Т. Н. Никитина

УСТРАНИМЫЕ ОСОБЕННОСТИ НА ГРАНИЦЕ И $\bar{\partial}$-ЗАМКНУТОЕ ПРОДОЛЖЕНИЕ CR-ФОРМ С ОСОБЕННОСТЯМИ НА ПОРОЖДАЮЩЕМ МНОГООБРАЗИИ

Новосибирск
«Наука»
2008

ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ
СИБИРСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Т. Н. Никитина

УСТРАНИМЫЕ ОСОБЕННОСТИ НА ГРАНИЦЕ И $\bar{\partial}$-ЗАМКНУТОЕ ПРОДОЛЖЕНИЕ CR-ФОРМ С ОСОБЕННОСТЯМИ НА ПОРОЖДАЮЩЕМ МНОГООБРАЗИИ

Научный редактор профессор Г. П. Егорычев

Новосибирск
«Наука»
2008

Оглавление

УДК 517.55
ББК 22.161
Н62

Никитина, Т. Н. Устранимые особенности на границе и $\overline{\partial}$-замкнутое продолжение CR-форм с особенностями на порождающем многообразии / Т. Н. Никитина; науч. ред. Г. П. Егорычев. – Новосибирск: Наука, 2008. – 370 с.
ISBN 978-5-02-023212-9

В монографии впервые исследованы касательная часть интеграла Коппельмана на основе логарифмического вычета, поведение особого интеграла, теоремы о скачке интеграла на основе логарифмического вычета и производных интеграла на основе ядра Бохнера – Мартинелли. Эти методы применены к $\overline{\partial}$-замкнутости форм, представимых формулой Коппельмана на основе многомерного логарифмического вычета, формулам Карлемана для когомологий Дольбо, задаче Неймана для оператора типа Ходжа для плюригармонических форм, $\overline{\partial}$-замкнутому продолжению CR-форм с гиперповерхности в фиксированную область, с порождающего многообразия вне голоморфно или мероморфно p-выпуклого компакта, устранимым особенностям на границе области или на комплексном многообразии для форм.

Предназначена для специалистов по многомерному комплексному анализу и его приложениям.

Библиогр.: 122 назв.

Рецензенты
доктор физико-математических наук Е. А. Новиков
доктор физико-математических наук, профессор Л. С. Маергойз
доктор физико-математических наук, профессор В. И. Половинкин

Утверждено ученым советом Института фундаментальной подготовки Сибирского федерального университета

Без объявления
ISBN 978-5-02-023212-9

Редактор Л. П. Гольшева
Технический редактор Н. Н. Вохман

Изд. лиц. № 020297 от 23.06 97. Сдано в набор 14.06.2008. Подписано в печать 11.06.2008
Бумага офсетная. Формат 60×84/16. Печать плоская
Усл. печ. л. 21,5. Уч.-изд. л. 18,5. Тираж 500 экз. Заказ 2/28

Сибирская издательская фирма «Наука» РАН. 630099, Новосибирск, ул. Советская, 18.

Отпечатано в отделе оперативной полиграфии ИПК СФУ
660074, Красноярск, Киренского, 26

ВВЕДЕНИЕ

Известная теорема Гартогса — Бохнера утверждает, что для того, чтобы функция f, заданная на границе ∂D ограниченной области D в $\mathbb{C}^n$ $(n > 1)$ со связным дополнением, имела голоморфное продолжение в D, необходимо и достаточно, чтобы f была CR-функцией на ∂D, т. е. $\int\limits_{\partial D} f\bar{\partial}\omega = 0$ для всех внешних дифференциальных форм типа $(n, n-2)$ с коэффициентами класса C^∞ в окрестности границы области.

Тем не менее эта теорема не снимает вопроса о нахождении других условий, которые гарантировали бы $\bar{\partial}$-замкнутое продолжение внешней дифференциальной формы f в D.

Так, в работах Л. А. Айзенберга, А. М. Аронова, А. М. Кытманова, А. В. Романова был исследован вопрос о функциях, представимых в области D интегралом Бохнера — Мартинелли. Ими была доказана голоморфность таких функций различных классов гладкости (несмотря на неголоморфность ядра Бохнера — Мартинелли). В работах А. М. Кытманова был исследован вопрос о дифференциальных формах, представимых в области D интегралом Коппельмана — Бохнера — Мартинелли (с точностью до $\bar{\partial}$-точного слагаемого). Им была доказана $\bar{\partial}$-замкнутость таких форм с коэффициентами класса C^2, $C^{1,\lambda}$ (несмотря на не $\bar{\partial}$-замкнутость ядра Коппельмана — Бохнера — Мартинелли). Эти же утверждения можно формулировать в терминах ортогональности формы ядрам Коппельмана — Бохнера — Мартинелли. Поэтому данные теоремы служат обобщениями теоремы Гартогса — Бохнера.

Вопрос о локальном $\bar{\partial}$- и $\bar{\partial}^*$-замкнутом продолжении форм с части гиперповерхности (или с CR-многообразий) также является классическим; он интенсивно изучался начиная с работы Е. Леви. Обзор полученных результатов можно, например, найти в работе Г. М. Хенкина. Как правило речь в них идет о принудительном голоморфном продолжении *всех* CR-функций в некоторую одностороннюю окрестность точки в зависимости от геометрии гиперповерхности (CR-многообразия). В ряде недавних работ даны условия голоморфного продолжения CR-функций с *произвольной* гиперповерхности в фиксированную область.

Эти условия налагаются на функцию, а не на гиперповерхность и заключаются либо в продолжении интеграла Бохнера — Мартинелли или Коши — Фантаппье, или интеграла на основе логарифмического вычета от данной функции, либо в сходимости некоторого ряда.

Рассмотрим задачу о плюригармоничности внешних дифференциальных форм. Дифференциальные условия (локальные и глобальные), достаточные для плюригармонического продолжения функций, даны в работах Е. Бедфорда, П. Федербуша, Т. Одибера, У. Рудина, а их обобщения на многообразия получены В. К. Белошапкой. Интегральные условия плюригармонического продолжения для гладких и непрерывных функций сформулированы Г. Фикерой, а доказаны А. Перотти. В работе А. Перотти даны условия разрешимости задачи Неймана для плюригармонических функций, гладких вплоть до границы.

Обратимся к задаче $\overline{\partial}$-замкнутого продолжения CR-форм, заданных на $\Gamma \setminus K$, где Γ — порождающее многообразие с невырожденной формой Леви, а K — мероморфно p-выпуклый компакт. Интерес к задачам подобного вида возник после работы Г. Лупаччиолу, в которой исследован случай, когда Γ есть граница ограниченной области в $\mathbb{C}^n$, а компакт K является голоморфно выпуклым. Обзор различных результатов в этом направлении можно найти в работе Е. Л. Стаута. Но все они имеют дело с границами областей из $\mathbb{C}^n$. Локальный вариант теоремы Г. Лупаччиолу исследован А. М. Кытмановым. Е. М. Чирка поставил задачу о переносе этих результатов на случай порождающих многообразий Γ, которая была решена А. М. Кытмановым и автором в случае $p = q = 0$.

Будем изучать задачу об устранимых особенностях на границе области в $\mathbb{C}^n$, $n \geq 2$, или на комплексном многообразии размерности по крайней мере два для функций. Предмет устранимых множеств на границе нашел развитие в последние несколько лет (см. обзор Е. М. Чирки и Е. Л. Стаута).

Выражаю искреннюю благодарность участникам Красноярского городского научного семинара по теории функций многих комплексных переменных, особенно А. М. Кытманову и А. К. Циху, в общении с которыми улучшались доказательства ряда утверждений.

Глава 1

О $\overline{\partial}$-замкнутости внешних дифференциальных форм

1.1. Аналоги формул Грина и Коппельмана для когомологий Дольбо на основе логарифмического вычета с особенностями на границе

В данной главе доказываются утверждения о $\overline{\partial}$-замкнутости внешних дифференциальных форм, представимых в ограниченной области $\mathbb{C}^n$ различными интегральными формулами: Коппельмана — Бохнера — Мартинелли, Коппельмана на основе многомерного логарифмического вычета и других с точностью до $\overline{\partial}$-точного слагаемого. Как известно, ядра этих интегральных формул, служа ядрами интегральных представлений для $\overline{\partial}$-замкнутых форм, не являются (вообще говоря) $\overline{\partial}$-замкнутыми по внешнему переменному. Поэтому вопрос о $\overline{\partial}$-замкнутости форм, представимых данными интегралами, нуждается в исследовании. В работах А. М. Кытманова [**16, 20**] был исследован вопрос о дифференциальных формах, представимых в области D интегралом Коппельмана — Бохнера — Мартинелли (с точностью до $\overline{\partial}$-точного слагаемого). Им была доказана $\overline{\partial}$-замкнутость таких форм с коэффициентами класса C^2, $C^{1,\lambda}$ (несмотря на не $\overline{\partial}$-замкнутость ядра Коппельмана — Бохнера — Мартинелли). Эти же утверждения можно формулировать в терминах ортогональности формы ядрам Коппельмана — Бохнера — Мартинелли.

Для ядра Бохнера — Мартинелли данный вопрос был исследован в работах Л. А. Айзенберга, А. М. Аронова, А. М. Кытманова, А. В. Романова [**8, 21, 59**], а также в [**20**]. Ими была доказана голоморфность функций (различных классов гладкости), представимых в ограниченной области интегралом Бохнера — Мартинелли. Эти же утверждения можно формулировать в терминах ортогональности функции ядрам Бохнера — Мартинелли.

В разделе 1.1 построены аналоги формул Грина в комплексной форме и Коппельмана для когомологий Дольбо в области из $\mathbb{C}^n$ на основе многомерного логарифмического вычета с особенностями на границе. Описаны граничные свойства интегралов типа логарифмического вычета для форм.

Граничное поведение интеграла типа логарифмического вычета и применение логарифмического дифференциала к задаче голоморфного продолжения функций (CR-гиперфункций) рассматривается в работах **[7, 22, 41, 42, 112]**.

Для n-мерных векторов $v_1, \ldots, v_k$ с элементами в кольце и неотрицательных целых $n_1, \ldots, n_k$ с $n_1 + \cdots + n_k = n$ обозначим: $D_{n_1,\ldots,n_k}(v_1, \ldots$ $\ldots, v_k)$ — определитель порядка n, чьи первые n_1 столбцов есть v_1, следующие n_2 столбцов — v_2 и т. д., последние n_k столбцов — v_k. Вычисляем определитель по столбцам, т. е. определим $\det(v_{ij}) = \sum_I (-1)^{\varepsilon_I} v_{i_1 1} \ldots$ $\ldots v_{i_n n}$, где ε_I означает знак перестановки $I = (i_1, \ldots, i_n)$ целых $(1, \ldots,$ $n)$.

Пусть $v = v(\zeta, z)$ — гладкая функция на O со значениями в $\mathbb{C}^n$, O является открытым множеством, не пересекающим диагональ $\{\zeta = z\}$ в $\mathbb{C}^n_\zeta \times \mathbb{C}^n_z$. Пусть $\Psi = (\Psi_1, \ldots, \Psi_n)$ — голоморфное отображение из $\mathbb{C}^n$ в $\mathbb{C}^n$, состоящее из целых функций и имеющее единственный нуль — начало координат, кратности μ, т. е. $\Psi(0) = 0$ и $\Psi(z) \neq 0$ при $z \neq 0$. Как показано в гл. 1 из **[5]**, для почти всех точек w, лежащих в окрестности нуля, число прообразов $\Psi^{-1}(w)$ одинаково и равно μ ("динамическое определение"кратности). Якобиан отображения Ψ не равен тождественно нулю. Фиксируем $0 \leqslant p \leqslant n$. Рассмотрим двойные дифференциальные формы $K_{p,q}(\Psi, v, \zeta, z)$ бистепени (p, q) по z и $(n-p, n-q-1)$ по ζ, задаваемые

$$K_{p,q}(\Psi, v, \zeta, z) = \frac{(-1)^{q+p(n-q)}}{(2\pi i)^n n!} \binom{n-1}{q} \binom{n}{p} \times$$

$$\times D_{1,q,n-q-1}(v, \overline{\partial}_z v, \overline{\partial}_\zeta v) \wedge D_{p,n-p}(\partial_z \Psi(\zeta - z), \partial_\zeta \Psi(\zeta - z)) \qquad (1.1)$$