. *Introduction to Toric Varieties*/ W.Fulton // Annals Math. Stud. – 1993. – V.131. – Princeton University Press.

[4] Cox D.A. *The Homogeneous Coordinate Ring of a Toric Variety*/D.A. Cox// J. Algebraic Geom. – 1995. – №4. – P. 17–55.

[5] Masuda M. *Unitary toric manifolds, multi-fans and equivariant index*/ M. Masuda// Tohoku Math. J. – 1999. – V. 5. – №2. – P. 237–265.

[6] A'Campo-Neuen A. *Toric prevarieties and subtorus actions*/ A. A'Campo-Neuen, J. Hausen// Geom. Dedicata. – 2001. – V. 87. – №1-3. – P. 35–64.

[7] Włodarczyk J. *Embeddings in toric varieties*/J. Włodarczyk// J. Algebrac Geom. – 1993. – №2. – P. 705–726.

[8] Щуплев А.В. *Нехаусдорфовы торические многообразия с кратными веерами над* $\mathbb{R}^2$ /А.В. Щуплев// Труды Межд. конф. "Математические модели и методы их исследования". Красноярск: ИВМ СО РАН. – 2001. – Т.2. – С. 299–302.

ON TWO-DIMENSIONAL TORIC PREVARIETIES

A.V.Shchuplev

Every toric variety is coded by a fan (conic polyhedron) in such a way that there is a combinatoric correspondence between cones of the fan and the subdivision of a variety into tori. Such varieties can be represented as quotient spaces of affine sets by the action of the group isomorphic to the algebraic torus.

In the article it is demonstrated that starting with multiple fans one can construct toric prevarieties (i.e. possibly non-Hausdorff varieties), which are represented as quotient spaces by the action of the algebraic torus. In this representation multiple cones of the multiple fan correspond to "adhering" tori of the prevariety.