

РАСЧЕТ ФУНКЦИИ ГРИНА СПИНОВЫХ ВОЛН
В ФЕРРОМАГНЕТИКЕ С НЕОДНОРОДНОЙ МАГНИТНОЙ АНИЗОТРОПИЕЙ

В.А. Игнатченко, В.А. Фельк*

Проведен приближенный расчет функции Грина спиновых волн для модели ферромагнетика с одномерными неоднородностями величины магнитной анизотропии. Для расчёта использовались два принципиально различных подхода: прямое интегрирование выражения для массового члена функции Грина в самосогласованном приближении и решение интегрального уравнения, соответствующего этому приближению. Показано, что учёт процессов рассеяния высоких порядков кардинально изменяет выражение для ширины кривой резонанса спиновых волн, полученное ранее в ряде работ с учётом только процессов рассеяния первого порядка.

Модификация закона дисперсии и затухание спиновых волн, обусловленные неоднородностью магнитной анизотропии для неоднородностей с конечным радиусом корреляции, впервые рассмотрены в работе [1]. При этом исследовалось влияние как неоднородностей величины анизотропии, так и неоднородностей ориентации оси анизотропии. Как в этой, так и в ряде последующих работ [2, 3] исследование проводилось в первом приближении теории возмущений по параметру среднеквадратичной флуктуации анизотропии. В этом же приближении были исследованы модификации спектра и затухание спиновых волн при неоднородности других параметров ферромагнетика: обмена [1], намагниченности [4], магнитоупругого взаимодействия [5]. Сравнение полученных результатов с экспериментом показало, что модификация законов дисперсии вполне удовлетворительно описывается в использованном приближении. Эти работы послужили теоретической основой для развития экспериментального метода, позволяющего определять корреляционные радиусы неоднородностей из измеренных модификаций закона дисперсии спиновых волн [6]. В то же время вычисленное в этих работах затухание спиновых волн не описывало измеренные экспериментально ширины линий спин-волнового резонанса [7, 8]. Причины такого расхождения между теорией и экспериментом заключаются в том, что влияние неоднородностей на ширину резонансной линии не может быть найдено в рамках первого приближения теории возмущений — требуется учет процессов многократного рассеяния спиновых волн на неоднородностях, которые описываются соответствующей функцией Грина.

Целью настоящей работы является развитие метода приближенного расчета функции Грина спиновых волн для простейшей модели ферромагнетика с одномерными неоднородностями величины магнитной анизотропии (ориентация оси анизотропии предполагается однородной).

Динамика ферромагнитной среды описывается уравнением Ландау–Лифшица

$$\dot{\mathbf{M}} = -g [\mathbf{M} \times \mathbf{H}_{eff}] \quad (1)$$

где \mathbf{M} – намагниченность, g – гиромагнитное отношение, \mathbf{H}_{eff} – эффективное магнитное поле, которое определяется выражением:

$$\mathbf{H}_{eff} = -\frac{\partial \mathfrak{K}}{\partial \mathbf{M}} + \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \frac{\partial \mathfrak{K}}{\partial (\partial \mathbf{M} / \partial \mathbf{x})}. \quad (2)$$

Плотность энергии выбираем в виде:

$$\mathfrak{K} = \frac{1}{2} \alpha \left(\frac{\partial \mathbf{M}}{\partial \mathbf{x}} \right)^2 - \frac{1}{2} \beta (\mathbf{M} \mathbf{b})^2 - \mathbf{M} \mathbf{H}, \quad (3)$$

где α – константа обмена, β – величина анизотропии, \mathbf{b} – направление оси анизотропии. Считая величину анизотропии зависящей от координат $\mathbf{x}=(x,y,z)$, представим ее в виде:

$$\beta(\mathbf{x}) = \beta [1 + \gamma \rho(\mathbf{x})], \quad (4)$$

где β – среднее значение анизотропии, γ – ее относительная среднеквадратичная флуктуация.

Направления \mathbf{H} и \mathbf{b} выбираются вдоль оси z , совпадающей с направлением распространения спиновой волны. Линеаризуя уравнение (1) обычным образом ($M_z \approx M; M_x, M_y \ll M$) и полагая $M_x, M_y \propto e^{i\omega t}$, получим для резонансной циркулярной проекции $m = M_x + iM_y$ уравнение:

$$\nabla^2 m + [v - \varepsilon \rho(\mathbf{x})] \cdot m = 0, \quad (5)$$

где введены обозначения $\nu = \frac{\omega - \omega_0}{\alpha g M}$, $\varepsilon = \frac{\gamma \beta}{\alpha}$, $\omega_0 = g(H + \beta M)$. (6)

Введя функцию Грина $G(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0)$, перепишем уравнение (5) в виде:

$$\nabla^2 G(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0) + [\nu - \varepsilon \rho(\mathbf{x})]G(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0) = \nu_h \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0), \quad (7)$$

где ν_h - константа размерности частоты.

Проводя преобразование Фурье, получим уравнение для Фурье-трансформанты функции Грина $G_{\mathbf{k}}$:

$$(\nu - k^2)G_{\mathbf{k}} = \varepsilon \int G_{\mathbf{k}_1} \rho_{\mathbf{k}-\mathbf{k}_1} d\mathbf{k}_1 + \nu_h e^{i\mathbf{k}\mathbf{x}_0}. \quad (8)$$

Усредняя (8) по случайным реализациям функции ρ , представим усреднённую функцию Грина $\langle G_{\mathbf{k}} \rangle$ в виде:

$$\langle G_{\mathbf{k}} \rangle = \frac{\nu_h e^{i\mathbf{k}\mathbf{x}_0}}{\nu - k^2 - M_{\mathbf{k}}}, \quad (9)$$

где $M_{\mathbf{k}}$ - массовый член, который в некотором приближении (self-consistent approximation) может быть представлен в виде бесконечной цепной дроби пропорциональных ε^2 интегральных выражений [9]:

$$M_{\mathbf{k}} \approx \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} \varepsilon^2 S(\mathbf{k} - \mathbf{k}_1) d\mathbf{k}_1}{\nu - k_1^2 - \varepsilon^2 \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} S(\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2) d\mathbf{k}_2}{\nu - k_2^2 - \varepsilon^2 \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} S(\mathbf{k}_2 - \mathbf{k}_3) d\mathbf{k}_3}{\nu - k_3^2 - \varepsilon^2 \int_{-\infty}^{+\infty} \dots}}}. \quad (10)$$

Здесь $S(\mathbf{k})$ - спектральная плотность, связанная с корреляционной функцией неоднородностей $K(\mathbf{r}) = \langle \rho(\mathbf{x})\rho(\mathbf{x}-\mathbf{r}) \rangle$ преобразованием Фурье (теорема Винера-Хинчина):

$$S(\mathbf{k}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int K(\mathbf{r}) e^{-i\mathbf{k}\mathbf{r}} d\mathbf{r}. \quad (11)$$

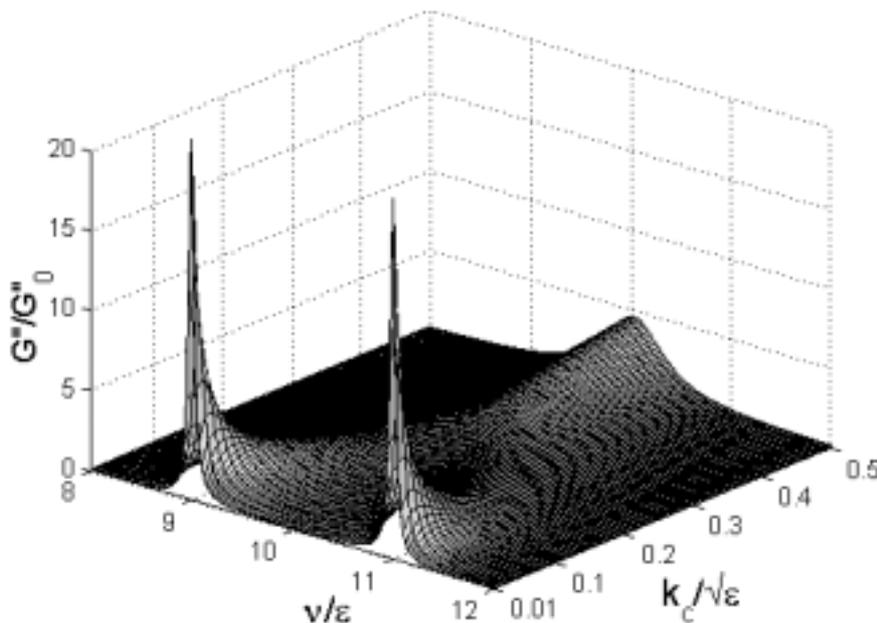


Рис.1. Зависимость G' от частоты ν для различных значений корреляционного волнового числа k_c в первом приближении по ε^2

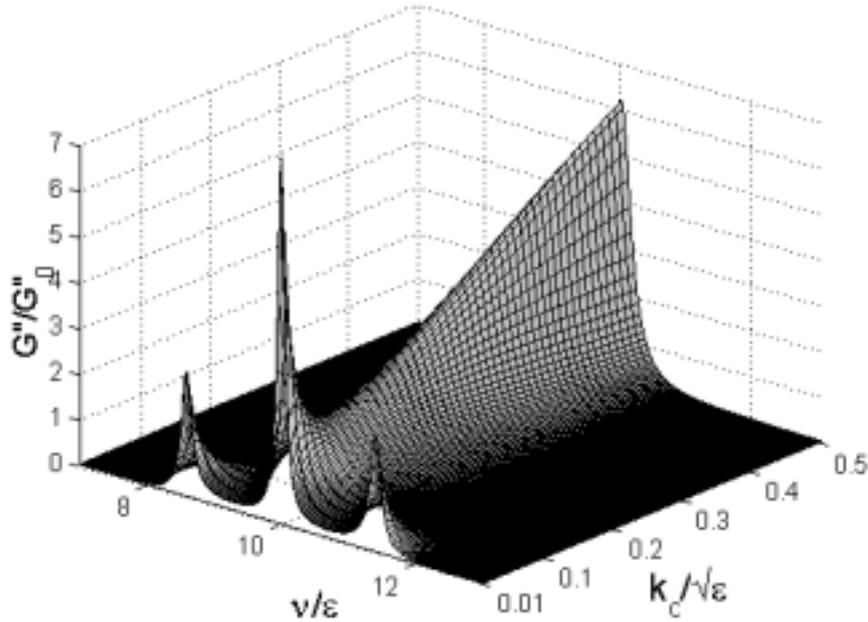


Рис.1. Зависимость G'' от частоты ν для различных значений корреляционного волнового числа k_c при учете двух звеньев цепной дроби

Дальнейший анализ будем вести для одномерных неоднородностей. Используем два способа получения приближённого выражения для M_k и G_k : последовательное интегрирование выражения (10) и приближённое решение интегрального уравнения, соответствующего этому выражению.

Корреляционную функцию моделируем в следующем виде:

$$K(x-x') = e^{-k_c|x-x'|}, \quad (12)$$

и, соответственно, для $S(k)$ получаем из формулы (11):

$$S(k) = \frac{1}{\pi} \frac{k_c}{k_c^2 + k^2}, \quad (13)$$

где k_c - корреляционное волновое число ($r_c=1/k_c$ - радиус корреляции случайной функции $\rho(x)$, описывающей неоднородности).

Ограничиваясь в формуле (10) первым членом цепочки дробей, пропорциональным ϵ^2 , получаем выражение для M_k в приближении Бурре [10]:

$$M_k \approx \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\epsilon^2 S(k-k_1) dk_1}{\nu - k_1^2}. \quad (14)$$

Подставляя сюда $S(k)$ в виде (13) и выполняя интегрирование с помощью теории вычетов, имеем:

$$M_k = \frac{\epsilon^2}{(\sqrt{\nu} - ik_c)^2 - k^2} \left(1 - \frac{ik_c}{\sqrt{\nu}} \right) \quad (15)$$

Подставим это выражение в формулу (9). В этом приближении мнимая часть функции Грина, которую мы будем при $x_0=0$ обозначать G'' , имеет вид, представленный на рис.1.

На рис.1 функция Грина нормирована на величину $G_0'' = \nu_h / \epsilon$; обоснование такого выбора нормировки дано в следующем разделе работы.

Обрывая цепочку дробей на втором интегральном члене, получаем:

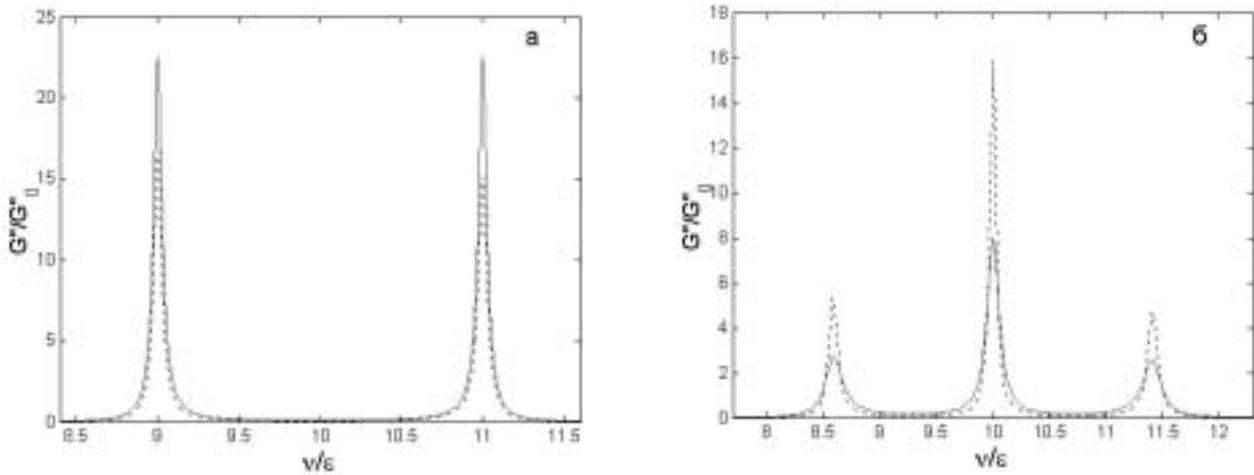


Рис.3. Зависимость G'' от v в первом (а) и втором (б) приближениях, полученных методом последовательного интегрирования (сплошные кривые) и методом приближённого решения интегрального уравнения (пунктирные кривые) для $k_c / \sqrt{\epsilon} = 10^{-2}$

$$M_k \approx \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\epsilon^2 S(k - k_1) dk_1}{v - k_1^2 - \epsilon^2 \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{S(k_1 - k_2) dk_2}{v - k_2^2}} \quad (16)$$

После подстановки в это выражение результата интегрирования по k_2 (15) с заменой $k \rightarrow k_1$ получаем:

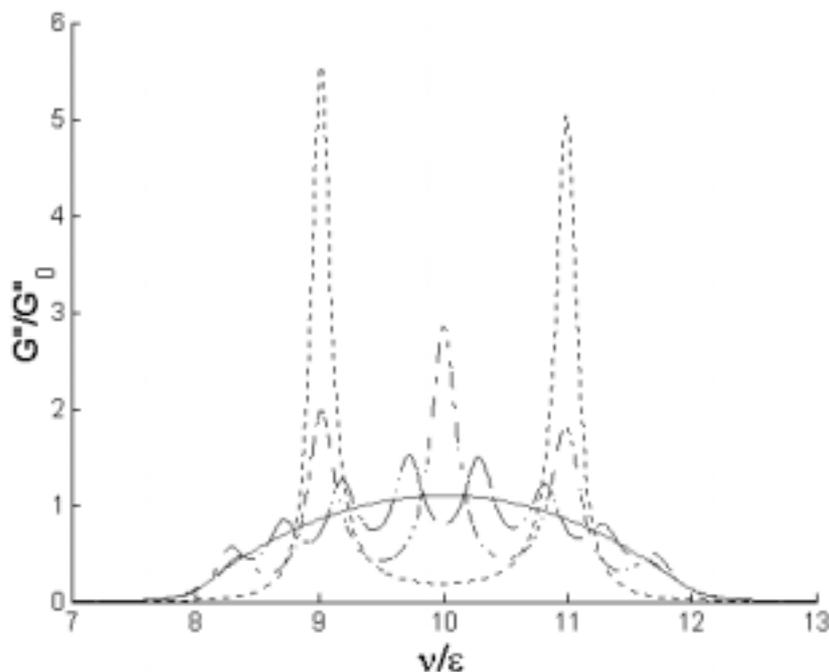


Рис.4. Зависимость G'' от v для $k_c / \sqrt{\epsilon} = 10^{-2}$ соответствующая выражению (22), вычисленному при различных приближениях. $n=1$ - пунктирная кривая, $n=2$ - штриховая кривая, $n=7$ - штрихпунктирная кривая, $n=\infty$ - сплошная кривая

$$M_k \approx \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\varepsilon^2 S(k-k_1) dk_1}{\nu - k_1^2 - \frac{\varepsilon^2}{(\sqrt{\nu} - ik_c)^2 - k_1^2} \left(1 - \frac{ik_c}{\sqrt{\nu}}\right)} \quad (17)$$

Интеграл в формуле (17) берется точно с помощью теории вычетов. Получается громоздкое выражение, позволяющее построить зависимость G'' от ν численно (рис.2).

Видно, что G'' в этом приближении имеет три резонансных пика. Получение дальнейших приближений для M_k методом прямого интегрирования сопряжено со значительными трудностями вычислительного характера.

Цепная дробь (10) может быть записана в виде замкнутого интегрального уравнения:

$$M_k = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\varepsilon^2 S(k-k_1) dk_1}{\nu - k_1^2 - M_{k_1}} \quad (18)$$

В пределе $k_c \rightarrow 0$ имеем $S(k-k_1) = \delta(k-k_1)$. Подставляя это значение в (18), получаем в этом пределе:

$$M_k = \frac{\varepsilon^2}{\nu - k^2 - M_k} \quad (19)$$

Предположим, что для достаточно малых, но не равных нулю k_c , отличие M_{k_1} под интегралом (18) от M_k мало и положим приближенно $M_{k_1} \approx M_k$. Тогда интегрирование в (18) может быть выполнено для произвольного M_k .

Проводя интегрирование, получим трансцендентное уравнение для M_k :

$$M_k = \frac{\varepsilon^2}{(\sqrt{\nu - M_k} - ik_c)^2 - k^2} \frac{\sqrt{\nu - M_k} - ik_c}{\sqrt{\nu - M_k}} \quad (20)$$

При условии $M_k / \nu \ll 1$, $k_c / \sqrt{\nu} \ll 1$ уравнение (20) переписется в виде:

$$M_k = \frac{\varepsilon^2}{\nu - k^2 - 2ik_c \sqrt{\nu - M_k}} \quad (21)$$

Видно, что этому соотношению соответствует цепная дробь вида:

$$M_k = \frac{\varepsilon^2}{\nu - k^2 - 2ik_c \sqrt{\nu} - \frac{\varepsilon^2}{\nu - k^2 - 2ik_c \sqrt{\nu} - \frac{\varepsilon^2}{\nu - k^2 - 2ik_c \dots}}} \quad (22)$$

Построим последовательные приближения выражения (22) (пунктирные кривые на рис. 3 а, б). Сплошные кривые на рис.3 соответствуют выражениям (15) и (17), полученным при точном интегрировании выражений (14) и (16). Видно, что выражение (22) передает приближенно зависимость G'' от ν . Поэтому мы можем воспользоваться этим выражением для исследования дальнейших приближений, которые мы не могли получить в разделе 3 методом прямого интегрирования (рис.4). Видно, что n -му приближению соответствует $n+1$ резонансных пиков на кривой $G''(\nu)$ (под номером приближения мы понимаем количество учтённых звеньев цепной дроби). С ростом n возрастает число пиков на кривой $G''(\nu)$ и уменьшаются их амплитуды. Численным интегрированием этих кривых по ν было показано, что площадь под кривой $G''(\nu)$ является константой, не зависящей от номера приближения (т.е. от числа пиков). Таким образом, для достаточно большого номера приближения огибающая пиков должна стремиться к некоторой предельной кривой. Эта кривая может быть построена при $n \rightarrow \infty$ (сплошная кривая на рис.4). Но она может быть получена гораздо проще. Дело в том, что выражение (21) представляет собой квадратное уравнение для M_k , решение которого имеет вид:

$$M_k = \frac{v - k^2}{2} - ik_c \sqrt{v} + i \cdot \left[\varepsilon^2 - \left(\frac{v - k^2}{2} + ik_c \sqrt{v} \right)^2 \right]^{1/2} \quad (23)$$

Подставляя (23) в (9) получаем приближенное аналитическое выражение для функции Грина в виде:

$$\langle G_k \rangle = \frac{v_h e^{ikx_0}}{\frac{1}{2}(v - k^2) + ik_c \sqrt{v} - i \cdot \left[\varepsilon^2 - \left(\frac{v - k^2}{2} + ik_c \sqrt{v} \right)^2 \right]^{1/2}} \quad (24)$$

Мнимая часть выражения (24) и является предельной кривой, соответствующей $n \rightarrow \infty$. Предельная кривая $G''(v)$ имеет один максимум, который при $k_c = 0$ находится в точке $v = k$ и имеет величину v_h/ε . Таким образом, при выбранной на всех рисунках нормировке величина G''/G_0 для предельной кривой при $k_c = 0$ и $v = k$ равна единице. На рис. 5 показана зависимость предельной кривой $G''(v)$ от k_c .

Известно, что в самосогласованном приближении функция Грина волнового уравнения в неоднородной среде может быть представлена в виде цепной дроби, звенья которой содержат интегральные члены, пропорциональные ε^2 , где ε - среднеквадратичная флуктуация неоднородностей. Проблема заключается в вычислении интегральных членов этой дроби, которое не может быть выполнено точно. В данной работе были использованы два метода приближённого вычисления: непосредственное интегрирование и приближённое решение интегрального уравнения, соответствующего цепной дроби.

Мы называем n -м приближением цепной дроби конечную цепочку из n звеньев этой дроби. Методом непосредственного интегрирования удалось вычислить аналитически функцию Грина только в первом ($n = 1$) и втором ($n = 2$) приближениях.

Методом приближённого решения интегрального уравнения функция Грина вычисляется сразу в целом виде (то есть в пределе $n = \infty$), но с неконтролируемой точностью. Для проверки полученного результата, функция, вычисленная в целом виде, представлялась снова в виде цепной дроби. Первое и второе приближения этой дроби сравнивались с первым и вторым приближениями, полученными непосредственным интегрированием. Показано хорошее соответствие между приближениями полученными с помощью описанных подходов. Это позволяет предположить, что аналитическое выражение, полученное из решения интегрального уравнения, удовлетворительно описывает функцию Грина.

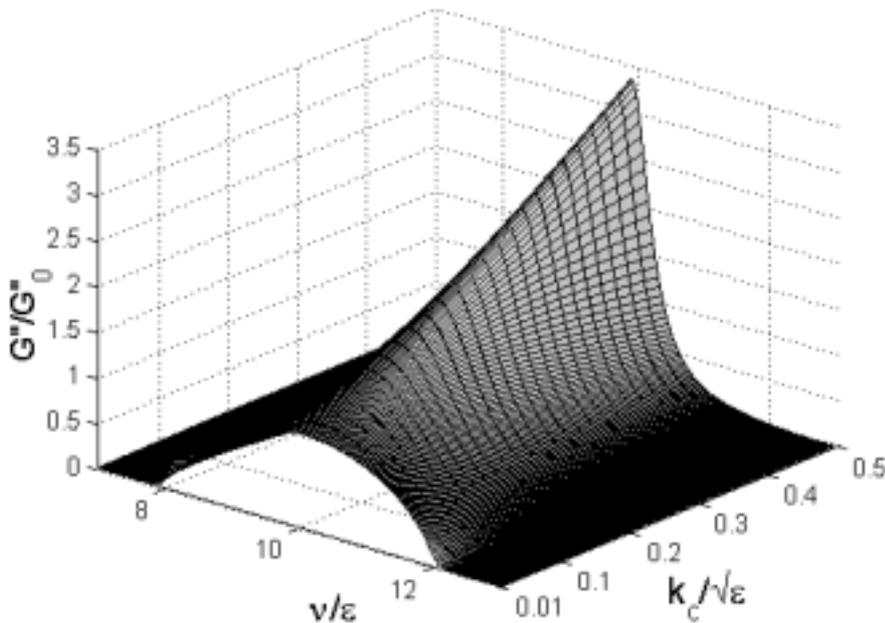


Рис. 5. Вид мнимой части функции Грина, $G''(v, k_c)$, соответствующей выражению (24), или цепной дроби (22) при учёте всех её звеньев ($n = \infty$)

Проведено численное исследование выражения для мнимой части функции Грина G'' как функции частоты ν и корреляционного волнового числа неоднородностей k_c . Показано, что функция $G''(\nu)$, вычисленная в n -ом приближении, содержит $n+1$ максимум. Площадь под этой функцией является константой, не зависящей от номера приближения. С ростом числа n (и, соответственно, числа максимумов) амплитуда максимумов убывает и функция $G''(\nu)$ стремится к предельной кривой, содержащей только один максимум. Эта предельная кривая и описывает мнимую часть восприимчивости спиновых волн χ'' в ферромагнетике с неоднородной величиной магнитной анизотропии. В отличие от работ [1-5], полученное выражение для $G''(\nu)$ приближённо учитывает процессы рассеяния волн всех порядков. Показано, что ширина линии спин-волнового резонанса при этом определяется рассеянием, кардинально отличающимся от выражения для параметра затухания, полученного в работах [1-3]. В частности, с уменьшением волнового числа k ширина линии резонанса $\Delta\nu$ возрастает и достигает максимума $\Delta\nu=\varepsilon$ при $k=0$ (одно-родный магнитный резонанс). Напомним, что параметр затухания ν'' , полученный в работах [1-3] с учётом только процессов рассеяния первого порядка, уменьшается с уменьшением k для $k < k_c$ и обращается в нуль при $k=0$.

Таким образом, в области малых волновых чисел k основную роль в формировании ширины линии резонанса играют процессы рассеяния высоких порядков, один из возможных методов приближённого расчёта которых развит в данной работе.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Игнатченко В. А., Исааков Р. С. Спиновые волны в случайно-неоднородной анизотропной среде. // ЖЭТФ. 1977. т. 72. С. 1005.
2. Korenblit I. Ya., Shender E. F. Spin waves in amorphous ferromagnets with random anisotropy axes. // J. Phys. F: Metal Phys. 1979. т. 9. С. 2245.
3. Медведев М. В., Садовский М. В. Локализация одночастичных спиновых возбуждений в ферромагнетике с хаотической анизотропией типа "лёгкая ось". // ФТТ. 1981. т. 23. С. 1943.
4. Игнатченко В. А., Исааков Р. С. Дисперсионное соотношение и спин-волновая спектроскопия аморфных ферромагнетиков. // ЖЭТФ. 1978. т. 75. С. 1438.
5. Дейч Л. И., Игнатченко В.А. Магнитоупругий резонанс в случайно-неоднородных ферромагнетиках с нулевой средней магнитострикцией. // ЖЭТФ. 1995. т. 107. С. 842.
6. Игнатченко В. А., Исааков Р. С. Магнитные свойства кристаллических и аморфных сред., Новосибирск: Наука, 1989., С. 128-147.
7. Maksymowicz L. J., Senderek-Temple D., Zuberek R. Linewidths of spin wave modes in thin magnetic amorphous films. // J. Magn. Magn. Mat. 1986. т. 62. С. 305.
8. Исааков Р. С., Чеканов А. С., Чеканова Л. А. Особенности релаксационных характеристик спектров СВР в плёнках ферромагнитных сплавов. // ФТТ. 1988. т. 30. С. 970.
9. Brown G., Celli V., Haller M., Maradudin A., Marvin A. Resonant light scattering from a randomly rough surface. // Phys. Rev. B. 1985. т. 31. С. 4993.
10. Bourret R. C. Stochastically perturbed fields with applications to wave propagation in random media. // Nuovo Cimento. 1962. т. 26. С. 1. // Canad. J. Phys. 1962. т. 40. С. 783.