КЛАССИЧЕСКИЕ ОТО И КОСМОЛОГИЯ: МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ; ДВИЖЕНИЕ ЧАСТИЦ В ГРАВИТАЦИОННОМ ПОЛЕ; УРАВНЕНИЯ ТЯГОТЕНИЯ И ТОЧНЫЕ РЕШЕНИЯ

СТО

1905 2005

УДК 530.12: 531.51

К ПРОБЛЕМЕ ИНТЕГРИРОВАНИЯ УРАВНЕНИЙ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ В ИСКРИВЛЕННОМ ПРОСТРАНСТВЕ-ВРЕМЕНИ[1]

В.Г.Багров, В.В.Обухов, К.Е.Осетрин[*]

Исследована проблема полного разделения переменных в уравнении Гамильтона – Якоби, а также в уравнениях Кляйна – Фока – Гордона и Дирака – Фока – Иваненко. Рассмотрено интегрирование уравнений Эйнштейна для штеккелевых и конформно-штеккелевых пространств.

1. Постановка задачи

Одной из главных задач математической физики в области теории гравитации является задача точного интегрирования полевых уравнений и уравнений движения материи. Для решения этой задачи используют класс римановых метрик, в которых простейшие уравнения движения могут быть проинтегрированы методом полного разделения переменных. По-видимому, в этом классе метрик основной интерес представляют метрики Штеккеля.

Напомним, что метрика называется штеккелевой, если уравнение Гамильтона – Якоби

$$g^{ij}S_{,i}S_{,j}=m^2, \qquad i,j,k,l=1,...,n, \tag{1.1}$$

может быть проинтегрировано методом полного разделения переменных. В этом случае существует привилегированная система координат $\{u^i\}$, в которой интеграл уравнения (1.1) может быть представлен в виде

$$S=\sum_{i=1}^{n}\phi_i(u^i,\lambda), \tag{1.2}$$

где λ_i - существенные параметры.

Оказывается, что и другие важные уравнения движения (Кляйна – Фока – Гордона, Дирака, Вейля) могут быть проинтегрированы методом полного разделения переменных только для метрик, принадлежащих к классу штеккелевых пространств. В связи с этим исследование этих пространств принадлежит к числу важных задач математической физики. В данной работе мы рассмотрим следующие задачи:

- Проблема полного разделения переменных в уравнении Гамильтона – Якоби.
- Соответствующая проблема для уравнения Кляйна - Фока - Гордона.
- Полное разделение переменных в уравнении Дирака - Фока – Иваненко.
- Интегрирование уравнений Эйнштейна для штеккелевых пространств.
- Конформно-штеккелевы пространства

[1] Работа поддержана грантом РФФИ №03-01-00105 и грантом Президента по научной школе.

2. Штеккелевы пространства

Теория штеккелевых пространств была построена многими авторами (см., например, [1-11] и ссылки в них). Приведем основные положения и перечислим основные теоремы теории штеккелевых пространств.

Определение 1. *Пусть V_n есть n-мерное риманово пространство с метрическим тензором g_{ij}. Уравнение Гамильтона – Якоби может быть проинтегрировано методом полного разделения переменных, если существует система координат $\{u^i\}$, в которой полный интеграл может быть представлен в форме (1.2).*

Определение 2. *V_n называется штеккелевым пространством, если уравнение (1.1) может быть проинтегрировано методом полного разделения переменных.*

Следующая теорема была доказана В.Н. Шаповаловым [4–5].

Теорема 1. *Пусть V_n – штеккелево пространство. Тогда g_{ij} в привилегированной системе координат может быть записан в виде*

$$\begin{gathered} g^{ij} = (\Phi^{-1})^{\nu}_{n} G^{ij}_{\nu}, \\ G^{ij}_{\nu} = G^{ij}_{\nu}(u^{\nu}), \qquad \Phi^{\nu}_{\mu} = \Phi^{\nu}_{\mu}(u^{\mu}), \\ G^{ij}_{\nu} = \delta^i_{\nu}\delta^j_{\nu}\varepsilon_{\nu}(u^{\nu}) + (\delta^i_{\nu}\delta^j_{p} + \delta^j_{\nu}\delta^i_{p})G^{\nu p}_{\nu} + \delta^i_{p}\delta^j_{q}G^{pq}_{\nu}, \\ p,q = 1,\dots N, \qquad \nu,\mu = N+1,\dots,n. \end{gathered} \tag{2.1}$$

Здесь $\Phi^{\nu}_{\mu}(u^{\mu})$ – так называемая матрица Штеккеля.

Принято суммирование по повторяющимся верхним и нижним индексам, если справа от формулы не стоит символ $ns(i\ ,j\ ,\ \dots)$ (нет суммирования по индексам, указанным в скобках). Показано, что уравнение геодезических в штеккелевых пространствах допускает первые интегралы, попарно коммутирующие относительно скобок Пуассона

$$\underset{\mu}{X} = (\Phi^{-1})^{\nu}_{\mu} H_{\nu} \quad H_{\nu} = \varepsilon_{\nu} p^2_{\nu} + 2G^{pq}_{\nu} p_p p_q + h^{pq}_{\nu} p_p p_q, \quad \underset{p}{Y} = \underset{p}{Y}^{i}\, p_i. \tag{2.2}$$

Таким образом, для ковариантной характеристики штеккелева пространства достаточно найти соответствующие свойства интегралов (2.2) в произвольной системе координат $\{x^i\}_n$. Запишем функции X_{ν}, Y_p в виде

$$\underset{\nu}{X} = \underset{\nu}{X}^{ij}\, p_i p_j, \quad \underset{p}{Y} = \underset{p}{Y}^{ij}\, p_i p_j. \tag{2.3}$$

Тогда

$$\underset{\nu}{X}_{(ij;k)} = \underset{p}{Y}_{(i;j)} = 0$$

(точка с запятой означает ковариантную производную, а скобки означают симметризацию). Следовательно, ${Y_p}^i$, ${X_{\nu}}^{ij}$ есть компоненты векторных и тензорных полей Киллинга соответственно.

Определение 3. *Попарно коммутирующие векторные ${Y_p}^i$, где p=1, ..., N и тензорные ${X_{\nu}}^{ij}$, где $\nu = N+1,\dots,n$ поля Киллинга, образуют полный набор типа (N.N0), если*

$$B^{pq} \underset{p}{Y}^i \underset{q}{Y}^j + B^{\nu} \underset{\nu}{X}^{ij} = 0 \;\Rightarrow\; B^{pq} = B^{\nu} = 0, \tag{2.4}$$

$$rank \,\| \underset{p}{Y}^i \underset{q}{Y}_i \| = N - N_0, \tag{2.5}$$

$$\underset{\nu}{X}^{ik} \underset{\mu}{X}^{j}{}_{k} = C^{pq}_{\nu\mu} \underset{p}{Y}^i \underset{q}{Y}^j + C^{\tau}_{\nu\mu} \underset{\tau}{X}^{ij}, \quad C^{\tau}_{\nu\mu} = \Phi^{\tau}_{\rho}(\Phi^{-1})^{\rho}_{\nu}(\Phi^{-1})^{\rho}_{\mu} / (\Phi^{-1})^{\rho}_{n}, \tag{2.6}$$

$$\underset{\nu}{X}^{ij} \underset{p}{Y}_{j} = C^{q}_{\nu p} \underset{q}{Y}^i. \tag{2.7}$$

Теорема 2. *Необходимым и достаточным геометрическим критерием штеккелева пространства является существование полного набора типа (N.N$_0$).*

Другими словами, уравнение Гамильтона – Якоби может быть проинтегрировано методом полного разделения переменных тогда и только тогда, когда существует полный набор первых интегралов движения.

Эта теорема была доказана в работе [4].

Можно дать следующее определение:

Определение 4. *Пространство-время называется штеккелевым пространством типа* ($N.N_0$), *если существует полный набор типа* ($N.N_0$).

Все эти теоремы и определения справедливы в случае, если рассматривается свободное уравнение Гамильтона – Якоби.

Рассмотрим уравнение Гамильтона – Якоби для заряженной частицы

$$g^{ij}(S_{,i}+A_i)(S_{,j}+A_j)=m^2. \tag{2.8}$$

Определение 5. *Уравнение (2.8) допускает полное разделение переменных, если существует система координат* $\{u^i\}$, *в которой полный интеграл может быть представлен в виде (1.2).*

Можно доказать следующее:

Теорема 3. *Если уравнение (2.8) допускает полное разделение переменных, то* g^{ij} *– метрический тензор штеккелева пространства типа* ($N.N_0$).

Используя эту теорему, можно показать, что разделение имеет место в привилегированной системе координат и

$$A^i=(\Phi^{-1})^{\nu}_{n}h^i_{\nu}(u^{\nu}), \quad A_iA^i=(\Phi^{-1})^{\nu}_{n}h_{\nu}(u^{\nu}). \tag{2.9}$$

Последнее условие может быть рассмотрено как функциональное уравнение. Заметим, что до сих пор это уравнение не решено в общем случае. Оно решено только для случая, когда A^i и g^{ij} удовлетворяют уравнениям Эйнштейна – Максвелла [11-14]:

$$R_{ij}-\frac{1}{2}g_{ij}R=8\pi GT_{ij}+\Lambda g_{ij}, \quad \Lambda=const, \tag{2.10}$$

$$T_{ij}=\frac{1}{4\pi}(F_{il}F^l{}_j-\frac{1}{4}g_{ij}F_{kl}F^{kl}), \tag{2.11}$$

$$F_{ij}=A_{j,i}-A_{i,j}, \quad F^{ij}{}_{;j}=0. \tag{2.12}$$

3. Разделение переменных в уравнении Кляйна – Фока – Гордона

Рассмотрим уравнение Кляйна – Фока – Гордона в римановом пространстве.

$$(\not{A}-m^2)\psi\equiv[g^{kl}(i\nabla_k+A_k)(i\nabla_l+A_l)-m^2]\psi=0, \tag{3.1}$$

где ∇_i – ковариантная производная, ψ – скалярная функция.

Определение 6. *Уравнение (3.1) допускает полное разделение переменных, если существует система координат* $\{u^i\}$, *в которой полный интеграл может быть представлен в виде*

$$\psi=f(u)\prod_{i=1}^{n}\phi_i(u^i,\lambda), \quad \det\left\|\frac{\partial^2\psi}{\partial u^i\partial\lambda_j}\right\|\neq 0, \quad \lambda_n=m^2. \tag{3.2}$$

Следующая теорема была доказана В.Н. Шаповаловым [15].

Теорема 4. *Пусть уравнение (3.1) допускает полное разделение переменных. Тогда* g^{ij} *есть метрический тензор штеккелева пространства. Более того, разделение переменных имеет место в той же привилегированной системе координат.*

Используя привилегированную систему координат, запишем g^{ij} в таком виде:

$$g^{ij}=\frac{W^{\nu}}{\Phi}h^{ij}_{\nu},$$
$$h^{ij}_{\nu}=\delta^i_{\nu}\delta^j_{\nu}\varepsilon^{\nu}+(\delta^i_{\nu}\delta^j_{p}+\delta^j_{\nu}\delta^i_{p})h^{\nu p}_{\nu}+\delta^i_{p}\delta^j_{q}h^{pq}_{\nu} \tag{3.3}$$
$$W^{\nu}_{,\nu}=0, \quad ns(\nu).$$

Теперь мы можем сформулировать следующую теорему, которая также была доказана В.Н. Шаповаловым:

Теорема 5. *Уравнение (3.1) допускает полное разделение переменных тогда и только тогда, когда оператор*

$$\hat{H} = \exp(-i\mathcal{F})\hat{\mathcal{H}}\exp(i\mathcal{F}) \tag{3.4}$$

может быть представлен в виде

$$\hat{H} = \frac{W^{\nu}}{\Phi}\hat{\mathcal{H}}_{\nu},$$

где

$$\hat{\mathcal{H}}_{\nu} = \varepsilon^{\nu}\mathcal{P}_{\nu}^{2} + 2h_{\nu}^{p\nu}\mathcal{P}_{p}\mathcal{P}_{\nu} + h_{\nu}^{pq}\mathcal{P}_{p}\mathcal{P}_{q} + 2h_{\nu}^{\nu}\mathcal{P}_{\nu} + 2h_{\nu}^{p}\mathcal{P}_{p} + h_{\nu}, \quad \mathcal{P}_{i} = \frac{\partial}{\partial u^{i}},$$

$\mathcal{F}$ - некоторая функция, зависящая от всех u^i.

Из этого следует [15]:

$$\hat{\mathcal{H}} = g^{ij}\mathcal{P}_{i}\mathcal{P}_{j} + \left[i\frac{W^{\nu}}{\Phi},(\dot{h}_{\nu}^{\nu i} - 2\chi_{,\nu}h_{\nu}^{\nu i}) + 2A^{i}\right]\mathcal{P}_{i} + \frac{i}{\Phi}(A^{i}\Phi)_{,i} - 2i\chi_{,\nu}A^{\nu} + A^{i}A_{i}, \tag{3.5}$$

$$\mathcal{P}_{k} = i\frac{\partial}{\partial u^{k}}, \quad \chi \equiv \frac{1}{4}\ln\left|\Phi^{2}\det g^{ij}\right|.$$

Используя теорему, можно показать

$$A^{i} = (\Phi^{-1})_{n}^{\nu}a_{\nu}^{i}(u^{\nu}) = \frac{W^{\nu}}{\Phi}a_{\nu}^{i}(u^{\nu}),$$

$$a_{\nu}^{i} = \delta_{\nu}^{i}a_{\nu}^{\nu} + \delta_{p}^{i}a_{\nu}^{p}.$$

Следовательно, функция $\mathcal{F}$ может быть выбрана как

$$\mathcal{F} = \chi$$

и оператор

$$\hat{H} = \frac{W^{\nu}}{\Phi}h_{\nu}^{ij}\mathcal{P}_{i}\mathcal{P}_{j} + \frac{W^{\nu}}{\Phi}(2a_{\nu}^{k} + ih_{\nu}^{\nu k})\mathcal{P}_{k} + i\frac{\dot{a}_{\nu}^{\nu}}{\Phi} + A^{i}A_{i} - (\chi_{,\nu\nu} + \chi_{,\nu}\chi_{,\nu})\frac{W^{\nu}}{\Phi}.$$

Таким образом, уравнение (3.1) допускает полное разделение переменных тогда и только тогда, когда удовлетворяется условие

$$A^{i}A_{i} - (\chi_{,\nu\nu} + \chi_{,\nu}\chi_{,\nu})\frac{W^{\nu}}{\Phi} = h^{\nu}(u^{\nu})\frac{W^{\nu}}{\Phi}. \tag{3.6}$$

Это условие очень сложно и до сих пор не решено в общем виде. Заметим, что из (3.6) следует, что если:

I. $\chi = \prod_{\nu=N+1}^{n}\varphi_{\nu}(u^{\nu})$,

II. уравнение (2.8) допускает полное разделение переменных,

то уравнение Кляйна – Фока – Гордона также допускает полное разделение переменных [15]. Кроме того, в работе [16] было доказано, что в специальных штеккелевых пространствах электровакуума уравнение (3.1) может быть проинтегрировано методом полного разделения переменных. Напомним, что штеккелево пространство называется специальным, если уравнение (2.8) допускает полное разделение переменных [14].

4. Разделение переменных в уравнении Дирака-Фока-Иваненко

Задача разделения переменных в уравнении Дирака – Фока – Иваненко первоначально была рассмотрена только для физически важных пространств общей теории относительности. Брилль и Хилер [17] осуществили полное разделение переменных в безмассовом уравнении Дирака для метрики Шварцшильда, используя спиновые интегралы движения в виде матрицы дифференциальных операторов первого порядка. Заметим, что двухкомпонентное уравнение Вейля не допускает подобного интеграла движения в этом пространстве. Тюкольски [18] показал, что уравнение Вейля может быть проинтегрировано методом полного разделения переменных в пространстве Керра. Для массивного уравнения Дирака задача разделения в пространстве Керра была решена Чандрасекаром [19]. Его метод был основан на подходящем упрощающем преобразовании оператора Дирака. Используя этот метод, Пейдж [20] решил задачу разделения переменных в пространстве Керра – Ньюмана. Позднее это было использовано для метрик типа D. В [21] было замечено, что в пространствах, допускающих разделение переменных методом Чандрасекара, существуют интегралы движения в виде матрицы дифференциальных операторов первого порядка, таких, что их собственные значения есть константы разделения переменных. При изучении этих случаев было открыто интересное обстоятельство. Буквально все соответствующие пространства принадлежали к классу штеккелевых. В работе [22] было показано, что это обстоятельство не случайно. Более того, если уравнение Дирака может быть проинтегрировано методом полного разделения переменных, пространство-время всегда штеккелево. В работе [23] рассмотрена задача полного разделения переменных в уравнении Дирака – Фока – Иваненко для случая, когда пространство-время является штеккелевым и уравнение допускает полный набор попарно коммутирующих матриц – операторов симметрии первого порядка. В данной главе рассмотрен этот случай.

Уравнение Дирака – Фока – Иваненко (ДФИ) может быть записано в виде

$$\hat{H}\Phi = m\Phi, \tag{DFI}$$

где $\hat{H}$ – оператор Дирака – Фока – Иваненко, найденный с помощью тетрады

$$e_a^i = (l^i, n^i, m^i, \overline{m}^i).$$

Тетрадные индексы a, b, c, d изменяются в пределах от 1 до 4, $\overline{m}^i$ – комплексно-сопряженный с m^i. Соответствующий формализм называется формализмом Ньюмена – Пенроуза [24]. Все ссылки могут быть найдены в [25]. Чтобы записать оператор Дирака в римановом пространстве (оператор Дирака – Фока – Иваненко), используют тетрадные компоненты матриц Дирака

$$\gamma^i(x) = e_a^i(x)\tilde{\gamma}^a,$$

здесь

$$\begin{gathered} \gamma^i\gamma^j + \gamma^j\gamma^i = 2g^{ij} \otimes \hat{E}_4, \\ \tilde{\gamma}^a\tilde{\gamma}^b + \tilde{\gamma}^b\tilde{\gamma}^a = 2\eta^{ab} \otimes \hat{E}_4, \\ \eta^{ab} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}. \end{gathered} \tag{4.1}$$

Тем самым оператор $\hat{H}$ можно представить в виде

$$\hat{H} = \gamma^i p_i. \tag{4.2}$$

Оператор p_i был найден Фоком и Иваненко

$$p_k = i(\nabla_k - \Gamma_k), \tag{4.3}$$

где Γ_k – коэффициенты Фока – Иваненко

$$\Gamma_i = -\frac{1}{4} e_{ka} e^k_{b;i} \tilde{\gamma}^a \tilde{\gamma}^b.$$

Следующее определение было введено В.Н.Шаповаловым [26].

Определение 7. *Уравнение ДФИ допускает полное разделение переменных, если существует привилегированная система координат* $\{u^i\}$, *в которой локальный полный интеграл уравнения ДФИ может быть записан в виде*

$$\Phi(x, \lambda) = S(x) \prod_{i=0}^{3} \phi_i(x^i, \lambda), \tag{4.4}$$

где $[\phi_i, \phi_j] = 0$, $S(x)$ *– невырожденная матрица, зависящая от существенных параметров* λ_1, λ_2, λ_3, m.

В.Н.Шаповалов доказал, что существование матрицы операторов симметрии уравнения ДФИ является необходимым условием разделения переменных. Некоторые из них имеют вид

$$\underset{p}{\hat{L}} = \hat{E}_4 \otimes \underset{p}{Y}, \quad \underset{p}{Y} = \underset{p}{Y}^i \partial_i. \tag{4.5}$$

Очевидно, что $Y_p{}^i$ – вектор Киллинга. Кроме того, в работе [26] было показано, что операторы симметрии первого порядка имеют одну из следующих двух форм:

I.

$$\hat{L} = -\frac{i}{4!}e_{klij}\gamma^k\gamma^l\gamma^i\gamma^j f^{rs}\gamma_r p_s + \frac{1}{3}\gamma_j \tilde{f}^{kj}{}_{;k}, \tag{4.6}$$

здесь $e_{ijkl} = \sqrt{|g|}\varepsilon_{ijkl}$ – тензор Леви-Чивиты, $\varepsilon_{0123} = 1$, $\tilde{f}_{ij} = e_{ijkl}f^{kl}/2$. Тензор Яно – Киллинга f_{ij} определяется из уравнения

$$f_{i(j;k)} = 0. \tag{4.7}$$

II.

$$\hat{L} = -\frac{i}{4!}e_{ijkl}\gamma^i\gamma^j\gamma^k\gamma^l\{[\gamma^m\gamma^k]f_k p_m + \frac{3}{4}f^k{}_{;k}\}, \tag{4.8}$$

где вектор Яно f^k определяется уравнением

$$f_{i;k} = \frac{1}{4}g_{ik}f^l{}_{;l}. \tag{4.9}$$

Операторы (4.6), (4.8) называются спиновыми операторами.

В работе [23] были найдены следующие соотношения:

$$X^{ij} = \pm f^{ik}f_k{}^j \quad X^{ij} = \pm(f^i f^j - g^{ij}f^l f_l). \tag{4.10}$$

В результате были перечислены все метрики, обладающие указанными свойствами. Для полученных метрик была рассмотрена задача разделения переменных в уравнении Дирака.

Заметим, что существование спинового оператора не является необходимым условием разделения переменных. Действительно, пусть полный интеграл уравнения Дирака не может быть представлен в виде (4.4). Тем не менее, если мы запишем функцию Ψ в следующем виде:

$$\Phi = (\hat{H} + m)\Psi, \tag{4.11}$$

и квадрированное уравнение Дирака

$$(\hat{H}^2 - m^2)\Psi = 0, \tag{4.12}$$

мы можем найти систему координат $\{u^i\}$, в которой решение уравнения (4.12) примет вид (4.4). Введем определение:

Определение 8. *Уравнение Дирака допускает полное разделение переменных, если существует привилегированная система координат $\{u^i\}$, в которой существует решение уравнения (4.12), зависящее от четырех существенных параметров (включая m).*

Это определение было дано в работе [22]. В этой статье была доказана

Теорема 6. *Если уравнение Дирака допускает полное разделение переменных согласно предыдущему определению, то пространство является штеккелевым.*

Заметим, что последнее определение более общее, чем определение 7. Действительно, пусть функция Φ имеет вид (4.4). Умножим уравнение Дирака на оператор

$$(\hat{H} + m).$$

Тогда мы должны получить, что функция Φ удовлетворяет квадрированному уравнению Дирака. Так как функция Φ имеет вид (4.4), определение 8 удовлетворяется. Заметим, что использование обоих этих определений представляет собой довольно трудную задачу. Чтобы найти векторы Яно или тензоры Яно – Киллинга, нужно решить систему дифференциальных уравнений (4.7), (4.9) в штеккелевом пространстве. Чтобы разделить квадрированное уравнение Дирака, нужно решить очень сложное функциональное уравнение. Задача была решена только для следующих случаев:

I. Если выполняются условия (4.10).

II. Если квадрированное уравнение Дирака допускает диагонализацию [27].

Рассмотрим последний случай более подробно. Квадрированное уравнение Дирака может быть записано в виде

$$\hat{\mathcal{H}}^2\Psi \equiv (\hat{H}^2 - m^2)\Psi = 0.$$

Пусть равенство

$$\hat{\mathcal{H}}^2\hat{\Omega} = \hat{\Omega}_1\hat{L} \tag{4.13}$$

выполнено. Здесь $\hat{L}$ - диагональный дифференциальный оператор второго порядка, $\hat{\Omega}$ и $\hat{\Omega}_1$ - произвольные матрицы. Тогда решение уравнения (4.12) может быть записано в виде

$$\hat{\Psi} = \hat{\Omega}\hat{\phi}, \quad \hat{L}\hat{\phi} = 0. \tag{4.14}$$

В формализме Ньюмена – Пенроуза уравнение Дирака может быть записано так:

$$\hat{H}\hat{\Psi} = \left[\begin{pmatrix} \hat{0} & \Box_1 \\ \hat{\sigma}_2\Box_2\hat{\sigma}_2 & \hat{0} \end{pmatrix} - im\begin{pmatrix} \hat{\sigma}_2 & \hat{0} \\ \hat{0} & -\hat{\sigma}_2 \end{pmatrix}\right]\begin{pmatrix} V_A \\ U_A \end{pmatrix} = 0, \tag{4.15}$$

где

$$\Box_1 = \sqrt{2}(\hat{1}\partial_n + \hat{4}\partial_l - \hat{3}\partial_m + i\hat{W}),$$
$$\Box_2 = \sqrt{2}(\hat{1}\partial_l + \hat{4}\partial_n + \hat{3}\partial_m + \hat{2}\partial_{\overline{m}} + i\hat{\sigma}_2\hat{W}\hat{\sigma}_2),$$
$$\hat{1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{2} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{3} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{4} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$
$$\hat{\sigma}_1 = \hat{2} + \hat{3}, \quad \hat{\sigma}_2 = i(\hat{3} - \hat{2}), \quad \hat{\sigma}_3 = \hat{1} - \hat{4}, \quad \hat{\sigma}_0 = \hat{1} + \hat{4},$$
$$\hat{p}_j = i\nabla_j - A_j, \quad \partial_l = l^i\hat{p}_i, \quad \partial_n = n^i\hat{p}_i, \quad \partial_m = m^i\hat{p}_i, \quad \partial_{\overline{m}} = \overline{m}^i\hat{p}_i,$$
$$\hat{W} = (\mu - \gamma)\hat{1} + (\tau - \beta)\hat{2} + (\alpha - \pi)\hat{3} + (\varepsilon - \rho)\hat{4}.$$

Запишем биспинор $\hat{\Psi}$ в виде

$$\hat{\Psi} = \hat{A}\hat{\Omega}_1\hat{\psi},$$

где

$$\hat{A} = \left[\begin{pmatrix} \hat{0} & \hat{\sigma}_2\Box_1\hat{\sigma}_2 \\ \Box_2 & \hat{0} \end{pmatrix} - im\begin{pmatrix} \hat{\sigma}_2 & \hat{0} \\ \hat{0} & -\hat{\sigma}_2 \end{pmatrix}\right],$$

Тогда

$$\hat{\mathcal{H}}^2 = \begin{pmatrix} \Box_1\Box_2 - m^2 & 0 \\ 0 & \hat{\sigma}_2\Box_2\Box_1\hat{\sigma}_2 - m^2 \end{pmatrix}.$$

Можно показать, что $\hat{\Omega}_1 = \hat{\Omega}$ и

$$\hat{\psi} = \begin{pmatrix} \hat{\phi} \\ \hat{0} \end{pmatrix}, \quad \hat{\Omega} = \begin{pmatrix} \hat{B} & \hat{0} \\ \hat{Y} & \hat{0} \end{pmatrix}, \quad \hat{L} = \begin{pmatrix} \hat{\mathcal{L}} & \hat{0} \\ \hat{0} & \hat{0} \end{pmatrix}, \quad \hat{\mathcal{L}} = \begin{pmatrix} \hat{L}_+ & \hat{0} \\ \hat{0} & \hat{L}_- \end{pmatrix},$$

где $\hat{\phi}$ - 2-спинор, $\hat{B}$, $\hat{Y}$, $\hat{\mathcal{L}}$, $\hat{0}$ – матрицы 2×2. В работе [27] была доказана теорема

Теорема 7. *Квадрированное уравнение Дирака может быть диагонализовано тогда и только тогда, когда существует привилегированная тетрада, для которой*

$$\Phi_0 = \kappa = \sigma = \rho = \tau = 0. \tag{4.16}$$

Кроме того, оператор $\hat{\mathcal{L}}$ и матрицы $\hat{B}$, $\hat{Y}$ имеют вид:

$$\hat{\mathcal{L}} = \Box + 2i(\hat{1}\gamma + \hat{4}\overline{\gamma})\partial_l + (\varepsilon\hat{1} + \overline{\varepsilon}\hat{4})\partial_n - (\alpha\hat{1} + \overline{\beta}\hat{4})\partial_m - (\beta\hat{1} + \overline{\alpha}\hat{4})\partial_{\overline{m}} + \Phi_1\hat{1} + \overline{\Phi}_1\hat{4} -$$
$$- 2\hat{1}[\delta\varepsilon - \overline{\delta}\beta - |\beta - \tau|^2 - (\overline{\mu} - \overline{\gamma})\varepsilon] -$$
$$- 2\hat{4}[D(\mu - \gamma) + \delta(\alpha - \pi) - |\alpha - \pi|^2 - \overline{\varepsilon}(\gamma - \mu)],$$
$$\Phi_0 = F_{ij}l^i m^j, \quad 2\Phi_1 = F_{ij}(l^i n^j + \overline{m}^i m^j), \quad \Phi_2 = F_{ij}\overline{m}^i n^j, \quad \hat{B} = \hat{1}, \quad \hat{Y} = \hat{2}.$$

Здесь $\Box$ – оператор Кляйна – Фока – Гордона.

Все штеккелевы пространства, для которых квадрированное уравнение Дирака допускает диагонализацию и разделение переменных, были найдены в работе [27].

5. Штеккелевы пространства и полевые уравнения теорий гравитации

Метрики штеккелевых пространств могут быть использованы для интегрирования полевых уравнений общей теории относительности и других теорий гравитации. Заметим, что такие знаменитые решения, как Шварцшильда, Керра, НУТ, Фридмана и другие, принадлежат к классу штеккелевых пространств. Несомненно, первые работы по классификации штеккелевых пространств, удовлетворяющих уравнениям Эйнштейна, были опубликованы Картером [11]. Позднее в работе [28] была найдена полная классификация штеккелевых пространств электровакуума. Другими словами, были найдены все штеккелевы пространства, удовлетворяющие уравнениям Эйнштейна – Максвелла (2.10) – (2.12) в случае, когда потенциалы A_i допускают полное разделение переменных в уравнении Гамильтона – Якоби (2.8). В работе [28] была решена классификационная задача для случая, когда A_i являются произвольными функциями и пространство – нулевая поверхность (типы *(N.1)*). В работе [29] были найдены все пространства электровакуума, допускающие диагонализацию и полное разделение переменных в уравнении Дирака – Фока – Иваненко.

Одна из трудных проблем современной математической физики – задача интегрирования уравнений Эйнштейна – Дирака. В формализме Ньюмена – Пенроуза можно записать эти уравнения таким образом:

$$R_{ij}-\frac{1}{2}g_{ij}R=8\pi GT_{ij},$$

$$\nabla_{ab'}\xi^{a}=m_0\eta_{b'},\quad \nabla_{ab'}\eta^{a}=m_0\xi_{b'}, \tag{5.1}$$

где

$$T_{ij}=Z_i^aZ_j^b\sigma_a^{AB'}\sigma_b^{CD'}T_{AB'CD'},$$

$$T_{AB'CD'}=ik(\xi_{D'}\nabla_{AB'}\xi_C+\xi_B\nabla_{CD'}\xi_A-\xi_C\nabla_{AB'}\xi_{D'}-\xi_A\nabla_{CD'}\xi_{B'}-$$
$$-\eta_{D'}\nabla_{AB'}\eta_C-\eta_B\nabla_{CD'}\eta_A-\eta_C\nabla_{AB'}\eta_{D'}-\eta_A\nabla_{CD''}\eta_{B'}),$$

$$Z_i^a=(l_i,n_i,m_i,\overline{m}_i),$$

∇_{AB} – спинорная производная, $\sigma_a^{AB'}$ – символы Инфельда – Ван дер Вардена.

В пространствах, для которых уравнение Дирака в (5.1) может быть проинтегрировано методом полного разделения переменных, уравнения Эйнштейна – Дирака можно представить как систему функциональных уравнений. Работа [29] была первой по классификационной задаче для уравнений Эйнштейна – Дирака. Были изучены штеккелевы пространства типа (3.1) для уравнений Эйнштейна – Дирака и Эйнштейна – Вейля и получены соответствующие решения. Они содержат произвольные функции, зависящие только от изотропной переменной.

Задача классификации штеккелевых пространств для других теорий гравитации впервые была изложена в работах [30-32]. Были рассмотрены следующие теории:

1. Теория Бранса – Дикке. Полевые уравнения имеют вид

$$R_{ij}-\frac{1}{2}g_{ij}R=\frac{8\pi}{\phi}T_{ij}-\frac{\omega}{\phi^2}(\phi_{;i}\phi_{;j}-\frac{1}{2}g_{ij}\phi_{;k}\phi^{;k})-\frac{1}{\phi}(\phi_{;ij}-g_{ij}\Box\phi), \tag{5.2}$$

$$\Box\phi=\frac{8\pi}{3+2\omega}T^i{}_i,\quad \Box=g^{ij}\nabla_i\nabla_j,\quad \omega=const.$$

Случай, когда T_{ij} имеет вид (2.10) и метрика имеет тип *(N.1)*, был рассмотрен в работе [30]. Были найдены все соответствующие решения.

2. Аналогичная задача для многоскалярно-тензорной теории со следующими полевыми уравнениями [31]:

$$\overset{*}{R}_{\nu\mu}=2<\phi_{,\nu}\phi_{,\mu}>+8\pi G(\overset{*}{T}_{\nu\mu}-\frac{1}{2}\overset{*}{g}_{\nu\mu}\overset{*}{T}), \tag{5.3}$$

$$\overset{*}{\Box}\phi^A+\gamma^A{}_{BC}\phi^A_{,\nu}\phi^B_{,\mu}\overset{*}{g}{}^{\nu\mu}=4\pi G\gamma^{AB}\frac{\partial\alpha}{\partial\phi^B}\overset{*}{T},$$

была в работе [32]. Здесь $\overset{*}{g}_{\mu\nu}$, $\overset{*}{R}_{\mu\nu}$ – метрический тензор и тензор Риччи конформного пространства-времени,

$$\overset{*}{g}_{\nu\mu} = \alpha^2 g_{\nu\mu}, \quad \alpha = \alpha(\phi^A),$$

$$<\phi_\nu \phi_\mu> = \gamma_{AB}\phi^A_{,\nu}\phi^B_{,\mu},$$

где ϕ^A – скалярные поля, $\gamma_{AB} = \gamma_{AB}(\phi^C)$ может быть рассмотрено как метрический тензор n-мерного пространства скаляров,

$$\gamma^C_{AB} = \frac{1}{2}\gamma^{CD}\left(\frac{\partial\gamma_{AD}}{\partial\phi^B} + \frac{\partial\gamma_{DB}}{\partial\phi^A} - \frac{\partial\gamma_{AB}}{\partial\phi^D}\right),$$

$$\overset{*}{\Box}\phi^A \equiv \left(\sqrt{|\overset{*}{g}|}\,\overset{*}{g}{}^{\nu\mu}\phi^A_{,\nu}\right)_{,\mu} / \sqrt{|\overset{*}{g}|}.$$

3. Классификационная задача для уравнений Эйнштейна – Вадья. Пусть тензор энергии-импульса имеет вид

$$T_{ij} = T^{(e)}_{ij} + a(x)l_i l_j, \quad l_i l^i = 0. \tag{5.4}$$

Тогда уравнения Эйнштейна могут быть записаны следующим образом:

$$R_{ij} - \frac{1}{2}g_{ij}R = 8\pi G(T^{(e)}_{ij} + al_i l_j). \tag{5.5}$$

Если $T^{(e)}_{ij}$ имеет вид (2.11) и $F_{ij\,j}$ удовлетворяет уравнениям Максвелла (2.12), решения уравнений (5.5), (2.12) являются электровакуумными. Для этих уравнений классификационная задача для полных наборов типа (N.1) (изотропные пространства) была решена в работе [28]. Другими словами, были найдены все метрики изотропных штеккелевых пространств и электромагнитные потенциалы, удовлетворяющие уравнениям (5.5) и (2.11) – (2.12), для которых возможно полное разделение переменных в уравнении Гамильтона–Якоби (1.1) или (2.8).

6. Конформно-штеккелевы пространства

Рассмотрим уравнение Гамильтона – Якоби для безмассовой частицы

$$g^{ij}S_{,i}S_{,j} = 0. \tag{6.1}$$

Очевидно, это уравнение допускает полное разделение переменных в штеккелевом пространстве. Можно проверить, что если g^{ij} имеет вид

$$g_{ij} = \tilde{g}_{ij}(x)\exp 2\omega(x), \tag{6.2}$$

где $\tilde{g}_{ij}$ – метрический тензор штеккелева пространства, тогда уравнение (6.1) также может быть решено методом полного разделения переменных. В работе [5] было доказано, что (6.2) является необходимым и достаточным условием полного разделения переменных в (6.1). Заметим, что конформно-штеккелевы пространства играют важную роль при рассмотрении безмассовых квантовых уравнений (например, конформно-инвариантного уравнения Черникова – Пенроуза, уравнения Вейля и т.д.). Поэтому задача исследования пространств Эйнштейна, допускающих полное разделение переменных в уравнении (6.1), исключительно интересна. Первая попытка решения этой задачи была сделана в работе [34]. Следующий шаг был сделан в работе [35], где были изучены некоторые метрики конформно-штеккелевых пространств типа (N.1).

Задача классификации конформно-штеккелевых пространств, удовлетворяющих уравнениям Эйнштейна

$$R_{ij} = \Lambda g_{ij}, \quad \Lambda = const, \tag{6.3}$$

более трудна, чем соответствующая задача для штеккелевых пространств. Для получения функциональных уравнений из уравнения (6.3) нужно использовать условия совместности. Эти условия были найдены Бринкманом [33].

Приведем результаты Бринкмана. Пусть V_n – риманово пространство с метрическим тензором $g_{\alpha\beta}$, $\tilde{V}_n$ – риманово пространство с метрическим тензором $\tilde{g}_{\alpha\beta}$. $\tilde{R}_{\alpha\beta}, \tilde{R}_{\alpha\beta\gamma\delta}, \tilde{R}$ – компоненты тензора Риччи, тензора Римана и скалярная кривизна пространства $\widetilde{V}_n$, а $R_{\alpha\beta}$, $R_{\alpha\beta\gamma\delta}$, R – то же для пространства V_n. Кроме того, мы обозначим

$$\omega_{\alpha\beta} = \omega_{,\alpha;\beta} - \omega_{,\alpha}\omega_{,\beta} + \frac{1}{2}g_{\alpha\beta}(\nabla\omega)^2, \quad (\nabla\omega)^2 = g^{\alpha\beta}\nabla_\alpha(\omega)\nabla_\beta(\omega),$$

$$T_{\alpha\beta} = \frac{1}{n-2}\left(R_{\alpha\beta} - \frac{Rg_{\alpha\beta}}{2(n-1)}\right), \quad W = \frac{1}{2}(\nabla\omega)^2 - \frac{\Lambda}{2(n-1)}\exp(2\omega),$$

где $\omega_{,\alpha}$ – частные производные, а $\omega_{;\alpha} \equiv \nabla_\alpha\omega$ – ковариантные производные в V_n. Легко показать, что

$$\widetilde{R}_{\alpha\beta} = R_{\alpha\beta} + (n-2)\omega_{\alpha\beta} + g_{\alpha\beta}g^{\gamma\delta}\omega_{\gamma\delta}, \quad \widetilde{R} = (R + 2(n-1)g^{\gamma\delta}\omega_{\gamma\delta})\exp(-2\omega).$$

Мы можем записать (6.3) как

$$\omega_{,\alpha;\beta} - \omega_{,\alpha}\omega_{,\beta} + Wg_{\alpha\beta} + T_{\alpha\beta} = 0. \tag{6.4}$$

Бринкман показал, что условия интегрирования уравнения (6.4) имеют вид

$$\omega_{,\delta}C^{\delta}{}_{\alpha\beta\gamma} = S_{\alpha\beta\gamma}, \tag{6.5}$$

$$S_{\alpha\beta\gamma} \equiv T_{\alpha\gamma;\beta} - T_{\alpha\beta;\gamma},$$

где $C_{\alpha\beta\gamma\delta}$ – компоненты тензора Вейля.

В работе [35] уравнения (6.5) были представлены в более простой форме. Чтобы упростить их, мы используем следствие из тождеств Бианки

$$R^{\sigma}{}_{\alpha\beta\gamma;\sigma} = R_{\alpha\beta;\gamma} - R_{\alpha\gamma;\beta}. \tag{6.7}$$

Можно представить правую часть уравнения (6.7) в виде

$$\begin{aligned} R_{\alpha\beta;\gamma} - R_{\alpha\gamma;\beta} &= (n-2)\left[\left(T_{\alpha\beta} + \frac{Rg_{\alpha\beta}}{2(n-1)(n-2)}\right)_{;\gamma} - \left(T_{\alpha\gamma} + \frac{Rg_{\alpha\gamma}}{2(n-1)(n-2)}\right)_{;\beta}\right] = \\ &= (n-2)(T_{\alpha\beta;\gamma} - T_{\alpha\gamma;\beta} + \frac{g_{\alpha\beta}R_{,\gamma} - g_{\alpha\gamma}R_{,\beta}}{2(n-1)(n-2)}) = (n-2)\left(-S_{\alpha\beta\gamma} + \frac{g_{\alpha\beta}R_{,\gamma} - g_{\alpha\gamma}R_{,\beta}}{2(n-1)(n-2)}\right). \end{aligned} \tag{6.8}$$

Из (6.8) следует, что

$$R^{\sigma}{}_{\alpha\beta\gamma;\sigma} = -(n-2)S_{\alpha\beta\gamma} - \frac{1}{2(n-1)}(R_{,\gamma}g_{\alpha\beta} - R_{,\beta}g_{\alpha\gamma}). \tag{6.9}$$

Кроме того,

$$T^{\alpha}{}_{\beta;\alpha} = \frac{1}{2(n-1)}R_{,\beta}. \tag{6.10}$$

В терминах $T_{\alpha\beta}$ тензор Вейля можно записать следующим образом:

$$C_{\alpha\beta\gamma\delta} = R_{\alpha\beta\gamma\delta} + g_{\alpha\gamma}T_{\beta\delta} - g_{\alpha\delta}T_{\beta\gamma} + g_{\beta\delta}T_{\alpha\gamma} - g_{\beta\gamma}T_{\alpha\delta}. \tag{6.11}$$

Тогда

$$C^{\alpha}{}_{\beta\gamma\delta;\alpha} = R^{\alpha}{}_{\beta\gamma\delta;\alpha} + T_{\beta\delta;\gamma} - T_{\beta\gamma;\delta} + g_{\beta\delta}T^{\alpha}_{\gamma;\alpha} - g_{\beta\gamma}T^{\alpha}_{\delta;\alpha}. \tag{6.12}$$

Используя уравнения (6.5) и (6.10), можно вывести из (6.12) следующее соотношение:

$$C^{\alpha}{}_{\beta\gamma\delta;\alpha} = R^{\alpha}{}_{\beta\gamma\delta;\alpha} + S_{\beta\gamma\delta} - \frac{1}{2(n-1)}(g_{\beta\gamma}R_{,\delta} - g_{\beta\delta}R_{,\gamma}). \tag{6.13}$$

Это приводит к выражению

$$C^{\delta}{}_{\alpha\beta\gamma;\delta} = -(n-3)S_{\alpha\beta\gamma}. \tag{6.14}$$

Теперь условия Бринкмана могут быть записаны как

$$\omega_{,\delta} C^{\delta}{}_{\alpha\beta\gamma} = -\frac{1}{(n-3)} C^{\delta}{}_{\alpha\beta\gamma;\delta},$$

или окончательно

$$\nabla_{\delta}\left(C^{\delta}{}_{\alpha\beta\gamma} \exp(n-3)\omega\right) = 0. \qquad (6.15)$$

Если размерность пространства V_n равна 4, уравнение (6.15) имеет вид

$$\nabla_{\delta}\left(C^{\delta}{}_{\alpha\beta\gamma} \exp \omega\right) = 0. \qquad (6.16)$$

Используя (6.16), можно доказать следующую теорему [35].

Теорема 8. *Пусть g_{ij} – метрический тензор штеккелева пространства типа (N.1). Тогда пространство Эйнштейна, конформное $\tilde{V}_4$, допускает те же векторы Киллинга, что и V_4.*

Кроме того, можно доказать следующее утверждение.

Теорема 9. *Пусть $\tilde{V}_n$ – конформно-штеккелево пространство типа (N.1) ($N \geq 2$), удовлетворяющее уравнению Эйнштейна (6.3). Тогда уравнение Гамильтона – Якоби (1.1) допускает полное разделение переменных.*

Другими словами, все изотропные конформно-штеккелевы пространства Эйнштейна принадлежат к классу изотропных штеккелевых пространств. Нетривиальные изотропные конформно-штеккелевы решения уравнений Эйнштейна принадлежат только типу (1.1).

7. Однородные штеккелевы пространства

Как известно, для космологии представляют особенный интерес пространственно-однородные модели, которые допускают 3-параметрические транзитивные группы движения с пространственноподобными орбитами. С другой, стороны уравнения Гамильтона – Якоби интегрируются методом полного разделения переменных в случае, если существуют первые интегралы, линейные или квадратичные по импульсам $Y_p = Y_p{}^i p_i$, $X_v = X_v{}^{ij} p_i p_j$, где Y^i – векторы Киллинга, а X^{ij} – тензоры Киллинга. Т.е. пространство должно допускать группу движений.

Тогда возникает задача о нахождении класса однородных пространств, допускающих полное разделение переменных в уравнении Гамильтона – Якоби пробной частицы. Другими словами, необходимо найти все штеккелевы пространства, допускающие 3-параметрическую транзитивную группу движений с пространственноподобными орбитами.

Как известно, для 4-мерного пространства-времени существует семь типов полных наборов с сигнатурой (–, +, +, +). В наших работах [36, 37] проведена классификация однородных штеккелевых пространств типа (3.1).

Рассмотрим штеккелево пространство типа (2.1). Метрика этого пространства в привилегированной системе координат может быть записана в виде (сигнатура (–, +, +, +))

$$g^{ij} = \frac{1}{\Delta}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & f(x^1) & 1 \\ 0 & f(x^1) & c(x^0, x^1) & b(x^0) \\ 0 & 1 & b(x^0) & a(x^0) \end{pmatrix}, \qquad (7.1)$$

где $\Delta = d_0(x^0) + d_1(x^1)$, $c = c_0(x^0) + c_1(x^1)$,

$$\det g^{ij} = -\frac{D}{\Delta^4}, \quad D = af^2 - 2bf + c > 0.$$

Полный набор типа (2.1) включает следующие векторы Киллинга:

$$X_1 = (0,0,0,1), \quad X_2 = (0,0,1,0). \qquad (7.2)$$

Вектор X_2 является пространственноподобным, т. к. $D > 0$; но ограничение метрики на орбиты подгруппы X_1, X_2 вырождено. Это общее свойство штеккелевых пространств типа $N_0 \neq 0$, которые называют изотропным. Таким образом, необходимо существование двух дополнительных векторов Киллинга – X_3 и X_4.

Коммутационные соотношения могут быть записаны в виде

$$
\begin{aligned}
&[X_1, X_2] = 0;\\
&[X_1, X_a] = \alpha_a X_1 + \beta_a{}^b X_b, \quad a,b = 3,4;\\
&[X_2, X_a] = \gamma_a^2 X_2 + \gamma_a{}^b X_b;\\
&[X_3, X_4] = \gamma_5 X_3 + \gamma_6 X_4 + \gamma_7 X_2.
\end{aligned} \tag{7.3}
$$

Векторы допускают следующие преобразования:

$$\widetilde{X}_\alpha = S_\alpha{}^\beta X_\beta, \quad \alpha, \beta = 2,..,4\,. \tag{7.4}$$

Кроме того, существуют преобразования координат, сохраняющие тип метрики

$$
\begin{aligned}
&\widetilde{x}^p = \alpha^p x^p, \quad p,q = 0,1;\\
&\widetilde{x}^\nu = \alpha^\nu + \beta_\mu{}^\nu (x^p) x^\mu, \quad \mu,\nu = 2,3.
\end{aligned} \tag{7.5}
$$

Применяя допустимые преобразования и используя тождества Якоби, можно проинтегрировать коммутационные соотношения и уравнения Киллинга. Одним из результатов классификации является следующее утверждение.

Теорема 10. *Однородные штеккелевы пространства типа (2.1) имеют либо тип III по Петрову, либо тип N. В обоих случаях скалярная кривизна является постоянной. Данные пространства не могут иметь тип VIII или тип IX по Бианки.*

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Stäckel P. / P. Stäckel // Math. Ann. – 1893. – V.42. – P.537.
2. Levi-Civita T. / T.Levi-Civita // Math. Ann. – 1908. – V.66. – P.398.
3. Яров-Яровой М.С. / М.С.Яров-Яровой // Прикладная математика и механика. – 1963. – Т.27. – № 6. – С.973.
4. Шаповалов В.Н. / В.Н.Шаповалов // Сибирский математический журнал. – 1979. – Т.20. –С.1117.
5. Шаповалов В.Н. / В.Н.Шаповалов // Известия вузов. Физика. – 1978. – Т. 21. – № 9. – С.18.
6. Kalnins E.G. / E.G.Kalnins, Jr.W.J.Miller // Math. Phys. – 1986. – V.27. – P.1721.
7. Benenti S. / S.Benenti // Reports Math. Phys. – 1977. – V. 12. – № 3. – P. 311.
8. Eisenhart L.P. / L.P.Eisenhart // Phys. Rev. – 1934. – V.45. – P.427.
9. Багров В. Г. / В.Г.Багров, В.В.Обухов // Теоретическая и математическая физика. – 1992. –Т.97. – № 2. – С.250.
10. Benenti S. / S.Benenti, M.Francaviglia // Gen. Relat. Gravit. – 1979. – V. 10. – P. 79.
11. Carter G. / G.Carter // Comm. Math. Phys. – 1968. – V.10. – P.280.
12. Багров В. Г. / В.Г.Багров, В.В.Обухов // Известия вузов. Физика. – 1981. – Т.24. – № 12. – С.33.; – 1982. – Т.25. – № 4. – С.113.
13. Bagrov V.G. / V.G.Bagrov, V.V.Obukhov // Ann. der Phys. – 1983. – B.40. – №915. – S.81.
14. Bagrov V.G. / V.G.Bagrov, V.V.Obukhov, A.V.Shapovalov // Pramana – J. Phys. – 1986. – V.26. – № 2. – P.93.
15. Шаповалов В.Н. / В.Н.Шаповалов // Дифференциальные уравнения. – 1980. – Т.16. – № 10. – С.1864.
16. Bagrov V.G. / V.G.Bagrov, V.V.Obukhov // Class. Quant. Grav. –1990. – V.7. – P.19.
17. Brill D.R. / D.R.Brill, J.A.Wheeler // Rev. Mod. Phys. – 1957. – V.29. – P.456.
18. Teukolsky S. / S.Teukolsky // Astrophys. J. – 1973. – V.185. – P.635.
19. Chandrasekhar S. / S.Chandrasekhar // Proc. R. Soc. A. – 1976. – V.349. – P.571.
20. Page D.N. / D.N.Page // Phys. Rev. D. –1976. – V.14. – P.1509.
21. Iyer B.R. / B.R.Iyer, C.V.Vishveshwara // J. Math. Phys. – 1985. – V.36. – P.1034.
22. Bagrov V.G. / V.G.Bagrov, V.V.Obukhov // Int. J. Mod. Phys. D. – 1985. – V.3. – P.739.
23. Bagrov V.G. / V.G.Bagrov, A.V.Shapovalov, A.A.Evsejevich // Class. Quant.Grav. – 1990. – V.7. – P.517.
24. Newman E.T. / E.T.Newman, R.Penrose // J. Math. Phys. – 1962. – V.3. – P.566.
25. Chandrasekhar S. The Math. Theory of Black Holes. / S.Chandrasekhar – Oxford Univ. Press. New York, 1983.
26. Шаповалов В.Н. / В.Н.Шаповалов // Известия вузов. Физика. – 1975.– Т.18. – № 6. – С.57.
27. Bagrov V.G. / V.G.Bagrov, V.V.Obukhov // J. Math. Phys. – 1992. – V.33. – P.2279.
28. Bagrov V.G. / V.G.Bagrov, V.V.Obukhov, K.E.Osetrin // Gen. Relat. Gravit. – 1988. – V.20. – P.1141.
29. Багров В. Г. / В.Г.Багров, В.В.Обухов, А.Г.Сахапов // Известия вузов. Физика. – 1992 – Т.35. – № 2. – С. 116.; –1992 – Т.35. – № 6. – С.31.; – 1996 – Т.39. – № 2. – С.20.; –1997 – Т.40. – № 2. – С.3.;
30. Bagrov V.G. / V.G.Bagrov, V.V.Obukhov, A.G.Sakhapov // J. Math. Phys. – 1996. – V.37. – P.5599.
31. Багров В. Г. / В.Г.Багров, В.В.Обухов // Известия вузов. Физика. – 1992. – Т.35. – № 1. – С.86.
32. Damour T. / T.Damour, K.Nordtvedt // Phys. Rev. D. – 1993. – V.48. – P.3436.
33. Багров В. Г. / В.Г.Багров, В.В.Обухов // Известия вузов. Физика. – 1995. – Т.38. – № 2. – С.79.
34. Brinkman H.W. / H.W.Brinkman // Ann. Math. – 1924. – V.91.

35. Обухов В.В. *Классы точных решений уравнений Эйнштейна* / В.В.Обухов – Канд. дисс. МГУ, 1979.
36. Bagrov V.C. / V.G.Bagrov, V.V.Obukhov, K.E.Osetrin // Proceedings of the Second A. Friedman Int. Seminar on Gravity and Cosmology. St.Peterb. –1994. – P.64 –72.
37. Bagrov V.G. Stäckel *spacetimes with additional symmetries* / V.G.Bagrov, V.V.Obukhov, K.E.Osetrin, A.E.Filippov // Grav. & Cosmol. – 1990. –V.5. – P.10.
38. Obukhov V.V. *Metrics of homogeneous spacetimes with complete sets of the (3.1) type* / V.V.Obukhov, K.E.Osetrin, A.E.Filippov // Известия вузов. Физика. – 2002. – Т.1. – С.42.

ON INTEGRATION PROBLEM OF MATHEMATICAL PHYSICS' EQUATIONS IN CURVED SPACE-TIME

V.G.Bagrov, V.V.Obukhov, K.E.Osetrin

The problem of the complete variables separation in the Hamilton – Jacobi equation, and also for the Klein – Fok – Gordon and the Dirac – Fok – Ivanenko equations is investigated. The integration of the Einstein equations for Stäckel's spaces and conformal Stäckel's spaces is considered.

СТО
1905 *2005*

УДК 530.12: 531.51

О ГЕНЕРИРОВАНИИ СФЕРИЧЕСКИ СИММЕТРИЧНЫХ СТАТИЧЕСКИХ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЙ ТЯГОТЕНИЯ И ИЗМЕНЕНИИ АЛГЕБРАИЧЕСКОГО ТИПА ГРАВИТАЦИОННОГО ПОЛЯ

А.М.Баранов, Н.Н.Паклин[1]

Рассмотрен случай статического сферически симметричного распределения идеальной жидкости. Представлены преобразования метрических коэффициентов в координатах кривизн, приводящие уравнения Эйнштейна к линейному виду. Предложена процедура получения семейств точных решений. Показана возможность нахождения точных решений из известных решений. Линейность уравнения допускает обобщение частных решений на решения с новыми физическими свойствами.

Опыт исследования нелинейных, в общем случае, уравнений Эйнштейна показывает, что наибольший интерес представляют методы получения точных решений из уже известных решений. Тем более интересны случаи, когда уравнения Эйнштейна удается преобразовать к линейному виду, т.к. знание частных решений оказывается полезным при получении общего решения линейного уравнения.

Статическое сферически симметричное распределение вещества формирует гравитационное поле с такой же симметрией. Это гравитационное поле принято описывать в терминах метрических коэффициентов первой квадратичной формы (метрики), которую мы выберем в следующем виде (в координатах кривизн):

$$ds^2 = g_{00}c^2dt^2 + g_{11}dr^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\varphi^2), \tag{1}$$

где $g_{00} = a(r)$, $g_{11} = -b(r)$; t, r, θ, φ – время, радиальная и угловые переменные; c – скорость света.

Вещество будем описывать тензором энергии-импульса идеальной жидкости

$$T_{ik} = (\mu + p)u_iu_k - pg_{ik}, \tag{2}$$

где $\mu(r)$ – плотность энергии; $p(r)$ – давление; u_i – 4-скорость; g_{ik} – метрический тензор, соответствующий (1). Индексы i, k пробегают значения 0, 1, 2, 3.

Уравнения Эйнштейна

[1] © А.М.Баранов, Н.Н.Паклин, Красноярский государственный университет, 2005; E-mail: bam@lan.krasu.ru , paklin@lan.krasu.ru