

# ВЫЧЕТЫ ГРОТЕНДИКА И СИСТЕМЫ РАЗНОСТНЫХ И ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ПОСТОЯННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ<sup>1</sup>

Е.К.Лейнартас\*

*Для переопределенных систем разностных и дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами получено представление решений вычетами Гротендика.*

Обозначим через  $z = (z_1, \dots, z_n)$  и  $t = (t_1, \dots, t_n)$  — точки  $n$ -мерного комплексного пространства  $\mathbb{C}^n$ . Если  $\mathbb{C}[z]$  — кольцо многочленов от переменных  $z = (z_1, \dots, z_n)$  с комплексными коэффициентами и  $P(z) \in \mathbb{C}[z]$ , то  $P(D)$  — дифференциальный оператор с постоянными коэффициентами:  $D = (D_1, \dots, D_n)$ ,  $D_j = \frac{\partial}{\partial z_j}$ ,  $j = 1, \dots, n$ . Для функций  $f(x)$ , определенных на  $n$ -мерной целочисленной решетке  $\mathbb{Z}^n$ , оператор сдвига по  $j$ -й переменной обозначим  $\delta_j$ , т.е.  $\delta_j f(x) = f(x + e_j)$ , где  $e_j = (0, \dots, 1, \dots, 0)$  и если  $\delta = (\delta_1, \dots, \delta_n)$  и  $P(z) \in \mathbb{C}[z]$ , то  $P(\delta)$  — разностный оператор с постоянными коэффициентами.

Пусть  $P_j \in \mathbb{C}[z]$ ,  $j = 1, \dots, n$ . Будем рассматривать системы разностных и дифференциальных уравнений вида

$$P_j(\delta)f(x) = 0, j = 1, \dots, n, \quad (1)$$

$$P_j(D)u(t) = 0, j = 1, \dots, n. \quad (2)$$

Системы (1) и (2) имеют одну и ту же характеристическую систему

$$P_j(z) = 0, j = 1, \dots, n. \quad (3)$$

Пусть  $\mathbb{Z}_+^n$  — подмножество целочисленной решетки, состоящее из точек с неотрицательными координатами. Всякой функции  $f : \mathbb{Z}_+^n \rightarrow \mathbb{C}$  поставим в соответствие степенной ряд (не обязательно сходящийся):

$$u(t) = \sum_{x \in \mathbb{Z}_+^n} \frac{f(x)}{x!} t^x, x! = x_1! \cdots x_n!, t^x = t_1^{x_1} \cdots t_n^{x_n}. \quad (4)$$

Между решениями разностной системы (1) и решениями системы дифференциальных уравнений (2) существует взаимно однозначное соответствие.

**Лемма.** *Функция  $f : \mathbb{Z}_+^n \rightarrow \mathbb{C}$  является решением системы разностных уравнений (1) тогда и только тогда, когда ряд (4) является решением системы дифференциальных уравнений (2).*

Ограничимся рассмотрением систем (1) и (2), удовлетворяющих условию:

$$\begin{aligned} &\text{характеристическая система полиномиальных уравнений (3)} \\ &\text{имеет конечное число корней.} \end{aligned} \quad (i)$$

Если  $J_P = \langle P_1(z), \dots, P_n(z) \rangle$  — идеал, порожденный полиномами  $P_j(z)$ , то при выполнении условия (i) фактор-кольцо  $H = \mathbb{C}[z]/J_P$  конечномерно (см. [1]). Если  $\lambda_\mu$  — корни системы (3) кратности  $\nu_\mu$ ,  $\mu = 1, \dots, k$ , то размерность фактор-кольца  $\dim H = \nu_1 + \dots + \nu_k$ . Более того, если обозначить  $J_P(\lambda_\mu)$  идеал, порожденный полиномами  $(P_1, \dots, P_n)$ , в кольце ростков голоморфных в точке  $\lambda_\mu$  функций, а соответствующее фактор-кольцо через  $H_\mu$ , то  $H$  разлагается в прямую сумму  $H_\mu$  и  $\dim H_\mu = \nu_\mu$ .

Воспользуемся определением глобального и локального вычетов Гротендика из [2]. Пусть

$$\Gamma(P) = \{\xi \in \mathbb{C}^n : |P_j(\xi)| = r_j, j = 1, \dots, n\}, \quad (5)$$

где  $r_j$  — некоторые положительные числа.  $\Gamma(P)$  — это вещественный  $n$ -мерный цикл в  $\mathbb{C}^n \setminus \bigcup_{j=1}^n V_j$ , где  $V_j = \{\xi \in \mathbb{C}^n : P_j(\xi) = 0\}$ . Этот цикл для достаточно малых  $r_j$  распадается в сумму локальных циклов  $\Gamma_{\lambda_\mu}(P) = \{\xi \in U(\lambda_\mu) : |P_j(\xi)| = \epsilon_j, j = 1, \dots, n\}$ , где  $U(\lambda_\mu)$  — некоторая окрестность точки  $\lambda_\mu$ .

Определим теперь зависящий от параметра  $x \in \mathbb{Z}_+^n$  глобальный вычет Гротендика формулой

$$f(x) = (2\pi i)^{-n} \int_{\Gamma(P)} \frac{h(\xi) \xi^x d\xi}{P_1(\xi) \cdots P_n(\xi)}, h(\xi) \in H, \quad (6)$$

где  $d\xi = d\xi_1 \wedge \dots \wedge d\xi_n$ , а  $\Gamma(P)$  определено в (5).

Описание пространства решений системы разностных уравнений (1) через вычеты Гротендика дает следующая

<sup>1</sup> Работа поддержана грантом РФФИ 05-01-00517.

\* © Е.К.Лейнартас, Красноярский государственный университет, 2006.

**Теорема 1.** Функция  $f : \mathbb{Z}_+^n \rightarrow \mathbb{C}^n$  является решением системы разностных уравнений (1) тогда и только тогда, когда  $f(x)$  представляется формулой вида (6).

Описание пространства решений системы дифференциальных уравнений (2) через вычеты Гротендика содержится в следующей теореме:

**Теорема 2.** Степенной ряд (4) является решением системы дифференциальных уравнений (2) тогда и только тогда, когда  $u(t)$  представляется формулой вида

$$u(t) = (2\pi i)^{-n} \int_{\Gamma(P)} \frac{h(\xi) e^{\langle t, \xi \rangle} d\xi}{P_1(\xi) \cdots P_n(\xi)}, h(\xi) \in H, \quad (7)$$

где  $\langle t, \xi \rangle = t_1 \xi_1 + \cdots + t_n \xi_n$ , а  $\Gamma(P)$  определено в (5).

Вычисляя интеграл (6), получим

**Следствие 1.** Всякое решение  $f(x)$  системы разностных уравнений (1) можно представить в «экспоненциальном» виде

$$f(x) = \sum_{\mu=1}^k c_\mu(x) \lambda_\mu^x, \quad (8)$$

где  $c_\mu(x)$  — некоторые полиномы переменных  $x = (x_1, \dots, x_n)$ .

Вычисляя интеграл (7), получим

**Следствие 2.** Всякое решение  $u(t)$  системы дифференциальных уравнений (2) можно представить в «экспоненциальном» виде

$$u(t) = \sum_{\mu=1}^k R_\mu(t) e^{\langle \lambda_\mu, t \rangle}, \quad (9)$$

где  $R_\mu(t)$  — некоторые полиномы переменных  $t = (t_1, \dots, t_n)$ .

Отметим, что в случае, когда  $\lambda_\mu$  — простые корни характеристической системы (3) (т.е. кратности один), то полиномы  $c_\mu(x)$  и  $R_\mu(t)$  в формулах (8) и (9) — это просто константы.

Докажем утверждения, сформулированные выше. Лемма доказана в работе [3]. Достаточность в теореме 1 сразу следует из того факта, что цикл  $\Gamma(P)$ , определенный формулой (5), является разделяющим, т.е.  $\Gamma(P)$  гомологичен нулю в  $\mathbb{C}^n \setminus \bigcup_{\substack{j=1 \\ j \neq s}}^n V_j$  для  $s = 1, \dots, n$  (см. [2]). Действительно, в этом случае

$$P_s(\delta) f(x) = (2\pi i)^{-n} \int_{\Gamma(P)} \frac{h(\xi) \xi^x d\xi}{P_1(\xi) \cdots P_{s-1}(\xi) \cdot P_{s+1}(\xi) \cdots P_n(\xi)} = 0$$

для  $s = 1, 2, \dots, n$ .

Для доказательства необходимого условия в теореме 1 введем некоторые обозначения. Пусть  $L$  — линейное пространство решений системы разностных уравнений (1) и  $\mathcal{F} = \{f(x)\}$  множество функций, представимых формулой (6). Нетрудно видеть, что  $\mathcal{F}$  — подпространство  $L$ , причем  $\dim \mathcal{F} = \dim H$  в силу невырожденности вычета Гротендика

$$\int_{\Gamma(P)} \frac{h(\xi) d\xi}{P_1 \cdots P_n} = 0 \text{ тогда и только тогда, когда } h(\xi) \in J_P.$$

Если показать теперь, что  $\dim L = \dim H$ , то тогда  $L = \mathcal{F}$  и теорема 1 будет доказана.

Для произвольной функции  $f : \mathbb{Z}_+^n \rightarrow \mathbb{C}$  определим ее  $z$ -преобразование  $F(z)$  (производящую функцию) формулой

$$F(z) = \sum_{y \in \mathbb{Z}_+^n} \frac{f(y)}{z^{y+I}}, I = (1, \dots, 1). \quad (10)$$

Пусть  $\{z^{\tau_l}, l = 1, \dots, m\}$  — мономиальный базис фактор-кольца  $H$ , тогда  $\dim H = m$  и для любого  $x \in \mathbb{Z}_+^n$  моном  $z^x$  можно представить в виде  $z^x = \sum_{l=1}^m a_l(x) z^{\tau_l} + g(z)$ , где  $g(z) \in J_P$ .

Умножая последнее тождество на  $F(z)$ , получим (если  $f(x)$  — решение системы разностных уравнений (1))

$$f(y+x) = \sum_{l=1}^m a_l f(y + \tau_l), x \in \mathbb{Z}_+^n, y \in \mathbb{Z}_+^n. \quad (11)$$

Отметим, что при этом мы воспользовались тем, что  $g(\delta) f(x) = 0$  для  $g(z) \in J_P$  и  $f(x) \in L$ .

Полагая в (11)  $y = 0$ , видим, что любое решение  $f(x)$  системы разностных уравнений (1) полностью определяется его значениями в  $m = \dim H$  точках  $x = \tau_l$ , где  $l = 1, \dots, m$ :

$$f(x) = \sum_{l=1}^m a_l(x) f(\tau_l).$$

Это означает, что  $\dim L = m$  и теорема 1 доказана.

Для доказательства формулы (7) нужно умножить (6) на  $\frac{t^x}{x!}$  и просуммировать полученное равенство по  $x \in \mathbb{Z}_+^n$ .

Формулы (8) и (9) для решений системы (1) и (2) соответственно получаются следующим образом: сначала глобальный вычет Гротендика заменим на сумму локальных вычетов:

$$f(x) = \sum_{\mu=1}^k (2\pi i)^{-n} \int_{\Gamma_{\lambda_\mu}(P)} \frac{h(\xi) \xi^x d\xi}{P_1(\xi) \cdots P_n(\xi)} \quad \text{и} \quad u(t) = \sum_{\mu=1}^k (2\pi i)^{-n} \int_{\Gamma_{\lambda_\mu}(P)} \frac{h(\xi) e^{\langle t, \xi \rangle} d\xi}{P_1(\xi) \cdots P_n(\xi)}. \quad (12)$$

Согласно локальному варианту теоремы Гильберта о корнях, найдется число  $\alpha_{j,\mu}$  такое, что моном  $(z_j - (\lambda_\mu)_j)^{\alpha_{j,\mu}}$  степени  $\alpha_{j,\mu}$  выражается через полиномы  $P_1, \dots, P_n$ :

$$g_{j,\mu} := (z_j - (\lambda_\mu)_j)^{\alpha_{j,\mu}} = \sum_{s=1}^n A_{s,j}^\mu P_s(z),$$

где  $A_{s,j}^\mu$  — ростки голоморфных в точке  $\lambda_\mu$  функций.

Обозначим  $\alpha_\mu = (\alpha_{1,\mu}, \dots, \alpha_{n,\mu})$ ,  $|\alpha_\mu| = \alpha_{1,\mu} + \dots + \alpha_{n,\mu}$ ,  $g_\mu = (g_{1,\mu}, \dots, g_{n,\mu})$ .

Далее к (12) применим формулу преобразования локального вычета Гротендика (см. [2], 31) и получим:

$$f(x) = \sum_{\mu=1}^k (2\pi i)^{-n} \int_{\Gamma_{\lambda_\mu}(g_\mu)} \frac{h(\xi) \xi^x \det \|A_{s,j}^\mu(\xi)\|_{n \times n} d\xi}{g_{1,\mu}(\xi) \cdots g_{n,\mu}(\xi)},$$

$$u(t) = \sum_{\mu=1}^k (2\pi i)^{-n} \int_{\Gamma_{\lambda_\mu}(g_\mu)} \frac{h(\xi) e^{\langle t, \xi \rangle} \det \|A_{s,j}^\mu(\xi)\|_{n \times n} d\xi}{g_{1,\mu}(\xi) \cdots g_{n,\mu}(\xi)} \quad (13)$$

Интегралы в (13) выражаются через производные числителей подынтегральных выражений в точках  $\lambda_\mu$ , и для  $f(x)$  и  $u(t)$  получаются выражения вида (8) и (9) соответственно.

## Список литературы

- [1] Арнольд В.И. *Особенности дифференцируемых отображений. Т.1* / В.И. Арнольд, А.Н. Варченко, С.Н. Гусейн-Заде. — М.: Наука, 1982.
- [2] Цих А.К. *Многомерные вычеты и их приложения* / А.К.Цих. — Новосибирск: Наука СО РАН, 1988.
- [3] Лейнартас Е.К. *Кратные ряды Лорана и разностные уравнения* / Е.К.Лейнартас // Сиб. матем. журн. — 2004. — Т.45. — №2. — С.387–393.

## GROTHENDIECK'S RESIDUE AND SYSTEMS OF DIFFERENCE AND DIFFERENTIAL EQUATIONS WITH CONSTANT COEFFICIENTS

E.K. Leinartas

*Using the Grothendieck's residue we deduce the integral representation of the solutions to a linear systems of difference and differential equations with constant coefficients.*