Я. Н. ШПИЛЬРЕЙН

ВЕКТОРНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ДЛЯ ИНЖЕНЕРОВ-ЭЛЕКТРИКОВ И ФИЗИКОВ

ЧАСТЬ I

ВЕКТОРНАЯ АЛГЕБРА И ЛИНЕЙНЫЕ ВЕКТОР-ФУНКЦИИ

ОНТИ НКТП СССР 1936

Глубокоуважаемому
Илье Львовичу
Штаерману
в память
Санксу 1936 г.
[illegible]

Я. Н. ШПИЛЬРЕЙН

ВЕКТОРНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

ДЛЯ ИНЖЕНЕРОВ-ЭЛЕКТРИКОВ И ФИЗИКОВ

ЧАСТЬ I

ВЕКТОРНАЯ АЛГЕБРА И ЛИНЕЙНЫЕ ВЕКТОР-ФУНКЦИИ

НКТП НТИ СССР

ОБЪЕДИНЕННОЕ НАУЧНО-ТЕХНИЧЕСКОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ ЭНЕРГЕТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
МОСКВА ★ 1936 ★ ЛЕНИНГРАД

ЭЭ — 10-5-4

Протокол Т. К. К. № 63 от 21/VII 1935 г.

Редактор *А. Д. Смирнов.*
Техредактор *А. Д. Чаров.*

Подписано к печати с матриц 16 января 1936 г. Уполномоченный Главлита № В-22526. Энергоредакция 60. Тираж 7000. Бумага $62 \times 94/_{16}$. $13^1/_2$ п. л. Количество бум. листов $6^3/_4$. Количество печ. знаков в 1 бум. листе 99840. Заказ № 27. Уч.-авт. л. 15,85.

4-я тип ОНТИ НКТП СССР „Красный Печатник“. Ленинград, Международный, 75а.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Стр.

Предисловие 3

Глава первая

Элементарные векторные действия

§ 1. Определения и обозначения 5
§ 2. Сложение и вычитание векторов 7
§ 3. Умножение вектора на скаляр 9
§ 4. Проекции вектора, скалярное произведение 14
§ 5. Радиус-вектор 19
§ 6. Прямоугольные координаты 23
§ 7. Площадка. Векторное произведение 27
§ 8. Смешанное произведение 36
§ 9. Двойное векторное произведение 41
§ 10. Сложные произведения 44
§ 11. Обратные действия. Векторные уравнения 47
§ 12. Косоугольные координаты 54
§ 13. Вращение координатной системы 57

Глава вторая

Приложения векторной алгебры к аналитической геометрии

§ 14. Уравнения плоскости 62
§ 15. Уравнения прямой линии в пространстве 70
§ 16. Шар. Цилиндр. Конус 74
§ 17. Геометрия на плоскости 79
§ 18. Инверсия 83
§ 19. Обозначения для векторов и векторных операций 85

Глава третья

Элементы аффинорного исчисления

Введение 88
§ 20. Линейные вектор-функции 89
§ 21. Различные линейные вектор-функции 96
§ 22. Линейные вектор-функции в координатном изображении . . [illegible]
§ 23. Аффиноры. Аффинорное преобразование пространства . . [illegible]

§ 24. Диадные произведения. Диады 105
§ 25. Аффиноры как сумма диад 109
§ 26. Тензоры и аксиаторы 115
§ 27. Единичный тензор 121
§ 28. Перемножение аффиноров 123
§ 29. Примеры и задачи на перемножение аффиноров 130
§ 30. Обратные аффиноры. Деление аффиноров 135
§ 31. Аффинорные ряды. Верзоры 139
§ 32. Аффинор как произведение тензора и верзора 146
§ 33. Кватернионы и нонионы 150
Решения задач 153
Сводка формул 188
Формулы аффинорной алгебры 197
Алфавитный указатель 212

ПРЕДИСЛОВИЕ

Основанием для создания этой книги послужил мой труд „Lehrbuch der Vektorrechnung“, вышедший в Германии двумя изданиями. В свое время было напечатано на русском языке упрощенное извлечение из этого труда. С тех пор положение векторного исчисления в нашем Союзе сильно изменилось. Правда, и теперь еще существует оппозиция против векторного исчисления. Совсем недавно нам пришлось заслушать мнение одного из выдающихся ученых о том, что статьи по механике в Технической энциклопедии „испорчены“ векторным изложением. Но эти отсталые настроения в настоящее время являются исключением. Комитет по высшему техническому образованию ввел элементы векторного исчисления в основную программу математики и рекомендует излагать механику на векторной основе. Уже прошли те времена, когда векторное исчисление считалось необходимым одним только инженерам-электрикам. В настоящее время вряд ли откажется от векторного исчисления культурный инженер любой специальности.

За последнее время в технику проникает аффинорное, или диадное, исчисление. Методы аффинорного исчисления значительно расширяют и упрощают методы векторного анализа, но, кроме того, они имеют и самостоятельное значение. Аффинорное исчисление находит естественное применение в расчетах силовых полей, механики твердого тела, гидродинамики, теории упругости и т. п. Правда, в этом отношении сделано еще сравнительно мало; несомненно, однако, что аффинорное исчисление должно служить не только для компактной записи координатных формул, но оно должно стать орудием непосредственных вычислений при разрешении новых задач.

В настоящее время существует много учебников по векторному исчислению. Достаточно назвать книги Дубнова и Кочина, вполне пригодные в качестве учебников для студентов высшей школы.

Настоящая книга предназначена не только для студентов, но также и для инженеров и физиков, желающих ознакомиться с методами векторного исчисления и его применениями.

В первой части изложены начала векторной и аффинорной алгебры.

Во второй части будет изложен векторный и аффинорный анализ и его применения.

Знание аффинорной алгебры не является необходимым для изучения векторного анализа. Поэтому читатель может ограничиться изучением первых двух глав, если ему покажется трудным содержание третьей главы, и сразу перейти к изучению векторного анализа. Для облегчения чтения эти первые главы изложены несколько более подробно.

Читателю настоятельно рекомендуется решить самому или прочитать решение задач, помещенных в тексте, так как большинство задач касается вопросов теории, которые необходимо продумать для понимания последующего текста.

Мы пользовались стандартными обозначениями векторной алгебры. Однако мы старались с самого начала приучить читателя к параллельному пользованию обозначениями аффинорной алгебры, пока еще не стандартизованными.

В частности, мы широко применяли обозначение аксиатора, дающее большие преимущества при вычислении.

В заключение считаю своим приятным долгом выразить благодарность моему товарищу Д. И. Марьяновскому за внимательный просмотр рукописи и корректур и за ценные советы.

Я. Н. Шпильрейн

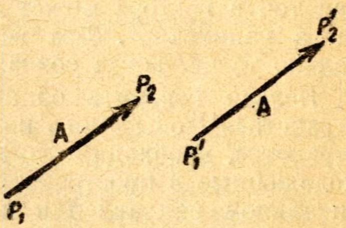
Москва, 11 июля 1935 г.

ГЛАВА ПЕРВАЯ

ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ ВЕКТОРНЫЕ ДЕЙСТВИЯ

§ 1. Определения и обозначения

Величина, вполне определяемая заданием ее численного значения, называется скалярной величиной, или скаляром. Такая величина может быть определена по одной шкале с делениями (от латинского слова scala — лестница). Например, длина, температура, масса, время — все это скалярные величины. Другие величины обладают, кроме того, еще определенным направлением в пространстве. Такие величины называются векторами (от латинского глагола veho — тащу). Вектор вполне определяется указанием его численного значения и его направления. Векторами являются, например, перемещение точки, скорость ее перемещения, сила, напряженность электрического поля и т. п.



Фиг. 1.

Под направлением вектора мы разумеем одинарное направление, а не двойное. Соответственно этому определению мы считаем, что каждая прямая обладает двумя противоположными направлениями. Графически вектор может изображаться отрезком со стрелкой на конце. Например, отрезок P_1P_2 изображает по величине и по направлению некоторый вектор. Точка P_1 называется начальной точкой, точка P_2 — конечной точкой вектора. При этом абсолютное положение начальной точки произвольно. Отрезок $P_1'P_2'$ изображает тот же вектор, что и отрезок P_1P_2 (фиг. 1). Два вектора не отличаются друг от друга, если изображающие их отрезки могут быть приведены в совпадение простым параллельным перемещением.

По советскому стандарту векторы обозначаются жирными буквами. Например, вектор, изображаемый отрезком P_1P_2 на фиг. 1, может быть обозначен буквой **A**. Длина этого вектора обозначается той же буквой, но не жирной, или же жирной буквой, помещенной между двумя вертикальными черточками. Таким образом численное значение (длина) вектора **A** обозначается символом

$$A = |\mathbf{A}|. \tag{1,1}$$

Для того чтобы задать направление вектора **A**, можно пользоваться единичным вектором — это вектор, направленный одинаково с **A**, численное значение которого равно единице. Единичный вектор обозначается при помощи индекса 0, помещаемого справа наверху у данного вектора. Так, например, $\mathbf{A}^0$ есть единичный вектор, одинаково направленный с вектором **A**.

В тех случаях, когда применение жирного шрифта затруднительно, а также в рукописях, векторы обозначаются буквами обычного шрифта с черточкой наверху.

Так, например, $\overline{\omega}$ обозначает вектор. Длина этого вектора обозначается $\omega = |\overline{\omega}|$, его направление обозначается символом $\overline{\omega}^0$.

Существуют и другие способы обозначения векторов, например, при помощи готических или греческих букв, не жирных и без черточек сверху. Однако эти обозначения, частично встречающиеся даже в советской литературе, противоречат стандарту и не должны применяться.

При неизменной начальной точке P_1 и постоянном направлении $\mathbf{A}^0$ конечная точка вектора **A** описывает полупрямую, состоящую из всех точек, лежащих в направлении $\mathbf{A}^0$ относительно точки P_1. При постоянной длине и переменном направлении конечная точка вектора может занимать место любой точки поверхности шара радиуса A. Два вектора **A** и **B** равны друг другу тогда и только тогда, когда совпадают их длины и их направления.

Нельзя говорить об абсолютном направлении в пустом пространстве. Чтобы иметь возможность различать направления в пространстве, необходимо иметь для сравнения какие-либо тела, расположенные в пространстве. Так, например, можно говорить о вертикальном направлении как о направлении, перпендикулярном к горизонтальной плоскости в данном месте. Это направление различно в различных местах земной поверхности.

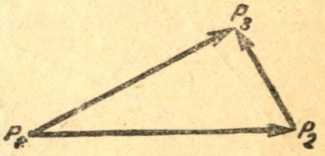
Для полного определения вектора по величине и по направлению достаточно указать расположение его начальной и конечной точек относительно некоторой системы сравнения, расположенной в пространстве. Эта система сравнения называется также координатной системой, потому что она позволяет координировать (т. е. точно определять) расположение и величину вектора относительно этой координатной системы.

Так, например, положение любой точки земной поверхности относительно центра земли может быть определено при помощи вектора, соединяющего центр земли с данной точкой земной поверхности. В качестве системы сравнения можно взять земной шар и на нем экватор и начальный меридиан. Для полного определения нашего вектора достаточно указать три числа: радиус земного шара определяет длину вектора, широта и долгота данной точки земной поверхности определяют направление вектора.

Мы увидим в § 6 более подробное описание координатных систем.

§ 2. Сложение и вычитание векторов

Векторы складываются, как перемещения. Подвергая материальную точку сначала перемещению P_1P_2, а затем перемещению P_2P_3 (фиг. 2), мы находим результирующее перемещение, равное „сумме“ двух данных перемещений. По величине и по направлению результирующее перемещение равно отрезку, соединяющему начальную точку P_1 первого перемещения с конечной точкой P_3 второго перемещения.



Фиг. 2.

Если мы хотим рассматривать результирующий вектор как сумму (геометрическую, векторную) отдельных векторов, то мы приходим к следующему определению сложения двух любых векторов: сумма двух векторов **A** и **B** есть вектор **C**, проведенный из начальной точки одного к конечной точке другого вектора, если эти векторы приставлены друг к другу с сохранением их направления (фиг. 3).

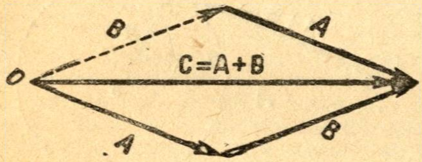
Пользуясь для векторного сложения обыкновенным знаком плюс, можно написать

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{C}.$$

При этом последовательность слагаемых не влияет на сумму (фиг. 3):

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{B} + \mathbf{A}. \tag{2,1}$$

Поэтому говорят, что сложение векторов следует коммутативному (переместительному) закону. Мы видим на чертеже, что сумма двух векторов есть вектор, равный диагонали параллелограма, построенного на слагаемых векторах. Таким образом сложение двух векторов происходит по „правилу параллелограма“, применяемому при сложении сил или скоростей.



Фиг. 3.

Если **A** и **B** на фиг. 3 изображают две силы $\mathbf{F}_1 = \mathbf{A}$ и $\mathbf{F}_2 = \mathbf{B}$, приложенные в точке O, то результирующая сила **F** равна их векторной сумме:

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2.$$

Данное правило сложения двух векторов легко обобщить для n векторов: чтобы получить сумму n векторов **A**, **B**, **C**, ..., **N**,

$$\mathbf{v} = \mathbf{A} + \mathbf{B} + \mathbf{C} + \ldots + \mathbf{N},$$

приставляют начальную точку второго вектора к конечной точке первого вектора, начальную точку третьего вектора к конечной точке второго, ..., на-