УДК 517.55

АСИМПТОТИКА КОЭФФИЦИЕНТОВ ТЕЙЛОРА РАЦИОНАЛЬНОЙ ФУНКЦИИ ДВУХ ПЕРЕМЕННЫХ С ЛИНЕЙНЫМ МНОЖЕСТВОМ ОСОБЕННОСТЕЙ

А.П. Ляпин*

Найден главный член асимптотического разложения коэффициентов Тейлора $f(kp)$ при $k \to \infty$ рациональной функции двух переменных при некоторых ограничениях на линейные множители знаменателя.

Пусть $x = (x_1, \dots, x_n)$ — точка n-мерной целочисленной решетки $\mathbb{Z}^n$ и $\mathbb{Z}^n_+$ — подмножество этой решетки, состоящее из точек с целочисленными неотрицательными координатами. Обозначим $z = (z_1, \dots, z_n)$ точку n-мерного комплексного пространства $\mathbb{C}^n$.

Производящая функция $F(z) = \sum_{x \in \mathbb{Z}^n_+} f(x) z^x$ служит эффективным средством изучения последовательности $\{f(x)\}, x \in \mathbb{Z}^n_+$ в различных задачах математического анализа и комбинаторики. При изучении ее асимптотического поведения простейшим будет случай, когда $F(z)$ — рациональная функция, причем для $n = 1$ из основной теоремы о вычетах следует, что асимптотика $f(x)$ определяется ближайшим полюсом функции $F(z)$. В случае многомерной последовательности возникает ряд трудностей принципиального характера, одной из которых считается отсутствие понятия кратного асимптотического ряда. Один из способов исследования асимптотического поведения кратной последовательности $f(x)$, $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{Z}^n_+$ — это изучение асимптотики на «диагоналях» $x = kp$, где p — фиксированная точка из $\mathbb{Z}^n_+$, а $k = 0, 1, 2, \dots$. Такой подход применялся в [1] в связи с решением проблемы устойчивости двумерных цифровых рекурсивных фильтров, имеющих рациональную передаточную функцию. При этом был предложен метод получения асимптотических оценок коэффициентов Тейлора в случае, когда множество особенностей рациональной функции двух переменных гладкое и пересекается с остовом соответствующего полицилиндра в конечном числе точек.

В работах [2] и [3] методы работы [1] применялись для получения асимптотических оценок коэффициентов Тейлора алгебраических и мероморфных функций двух переменных. В случае функций с полюсами на объединении конечного числа гиперплоскостей оценки на коэффициенты Тейлора типа «O-большое» впервые приведены для $n = 2$ в [4], а для $n > 2$ рассмотрены в [3]. Этот случай представляет большой интерес с точки зрения перечислительного комбинаторного анализа. Например, в задачах о числе решеточных путей и задаче о покрытии костями домино соответствующая производящая функция представляет собой рациональную функцию двух переменных, знаменатель которой — произведение линейных множителей ([5]).

В данной работе при некоторых ограничениях на линейные множители знаменателя рациональной функции двух переменных найден главный член асимптотического разложения коэффициентов $f(kp), k \to \infty$.

Пусть $F(z, w)$ — рациональная функция двух комплексных переменных $(z, w) \in \mathbb{C}^2$, регулярная в начале координат, и $f(x, y)$ — коэффициенты ее разложения в ряд Тейлора

$$F(z, w) = \frac{P(z, w)}{Q(z, w)} = \sum_{x, y \geqslant 0} f(x, y) z^x w^y, \tag{1}$$

причем $Q(0, 0) \neq 0$ и дробь $\frac{P}{Q}$ — несократимая. Рассмотрим ситуацию при следующих условиях:

(I) знаменатель функции F разлагается в произведение линейных множителей

$$Q = \prod_{i=1}^{m} Q_i = \prod_{i=1}^{m} (1 - a_i z - b_i w),$$

т.е. множество особых точек $\mathcal{V} = \{Q(z, w) = 0\}$ функции (1) является объединением системы комплексных прямых $\mathcal{V} = \cup \mathcal{V}_i$, где $\mathcal{V}_i = \{Q_i = 0\}, i = 1, \dots, m$;

(II) система прямых $\{\mathcal{V}_i\}_{i=1}^m$ находится в общем положении в том смысле, что любые две из них пересекаются, а любые три - не пересекаются;

(III) коэффициенты a_i, b_i многочленов Q_i, $i = 1, \dots, m$ — положительные числа.

Обозначим $Q_0 = z$ и $Q_{m+1} = w$. Пусть многоугольник M определен в положительном октанте $\mathbb{R}^2_+$ системой линейных неравенств $Q_i(z, w) > 0$, $i = 0, \dots, m+1$. Из условия **(III)** следует, что M не пусто. Пусть (z_i, w_i) — решение системы уравнений $Q_i(z, w) = qzQ_z(z, w) - pwQ_w(z, w) = 0$ для $i = 1, \dots, m$, а (z_{ij}, w_{ij}) — решение системы линейных уравнений $Q_i(z, w) = Q_j(z, w) = 0$ с определителем $\Delta_{ij} = a_i b_j - a_j b_i \neq 0$, $i \neq j$, и $i, j = 1, \dots, m$.

Определим в положительном октанте $\mathbb{R}^2_+$ множества двух видов:

$$\begin{aligned} K_i &= \{(p, q) \in \mathbb{R}^2_+ : \max_M z^p w^q = \max_{\mathcal{V}_i} z^p w^q = z_i^p w_i^q\}, \\ \Omega_{ij} &= \{(p, q) \in \mathbb{R}^2_+ : \max_M z^p w^q = z_{ij}^p w_{ij}^q\}. \end{aligned} \tag{2}$$

Множества K_i, Ω_{ij} представляют собой конусы, объединение которых совпадает с $\mathbb{R}^2_+$, при этом некоторые из них могут оказаться пустыми, а непустые конусы могут пересекаться лишь по граничным лучам. Можно утверждать, что почти всякая точка $(p, q) \in \mathbb{Z}^2_+$ принадлежит внутренности одного из «целочисленных» конусов вида $\mathbb{Z}^2_+ \cap K_i$ и $\mathbb{Z}^2_+ \cap \Omega_{ij}$.

Множество M в общем случае представляет многоугольник в $\mathbb{R}^2_+$, две стороны которого лежат на координатных осях, а остальные — на некоторых (или всех) прямых $\mathcal{V}_i$. Не умаляя общности, этими прямыми можно считать $\mathcal{V}_1, \dots, \mathcal{V}_r$, $r \leqslant m$. Вершины многоугольника M, не совпадающие с точкой (0,0), имеют координаты $(z_{i,i+1}, w_{i,i+1})$, $i = 0, ..., r$, при этом будут выполняться неравенства $\frac{a_1}{b_1} < \frac{a_2}{b_2} < \frac{a_3}{b_3} < ... < \frac{a_r}{b_r}$. Построим систему векторов $\eta_{10} = (a_1 z_{01}, b_1 w_{01}) = (1, 0)$, $\eta_{11} = (a_1 z_{12}, b_1 w_{12})$, $\eta_{21} = (a_2 z_{12}, b_2 w_{12})$, $\eta_{22} = (a_2 z_{23}, b_2 w_{23}), ..., \eta_{n,n-1} = (a_n z_{n-1,n}, b_n w_{n-1,n})$, $\eta_{n,n} = (a_n z_{n,n+1}, b_n w_{n,n+1}) = (0, 1)$, тогда конусы двух видов, построенные на этих векторах, совпадут с определенными формулами (2), а их представление через образующие вектора η_{ij} будет иметь вид

$$\begin{aligned} K_i &= \{(p, q) : (p, q) = \alpha \eta_{i,i-1} + \beta \eta_{i,i},\ \alpha, \beta > 0\},\ i = 1, \dots, n, \\ \Omega_{i,i+1} &= \{(p, q) : (p, q) = \alpha \eta_{i,i} + \beta \eta_{i+1,i},\ \alpha, \beta > 0\},\ i = 1, \dots, n-1. \end{aligned}$$

Теорема 1. *Если рациональная функция* (1) *удовлетворяет условиям **(I)** — **(III)**, причем $P(z, w) \neq 0$ в вершинах многоугольника M, не лежащих на координатных осях, тогда для почти всех точек $(p, q) \in \mathbb{Z}^2_+$ на диагонали $x = kp$, $y = kq$, $k \in \mathbb{Z}_+$ справедлива при $k \to +\infty$ асимптотическая формула вида*

$$f(x, y) \sim C(p, q; k) \frac{P(\hat{z}, \hat{w})}{\hat{z}^{x+1} \hat{w}^{y+1}}, \tag{3}$$

где для $(p, q) \in \operatorname{Int} K_i$ имеем $(\hat{z}, \hat{w}) = (z_i, w_i)$ и $C(p, q; k) = \frac{const(p,q)}{\sqrt{k}}$, для $(p, q) \in \operatorname{Int} \Omega_{ij}$ имеем $(\hat{z}, \hat{w}) = (z_{ij}, w_{ij})$, а $C(p, q; k)$ — не зависящая от p, q, k константа.

Приведем пример того, что отказаться от условия **(III)** в теореме 1 нельзя. Для функции $F(z, w) = \frac{1}{(1-z-w)(1+z-w)}$ коэффициенты ее разложения в ряд Тейлора имеют вид $f(x, y) = \frac{1}{2}\binom{x+y+1}{x+1}[1 + (-1)^x]$. Для любой точки $(p, q) \in \mathbb{Z}^2_+$ найдется бесконечное число значений k таких, что $f(kp, kq) = 0$ (при любом $k = 2, 4, 6, \dots$), следовательно, теорема 1 неверна.

В работе [6] введено понятие вектора Горна, который для двойной последовательности $f(x, y)$ представляется в виде

$$\left(\frac{f(x+1, y)}{f(x, y)}, \frac{f(x, y+1)}{f(x, y)} \right).$$

Следствие 1. *В условиях теоремы 1 почти для любого (p, q) имеет место равенство*

$$\lim_{\substack{x=kp \\ y=kq \\ k \to \infty}} \left(\frac{f(x+1, y)}{f(x, y)}, \frac{f(x, y+1)}{f(x, y)} \right) = \left(\frac{1}{\hat{z}}, \frac{1}{\hat{w}} \right),$$

где $(\hat{z}, \hat{w}) \in \mathcal{V}$.

Доказательство теоремы 1 разобьем на ряд вспомогательных утверждений.

Лемма 1. *Пусть знаменатель рациональной функции* (1) *имеет вид $Q = Q_1 Q_2$ и $P(z, w) \equiv 1$, тогда асимптотика коэффициентов Тейлора $f(x, y)$ рациональной функции $F(z, w)$ на (p, q)-диагонали $x = kp, y = kq$ при $k \to +\infty$ имеет вид*

$$f(x, y) \sim \begin{cases} \frac{c_1}{\sqrt{k}} \frac{1}{z_1^{x+1} w_1^{y+1}}, & \text{если } (p, q) \in \operatorname{Int} K_1, \\ \frac{-1}{\Delta_{12}} \frac{1}{z_{12}^{x+1} w_{12}^{y+1}}, & \text{если } (p, q) \in \operatorname{Int} \Omega_{12}, \\ \frac{c_2}{\sqrt{k}} \frac{1}{z_2^{x+1} w_2^{y+1}}, & \text{если } (p, q) \in \operatorname{Int} K_2, \end{cases} \tag{4}$$

где $c_i = \frac{(-1)^i}{\sqrt{2\pi}} \frac{q}{pb_i(a_1 - a_2) + qa_i(b_1 - b_2)} \sqrt{\frac{p}{p+q}}, i = 1, 2.$

Доказательство леммы 1. Воспользуемся формулой Коши для коэффициентов Тейлора функции $F(z,w)$ и получим

$$f(x,y)=\int\limits_{\Gamma}\frac{1}{(1-a_1z-b_1w)(1-a_2z-b_2w)}\frac{dz\wedge dw}{z^{x+1}w^{y+1}}, \text{где } \Gamma=\{|z_1|=\varepsilon_1,|z_2|=\varepsilon_2\}.$$

Проинтегрировав по переменной w, получим

$$f(x,y)=-\frac{1}{\Delta_{12}}\int\limits_{|z|=\varepsilon}\frac{1}{z-z_{12}}\left(\frac{b_1}{1-a_1z}\right)^{y+1}\frac{dz}{z^{x+1}}+\frac{1}{\Delta_{12}}\int\limits_{|z|=\varepsilon}\frac{1}{z-z_{12}}\left(\frac{b_2}{1-a_2z}\right)^{y+1}\frac{dz}{z^{x+1}},$$

где Δ_{12} — определитель системы линейных уравнений $Q_1=Q_2=0$. Обозначим

$$\varphi_i(x,y)=\frac{1}{\Delta_{12}}\int\limits_{|z|=\varepsilon}\frac{1}{z-z_{12}}\left(\frac{b_i}{1-a_iz}\right)^{y+1}\frac{dz}{z^{x+1}}, \tag{5}$$

тогда $f(x,y)=-\varphi_1(x,y)+\varphi_2(x,y)$.

Если $z_{ij}>0, w_{ij}>0$, то асимптотику интеграла (5) на (p,q)-диагонали $x=kp, y=kq$ при $k\to+\infty$ можно вычислить, используя метод перевала (см., например, [7]):

$$\varphi_i(x,y)\sim\begin{cases}\hat\varphi_i(x,y)=\frac{c_i(p,q)}{\sqrt{k}}\frac{1}{z_i^{x+1}w_i^{y+1}}, & \text{если } \frac{p}{q}<\frac{a_iz_{12}}{b_iw_{12}},\\ \frac{1}{\Delta_{12}}\frac{1}{z_{12}^{x+1}w_{12}^{y+1}}, & \text{если } \frac{p}{q}>\frac{a_iz_{12}}{b_iw_{12}},\end{cases}$$

где $z_i=\frac{1}{a_i}\frac{p}{p+q}, w_i=\frac{1}{b_i}\frac{q}{p+q}, i=1,2$ и $c_i(p,q)$ — некоторая константа.

Конусы (2) в условиях леммы 1 можно представить в виде $K_1=\{(p,q)\in\mathbb{Z}^2_+ : 0\leqslant\frac{p}{q}\leqslant\frac{a_1z_{12}}{b_1w_{12}}\}, \Omega_{12}=\{(p,q)\in\mathbb{Z}^2_+ : \frac{a_1z_{12}}{b_1w_{12}}\leqslant\frac{p}{q}\leqslant\frac{a_2z_{12}}{b_2w_{12}}\}, K_2=\{(p,q)\in\mathbb{Z}^2_+ : \frac{a_2z_{12}}{b_2w_{12}}\leqslant\frac{p}{q}<+\infty\}$. Не теряя общности, можно считать, что выполняются неравенства $\frac{a_1}{b_1}<\frac{a_2}{b_2}$ и $\frac{a_1(b_2-b_1)}{b_1(a_1-a_2)}<\frac{\ln b_2-\ln b_1}{\ln a_1-\ln a_2}<\frac{a_2(b_2-b_1)}{b_2(a_1-a_2)}$, поэтому конус Ω_{12} разбивается лучом $\{(p,q)\in\mathbb{R}^2 : \frac{p}{q}=\frac{\ln b_1-\ln b_2}{\ln a_2-\ln a_1}\}$ на конусы Ω^1_{12} и Ω^2_{12}, при этом если $(p,q)\in\operatorname{Int}(K_1\cup\Omega^1_{12})$, то $\hat\varphi_2=o(\hat\varphi_1), k\to+\infty$ и если $(p,q)\in\operatorname{Int}(\Omega^2_{12}\cup K_2)$, то $\hat\varphi_1=o(\hat\varphi_2), k\to+\infty$. Далее легко показать, что для $(p,q)\in\operatorname{Int}K_1$ имеет место соотношение $f\sim-\widehat\varphi_1$, так как $\varphi_1\sim\widehat\varphi_1,\varphi_2\sim\widehat\varphi_2$ и $\frac{\widehat\varphi_2}{\widehat\varphi_1}\to0$ при $k\to\infty$. Поэтому $\frac{f}{\widehat\varphi_1}=-\frac{\varphi_1}{\widehat\varphi_1}+\frac{\varphi_2}{\widehat\varphi_1}=-1+\frac{\widehat\varphi_2}{\widehat\varphi_1}\to-1$. Аналогично можно показать, что для $(p,q)\in\operatorname{Int}K_2$ и $(p,q)\in\operatorname{Int}\Omega_{12}$ справедливо $f\sim\widehat\varphi_2$ и $f\sim-\frac{1}{\Delta_{12}}\frac{1}{z_{12}^{x+1}w_{12}^{y+1}}$ соответственно.

Отметим, что если $z_{12}<0$, то по определению конус K_2 совпадет с $\mathbb{Z}^2_+$, а остальные конусы будут пустыми множествами. Аналогично, в случае $w_{12}<0$, конус K_1 совпадет с $\mathbb{Z}^2_+$, а остальные конусы будут пустыми множествами. Лемма доказана.

Пример. Рассмотрим задачу о подбрасывании несимметричной монеты. Вероятности выпадения аверса и реверса для первых N испытаний равны $\frac{2}{3}$ и $\frac{1}{3}$ соответственно, а для всех последующих испытаний — $\frac{1}{3}$ и $\frac{2}{3}$ соответственно. Игрок желает получить r аверсов и s реверсов и может выбрать N. В среднем сколько выборов $N\leqslant r+s$ будут желаемыми?

Вероятность, что N будет желаемым выбором для игрока, есть сумма по $a+b=N$ вида

$$\binom{N}{a}\left(\frac{2}{3}\right)^a\left(\frac{1}{3}\right)^b\binom{r+s-N}{r-a}\left(\frac{1}{3}\right)^{r-a}\left(\frac{2}{3}\right)^{s-b}.$$

Пусть a_{rs} будет этим выражением, суммированным по N. Последовательность $\{a_{rs}\}_{r,s\geqslant0}$ является сверткой двух последовательностей $\binom{r+s}{r}\left(\frac{2}{3}\right)^r\left(\frac{1}{3}\right)^s$ и $\binom{r+s}{r}\left(\frac{1}{3}\right)^r\left(\frac{2}{3}\right)^s$. Производящая функция $F(z,w)$ этой последовательности имеет вид

$$F(z,w)=\sum_{r,s\geqslant0}a_{rs}z^rw^s=\frac{1}{(1-\frac{1}{3}z-\frac{2}{3}w)(1-\frac{2}{3}z-\frac{1}{3}w)}.$$

По лемме 1 получим $z_{12}=w_{12}=1$, $K_1=\{(p,q):0\leqslant\frac{p}{q}\leqslant\frac{1}{2}\}$, $\Omega_{12}=\{(p,q):\frac{1}{2}\leqslant\frac{p}{q}\leqslant2\}$, $K_2=\{(p,q): 2\leqslant\frac{p}{q}<+\infty\}, z_1=\frac{3p}{p+q}, w_1=\frac{3q}{2(p+q)}, z_2=\frac{3p}{2(p+q)}, w_2=\frac{3q}{p+q}, c_1=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\sqrt{\frac{p}{p+q}\frac{9q}{q-2p}}, c_2=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\sqrt{\frac{p}{p+q}\frac{9q}{2q-p}}, \Delta=a_1b_2-a_2b_1$, откуда при $k\to+\infty$

$$f(x,y)\sim\begin{cases}\frac{1}{\sqrt{2\pi k}}\sqrt{\frac{p}{p+q}\frac{2(p+q)^2}{(2p-q)p}}\left[\left(\frac{p+q}{3p}\right)^p\left(\frac{2(p+q)}{3q}\right)^q\right]^k, & \text{если } (p,q)\in\operatorname{Int}K_1,\\ \frac{1}{a_2b_1-a_1b_2}, & \text{если } (p,q)\in\operatorname{Int}\Omega_{12},\\ \frac{1}{\sqrt{2\pi k}}\sqrt{\frac{p}{p+q}\frac{2(p+q)^2}{(p-2q)p}}\left[\left(\frac{2(p+q)}{3p}\right)^p\left(\frac{p+q}{3q}\right)^q\right]^k, & \text{если } (p,q)\in\operatorname{Int}K_2.\end{cases}$$

Лемма 2. *Пусть задана рациональная функция двух переменных*

$$F(z,w) = \frac{1}{\prod_{i=1}^{m} Q_i(z,w)} \tag{6}$$

и система многочленов $\{Q_i\}_{i=1}^m$ *находится в общем положении, тогда справедливо равенство*

$$F(z,w) = \sum_{1\leqslant i<j\leqslant m} \frac{A_{ij}}{Q_iQ_j}, \tag{7}$$

где A_{ij} *некоторые константы.*

Доказательство леммы 2. Сначала докажем лемму для случая $m = 3$. Так как система $\{Q_i\}_{i=1}^3$ находится в общем положении, то найдутся такие числа A_{12}, A_{23}, A_{31}, что имеет место тождество $A_{12}Q_3 + A_{23}Q_1 + A_{31}Q_2 \equiv 1$. Действительно, это тождество эквивалентно системе трех линейных уравнений с определителем

$$\Delta_{123} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

Разделив обе части этого тождества на $Q_1Q_2Q_3$, получим

$$\frac{1}{Q_1Q_2Q_3} = \frac{A_{12}}{Q_1Q_2} + \frac{A_{23}}{Q_2Q_3} + \frac{A_{13}}{Q_1Q_3}. \tag{8}$$

Чтобы доказать лемму для случая $m = 4$, домножим обе части равенства (8) на $\frac{1}{Q_4}$:

$$\frac{1}{Q_1Q_2Q_3Q_4} = \frac{1}{\Delta_{123}}\left(\frac{\Delta_{12}}{Q_1Q_2Q_4} + \frac{\Delta_{23}}{Q_2Q_3Q_4} + \frac{\Delta_{13}}{Q_1Q_3Q_4}\right),$$

и к каждому из слагаемых, стоящих в правой части, применим данную лемму, доказанную для $m = 3$. Утверждение леммы в случае произвольного m получается по индукции.

Замечание 1. *Константы* A_{ij} *в разложении* (7) *рациональной функции* (6) *на простейшие дроби можно вычислить по формуле*

$$A_{ij} = \frac{1}{(2\pi i)^2}\int\limits_{\Gamma_{ij}} \frac{dz\wedge dw}{\prod_{i=1}^{m} Q_i(z,w)},$$

где цикл $\Gamma_{ij} = \{|z - z_{ij}| = \varepsilon, |w - w_{ij}| = \varepsilon\}$ *и* (z_{ij}, w_{ij}) *- решение системы* $Q_i = Q_j = 0$.

Утверждение леммы 2 является следствием общей теоремы (см. [8], [9]) о разложении рациональной функции на простейшие дроби. Однако в данном случае с точки зрения приложений представляет интерес не столько возможность такого разложения, сколько алгоритм, позволяющий найти коэффициенты A_{ij}.

Асимптотическое поведение коэффициентов Тейлора $f(x,y)$ функции $F(z,w)$ выражает

Теорема 2. *Для рациональной функции вида* (6) *почти для любой* (p,q)*-диагонали* $x = kp, y = kq, k \to +\infty$ *справедлива асимптотическая формула*

$$f(x,y) \sim \begin{cases} \frac{c_i}{\sqrt{k}}\frac{1}{z_i^{x+1}w_i^{y+1}}, & \text{если } (p,q)\in K_i \\ \frac{A_{i,i+1}}{\Delta_{i,i+1}}\frac{1}{z_{i,i+1}^{x+1}w_{i,i+1}^{y+1}}, & \text{если } (p,q)\in \Omega_{i,i+1} \end{cases}, \tag{9}$$

где $z_i = \frac{1}{a_i}\frac{p}{p+q}, w_i = \frac{1}{b_i}\frac{q}{p+q}$ *— решение системы* $Q_i = qzQ_z - pwQ_w = 0$, $\Delta_{i,i+1}$ *- определитель системы линейных уравнений* $Q_i = Q_{i+1} = 0$, $(z_{i,i+1}, w_{i,i+1})$ *— решение этой системы, а* c_i *— некоторая константа.*

Доказательство теоремы 2. По лемме 2 для функции (6) имеет место разложение (7), тогда ее коэффициенты можно представить в виде суммы

$$f(x,y) = \sum_{1\leqslant i<j\leqslant m} f_{ij}(x,y) = \frac{1}{(2\pi i)^2}\sum_{1\leqslant i<j\leqslant m}\int\limits_{\Gamma}\frac{A_{ij}}{Q_iQ_j}\frac{dz\wedge dw}{z^{x+1}w^{y+1}}.$$

К каждому слагаемому f_{ij} применяем лемму 1, тогда почти для любой точки $(p,q)\in\mathbb{Z}_+^2$ либо $f_{ij}(x,y)\sim \frac{c_{ij}^{(i)}}{\sqrt{k}}\frac{1}{z_i^{x+1}w_i^{y+1}}$, либо $f_{ij}(x,y)\sim\frac{A_{ij}}{\Delta_{ij}}\frac{1}{z_{ij}^{x+1}w_{ij}^{y+1}}$ в зависимости от конуса, которому принадлежит (p,q). Среди этих выражений необходимо выбрать главный член асимптотического разложения.

Покажем, что если $(p,q)\in \operatorname{Int} K_i$, то справедлива асимптотическая формула $\frac{1}{z_i^{kp}w_j^{kq}} = o\left(\frac{1}{z_j^{kp}w_j^{kq}}\right)$ при $j\neq i$. Условие $(p,q)\in \operatorname{Int} K_i$ равносильно неравенству $\frac{a_i(b_i-b_{i-1})}{b_i(a_{i-1}-a_i)} < \frac{p}{q} < \frac{a_i(b_{i+1}-b_i)}{b_i(a_i-a_{i+1})}$. Если $j<i$, то из неравенства $\frac{\ln\frac{b_j}{b_i}}{\ln\frac{a_i}{a_j}} < \frac{a_i(b_i-b_{i-1})}{b_i(a_{i-1}-a_i)}$ следует, что $\frac{p}{q} > \frac{\ln\frac{b_j}{b_i}}{\ln\frac{a_i}{a_j}}$, а если $j>i$, то из неравенства $\frac{\ln\frac{b_j}{b_i}}{\ln\frac{a_i}{a_j}} > \frac{a_i(b_{i+1}-b_i)}{b_i(a_i-a_{i+1})}$ получаем $\frac{p}{q} < \frac{\ln\frac{b_j}{b_i}}{\ln\frac{a_i}{a_j}}$, откуда $p\ln\frac{a_i}{a_j} > q\ln\frac{b_j}{b_i}$ или $\left(\frac{a_i}{a_j}\right)^p > \left(\frac{b_j}{b_i}\right)^q$ для всех $i\neq j$, а это значит, что $z_i^p w_i^q < z_j^p w_j^q$, отсюда следует соотношение $\frac{1}{z_i^{kp}w_j^{kq}} = o\left(\frac{1}{z_j^{kp}w_j^{kq}}\right)$. Также легко видеть, что для $(p,q)\in \operatorname{Int} K_i$, то $\frac{1}{z_i^{kp}w_i^{kq}} = o\left(\frac{1}{z_{ij}^{kp}w_{ij}^{kq}}\right)$ при $j\neq i$. Аналогично можно показать, что если $(p,q)\in \operatorname{Int}\Omega_{i,i+1}$, то $\frac{1}{z_{i,i+1}^{kp}w_{i,i+1}^{kq}} = o\left(\frac{1}{z_j^{kp}w_j^{kq}}\right)$.

Доказательство теоремы 1. Рассмотрим интегральное представление коэффициентов Тейлора функции (1), отвечающей условиям (**I**) — (**III**). Пусть $P(z,w)=\sum_{\alpha\beta} d_{\alpha\beta} z^\alpha w^\beta$ — многочлен, тогда

$$f(x,y) = \frac{1}{(2\pi i)^2}\int\limits_\Gamma \frac{P(z,w)}{\prod_i Q_i}\frac{dz\wedge dw}{z^{x+1}w^{y+1}} = \frac{1}{(2\pi i)^2}\int\limits_\Gamma \frac{\sum_{\alpha\beta} d_{\alpha\beta} z^\alpha w^\beta}{\prod_i Q_i}\frac{dz\wedge dw}{z^{x+1}w^{y+1}} =$$
$$= \frac{1}{(2\pi i)^2}\sum_{\alpha\beta} d_{\alpha\beta}\int\limits_\Gamma \frac{z^\alpha w^\beta}{\prod_i Q_i}\frac{dz\wedge dw}{z^{x+1}w^{y+1}} = \sum_{\alpha\beta} d_{\alpha\beta} g(x-\alpha,y-\beta).$$

Из теоремы 2 следует, что $g(x-\alpha,y-\beta)\sim C(p,q;k)\frac{\hat z^\alpha \hat w^\beta}{\hat z^{x+1}\hat w^{y+1}}$, где значения $(\hat z,\hat w)$ и $C(p,q;k)$ определяются в соответствии с формулой (9). Откуда

$$f(x,y)\sim \sum d_{\alpha\beta}\hat z^\alpha \hat w^\beta c(p,q;k)\frac{1}{\hat z^{x+1}\hat w^{y+1}} = c(p,q;k)\frac{P(\hat z,\hat w)}{\hat z^{x+1}\hat w^{y+1}},$$

если $P(\hat z,\hat w)\neq 0$, а это справедливо почти для всех $(p,q)\in\mathbb{Z}_+^2$.

Список литературы

[1] Цих А.К. *Условия абсолютной сходимости ряда из коэффициентов Тейлора мероморфных функций двух переменных* / А.К.Цих // Мат. сб. – 1991. – №11. – С. 1588-1612.

[2] Орлов А.Г. *Об асимптотике коэффициентов Тейлора рациональных функций двух переменных / А.Г.Орлов* // Изв. вузов. – 1993. – №6. – С. 26-33.

[3] Орлов А.Г. *Об асимптотике коэффициентов Тейлора рациональных функций многих переменных* / А.Г.Орлов // Многомерный комплексный анализ. Межвузовский сборник. – Красноярск. – 1994. – С. 116-141.

[4] Макосий А.И. *К вопросу об асимптотике коэффициентов ряда Тейлора* / А.И.Макосий // Многомерный комплексный анализ. – Красноярск. – ИФ СО АН СССР. – 1985. – С. 224-227.

[5] Pemantle R. *Asymptotics for multivariate sequences, part I: smooth points of the singular variety* / R.Pemantle, M.Wilson // J. Comb. Th. – Series A97. – 129-161.

[6] Лейнартас Е.К. *Асимптотика многомерных разностных уравнений* / Е.К.Лейнартас, М.Пассаре, А.К.Цих // УМН. – 2005. – Т. 60. – Вып. 5(365). – С. 171-172.

[7] Федорюк М.В. *Асимптотика. Интегралы и ряды* / М.В.Федорюк. – М.: Наука, 1987. – С. 295-297.

[8] Лейнартас Е.К. *О разложении рациональных функций многих переменных на простейшие дроби* / Е.К.Лейнартас // Изв. вузов. – Математика. – 1978. – №10. – С. 47-52.

[9] Южаков А.П. *Достаточное условие разделения аналитических особенностей в $\mathbb{C}^n$ и базис одного пространства голоморфных функций* / А.П. Южаков // Матем. заметки. – 1972. – Т. 11. – №5. – С. 585-596.

ASYMPTOTIC OF TAYLOR COEFFICIENTS OF RATIONAL FUNCTION OF TWO VARIABLES WITH LINEAR SINGULARITIES

A.P.Lyapin

It is found the main member of asymptotic extension of Taylor coefficients of $f(kp)$ under $k\to\infty$ rational function of two variables under some assumptions on linear factors of denominator.