

ЛИНЕЙНЫЕ РАЗНОСТНЫЕ УРАВНЕНИЯ С МАТРИЧНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ¹

Е.К.Лейнартас*

Для однородного линейного разностного уравнения с матричными коэффициентами сформулирована задача Коши и получена формула для ее решения, использующая понятие фундаментального решения.

Обозначим через $\mathbb{Z}$ — множество целых чисел и $\mathbb{Z}^n = \mathbb{Z} \times \dots \times \mathbb{Z}$ — n -мерную целочисленную решетку. Пусть $\mathbb{Z}_+^n$ — подмножество этой решетки, состоящее из точек с целыми неотрицательными координатами и $A = \{\alpha\} \subset \mathbb{Z}_+^n$ — некоторое фиксированное конечное множество таких точек. Пусть $\mathbb{C}_{d \times r}$ — множество матриц с комплексными элементами размера $d \times r$.

Линейным разностным уравнением (относительно неизвестной функции $f : \mathbb{Z}_+^n \rightarrow \mathbb{C}_{d \times r}$) назовем соотношение вида

$$\sum_{\alpha \in A} c_\alpha f(x + \alpha) = 0, \quad x \in \mathbb{Z}_+^n, \quad (1)$$

где $c_\alpha \in \mathbb{C}_{d \times d}$ — коэффициенты уравнения.

В работе [2] в терминах "амебы" (определения и свойства см. в [4]) многогранника Ньютона характеристического многочлена получено описание пространства решений уравнения (1). В данной работе определяются множества $\mathbb{Z}_m^n$ точек в $\mathbb{Z}^n$, на которых можно задавать начальные данные, доказывается существование и единственность решения (теорема 1) и указана формула для решения уравнения (1), удовлетворяющего этим данным (теорема 2).

Характеристическим многочленом для разностного уравнения (1) назовем многочлен $\sum_{\alpha \in A} c_\alpha z^\alpha =: P(z)$ с матричными коэффициентами c_α , где $z^\alpha = z_1^{\alpha_1} \dots z_n^{\alpha_n}$, а $z = (z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n$ — n -мерному комплексному пространству.

Многогранником Ньютона N_P характеристического многочлена $P(z)$ называется выпуклая оболочка в $\mathbb{R}^n$ элементов множества A .

Фиксируем $m \in N_P \cap \mathbb{Z}^n$ и обозначим $\mathbb{Z}_{m_j}^n = \{y \in \mathbb{Z}^n : 0 \leq y_j < m_j\}$. Далее $\cup_{j=1}^n \mathbb{Z}_{m_j}^n =: \mathbb{Z}_m^n$ и пусть $\phi : \mathbb{Z}_m^n \rightarrow \mathbb{C}_{d \times r}$ — заданная функция.

Сформулируем задачу: найти решение уравнения (1), совпадающее на $\mathbb{Z}_m^n$ с заданной функцией $\phi(x)$:

$$f(x) = \phi(x), \quad x \in \mathbb{Z}_m^n. \quad (2)$$

Отметим, что не для всякого $m \in \mathbb{Z}^n \cap N_P$ задача (1)–(2) будет иметь единственное решение. Так, для $d = r = n = 1$ это будет только при $m = \deg P$. Действительно, в одномерном случае известно (см., например, [1]), что всякое решение является линейной комбинацией решений вида $x^s z^x$, $s = 0, \dots, k-1$, где z — корень характеристического уравнения $P(z) = 0$ кратности k , поэтому оно полностью определяется своими значениями в точках $x = 0, 1, \dots, m-1$. Если $n = 2$ и $d = r$, то можно в качестве примера привести уравнение $Ef(x_1 + 2, x_2) + Ef(x_1, x_2 + 2) = 0$, у которого $P(z) = Ez_1^2 + Ez_2^2$, $N_P \cap \mathbb{Z}^2 = \{(2; 0), (1; 1), (0; 2)\}$ (здесь E — единичная матрица, $E \in \mathbb{C}_{d \times d}$). Для $m = (1, 1)$ и начальных данных $f(x_1, 0) = f(0, x_2) = 0$ имеется решение задачи (1)–(2), неравное тождественно нулю в $\mathbb{Z}_+^n$:

$$f(x_1, x_2) = \begin{cases} E, & \text{если } x_1 = x_2 = 1 \\ 0, & \text{для остальных } (x_1, x_2). \end{cases}$$

В случае $d = 1$ условия на точку $m \in N_P \cap \mathbb{Z}^n$, обеспечивающие существование и единственность решения задачи (1)–(2), приведены в [11]. В наших обозначениях это условие следующее: m — вершина многогранника N_P и $(m + \mathbb{R}_+^n) \cap N_P = \{m\}$.

Обозначим $\delta_0(x) : \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{C}_{d \times d}$ функцию, обладающую свойством

$$\delta_0(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \neq 0 \\ E, & \text{если } x = 0, \end{cases}$$

¹Работа поддержана грантом Президента для ведущих научных школ НШ-1212.2003.1.

* © Е.К.Лейнартас, Красноярский государственный университет, 2005.

и назовем функцию $\mathcal{P} : \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{C}_{d \times d}$ фундаментальным решением, если $\sum_{\alpha \in A} c_\alpha \mathcal{P}(x + \alpha) = \sum_{\alpha \in A} \mathcal{P}(x + \alpha) c_\alpha = \delta_0(x)$.

Если известно фундаментальное решение $\mathcal{P}$, то решение уравнения $\sum_{\alpha \in A} c_\alpha f(x + \alpha) = \mu(x)$ можно найти по формуле $f(x) = \sum_y \mathcal{P}(x - y) \mu(y)$, в правой части которой сумма, вообще говоря, бесконечная, следовательно, возникает вопрос о сходимости ряда (см., например, [3], [5], [8]).

Далее рассмотрим задачу (1)–(2) в случае, когда $m \in N_P \cap \mathbb{Z}^n$ — вершина многогранника Ньютона ($c_m \neq 0$) и $\det c_m \neq 0$. Более того, пусть m удовлетворяет одному из двух условий:

$$m_1 = \dots = m_{j-1} = m_{j+1} = \dots = m_n = 0$$

$$\text{и для всех } \alpha \in N_P \cap \mathbb{Z}^n, \alpha \neq m, \text{ справедливо неравенство } m_j > \alpha_j, \quad (3)$$

$$m_j \geq \alpha_j, j = 1, 2, \dots, n \text{ для всех } \alpha \in N_P \cap \mathbb{Z}^n, \quad (4)$$

Предложение 1. Если вершина m многогранника Ньютона удовлетворяет условиям (3) или (4), то задача (1)–(2) имеет единственное решение.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как $\det c_m \neq 0$, то можно считать $c_m = E$ и из уравнения (1) найти $f(x + m) = \sum_{\alpha \neq m} (-c_\alpha) f(x + \alpha)$. Положим $x = 0$, из (3) и (4) следует, что $\alpha \in \mathbb{Z}_m^n$, поэтому значение f в точке m выражается через "начальные данные" $\phi(\alpha)$. Рассмотрим случай (3), и пусть для определенности $m = (m_1, 0, \dots, 0)$. Пусть далее $x = (0, x_2, \dots, x_n)$ — произвольное. Так как $x + \alpha \in \mathbb{Z}_m^n$, то значение f в точках $x + m$ также выражается через "начальные" данные. Тем самым мы определили f на множестве $\mathbb{Z}_{m+e_1}^n$, где $e_1 = (1, 0, \dots, 0)$. Индукцией по $k = 0, 1, \dots$ можно найти значения f на множестве $\mathbb{Z}_{m+ke_1}^n$ для любого k .

В случае (4) обозначим $k = \|x\| = x_1 + \dots + x_n$ и предположим, что значение f вычислено для всех $x + m$, таких, что $\|x\| < k$. Пусть теперь $\|x\| = k$, так как $\|x + \alpha\| = \|x\| + \|\alpha\| = k + \|\alpha\| < k + \|m\|$ для $\alpha \neq m$, то значение функции f в точках $x + m$, $\|x\| = k$ выражается через "начальные" данные.

Обозначим $\text{Supp } \mathcal{P} = \{x \in \mathbb{Z}^n : \mathcal{P}(x) \neq 0\}$.

Лемма. Пусть m — вершина многогранника Ньютона N_P , такая, что $c_m = E$. Тогда существует фундаментальное решение $\mathcal{P}_m(x)$, такое, что $\text{Supp } \mathcal{P}_m \subset m + K_m$, где K_m — конус, построенный на векторах $m - \alpha$, $\alpha \in N_P \cap \mathbb{Z}^n$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $P(z) = Ez^m + \sum_{\alpha \neq m} c_\alpha z^\alpha$ — характеристический многочлен. Определим $P^{-1}(z) := \frac{1}{z^m} \sum_{k=0}^{\infty} ((-c_\alpha) \frac{1}{z^{m-\alpha}})^k$. Непосредственно проверяется, что $P(z)P^{-1}(z) = P^{-1}(z)P(z) = E$, это и оправдывает обозначение $P^{-1}(z)$. С другой стороны, если в правой части формулы для $P^{-1}(z)$ раскрыть скобки и произвести группировку по степеням z^x , то получим выражение вида $P^{-1}(z) = \sum_{x \in \mathbb{Z}^n} \frac{\mathcal{P}_m(x)}{z^x}$, где $\text{Supp } \mathcal{P}_m \subset m + K_m$.

Отметим, что поскольку конус K_m заостренный, то $\mathcal{P}_m(x)$ является конечной комбинацией степеней матриц c_α .

Из тождеств $P(x) \cdot \sum_{x \in \mathbb{Z}^n} \mathcal{P}_m(x)/z^x = \sum_{x \in \mathbb{Z}^n} (\sum_{\alpha \in A} c_\alpha \mathcal{P}_m(x + \alpha))/z^x = E$ и $\sum_{x \in \mathbb{Z}^n} \mathcal{P}_m(x)/z^x \cdot P(x) = \sum_{x \in \mathbb{Z}^n} (\sum_{\alpha \in A} \mathcal{P}_m(x + \alpha) c_\alpha)/z^x = E$ следует, что $\mathcal{P}_m(x)$ — искомое фундаментальное решение.

Продолжим матричную функцию ϕ на $\mathbb{Z}^n$:

$$\tilde{\phi}(x) = \begin{cases} \phi(x), & \text{если } x \in \mathbb{Z}_m^n \\ 0, & \text{если } x \notin \mathbb{Z}_m^n \end{cases} \quad (5)$$

и определим $\mu : \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{C}_{d \times r}$ следующим образом:

$$\mu(x) = \sum_{\alpha \in A} c_\alpha \tilde{\phi}(x + \alpha), x \in \mathbb{Z}^n. \quad (6)$$

Обозначим $S = \{x \in \mathbb{Z}^n : \text{существует } \alpha \in A \text{ такое, что } x + \alpha \in \mathbb{Z}_m^n\}$ и $S_+ = S \cap \mathbb{Z}_+^n$, а $S_- = S \setminus S_+$. Наконец, определим $\tilde{\mu} : \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{C}_{d \times r}$ следующим образом:

$$\tilde{\mu}(x) = \begin{cases} \mu(x), & x \in S_- \\ 0, & x \notin S_- \end{cases} \quad (7)$$

Отметим, что $\tilde{\mu}(x) = 0$ для $x \in \mathbb{Z}_+^n$.

Теорема 1. Пусть t — вершина многогранника Ньютона N_P , удовлетворяющая условиям (3) или (4), $\mathcal{P}_m(x)$ — соответствующее вершине t фундаментальное решение и $\tilde{\mu} : \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{C}_{d \times r}$ построено по начальным данным по формулам (5), (6) тогда

$$f(x) = \sum_{y \in \mathbb{Z}^n} \mathcal{P}_m(x - y) \tilde{\mu}(y), x \in \mathbb{Z}_+^n \quad (8)$$

— решение задачи (1)–(2).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Покажем прежде всего, что сумма в (7) конечная. С учетом (6) и леммы достаточно показать, что для любого $x \in \mathbb{Z}_+^n$ уравнение $y + \nu = x$ имеет конечное число решений (y, ν) , где $y \in S_-$, а $\nu \in t + K_m$.

По определению множества S_- найдется $\alpha_0 \in A$, такое, что $y + \alpha_0 \in \mathbb{Z}_m^n \subset \mathbb{Z}_+^n$, но тогда $y + \nu = (y + \alpha_0) + (t - \alpha_0) + \nu'$, где $\nu' \in K_m$. Это означает, что $y + \nu$ является линейной комбинацией с неотрицательными коэффициентами векторов $e_1, \dots, e_n, t - \alpha, \alpha \in A$. Так как конус, построенный на этих векторах, заостренный, то число представлений любого вектора x в виде линейной комбинации этих векторов конечно (см., например, [6]).

Матрица f , определенная формулой (7), является (для $x \in \mathbb{Z}_+^n$) решением уравнения (1) в силу определения $\mathcal{P}$ и в силу (6).

Пусть теперь $x \in \mathbb{Z}_m^n$. Покажем, что f удовлетворяет "начальным" данным (2). Заметим прежде всего, что $S_+ \subset \mathbb{Z}_m^n$, а для $x, y \in \mathbb{Z}_m^n$ разность $x - y \notin t + K_m$. Так как по лемме $\text{Supp } \mathcal{P}_m \subset t + K_m$, то $\mathcal{P}(x - y) = 0$, поэтому суммирование в (7) можно проводить по $y \in S$:

$$f(x) = \sum_{y \in S} \mathcal{P}(x - y) \mu(y) = \sum_{y \in S} \mathcal{P}(x - y) \sum_{\alpha \in A} c_\alpha \tilde{\phi}(y + \alpha) = \sum_{\alpha \in A} \left(\sum_{y \in S} \mathcal{P}(x - (y + \alpha) + \alpha) c_\alpha \tilde{\phi}(y + \alpha) \right).$$

Меняя во внутренней сумме индекс суммирования $y + \alpha \rightarrow y$ и используя лемму, получим

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{\alpha \in A} \sum_y \mathcal{P}(x - y + \alpha) c_\alpha \tilde{\phi}(y) = \sum_y \left(\sum_{\alpha \in A} \mathcal{P}(x - y + \alpha) c_\alpha \right) \tilde{\phi}(y) = \\ &= \sum_y \delta_0(x - y) \tilde{\phi}(y) = \tilde{\phi}(x) = \phi(x). \end{aligned}$$

Замечание. В [9] для $d = r = 1$ и случая, когда вершина t удовлетворяет условию (3), доказана теорема 1 и получена интегральная формула решения задачи (1)–(2). В [10] для $d = r = 1$ и $n = 2$ в случае, когда вершина t удовлетворяет условию (4), доказана теорема 1 и найдено λ -преобразование $\sum_{x \in \mathbb{Z}_+^n} f(x)/x^{x+I}$ решения задачи (1)–(2).

Список литературы

- [1] ГЕЛЬФОНД А.О. *Исчисление конечных разностей* / А.О.Гельфонд. — М.: Гос. изд-во физ.-мат. лит., 1959. — 400 с.
- [2] ЛЕЙНАРТАС Е.К. *Кратные ряды Лорана и разностные уравнения* / Е.К.Лейнартас // Сиб. матем. журн. — 2004. — Т.45. — №2. — С. 387–393.
- [3] DUFFIN R. *Asymptotic expantions of double Fourier transforms* / R.Duffin, D.Shaffer // Duke Math. J. — 1960. — V. 27. — P. 581–596.
- [4] FORSBERG M. *Laurent Determinants and Arrangements of Hyperplane Amoebas* / M.Forsberg, M.Passare, A.Tsikh // Advances in Math. — 2000. — V. 151. — P. 45–70.
- [5] DUFFIN R. *Discrete potential theory* / R.Duffin // Duke Math. J. — 1953. — V. 20. — P. 233–251.
- [6] BRION M. *Residue formulae, vector partition functions and lattice points in rational polytopes* / M.Brion, M.Vergne // Journal of AMS. — 1997. — V. 10. — №4. — P. 797–833.
- [7] DE BOOR C. *Fundamental solutions of multivariate difference equations* / C.De Boor, K.Höllig, S.Riemenschneider S. // Journal of AMS. — 1989. — V. 111. — P. 403–415.

- [8] VERT J. *Fundamental solutions of multidimensional difference equations with periodical and matrix coefficients* / J.Vert // Aequationes Mathematicae. – 1995. – V. 49. – P. 47–56.
- [9] ЛЕЙНАРТАС Д.Е. *О задаче Коши для многомерного разностного уравнения с постоянными коэффициентами* / Д.Е.Лейнартас // Известия вузов. Матем. – 2002. – №1. – С. 79–80.
- [10] ЛЕЙНАРТАС Е.К. *Двумерные разностные уравнения в некоторых задачах комбинаторного анализа* / Е.К.Лейнартас, Я.О.Тесленко // Вестник Красноярского государственного университета. – 2004. – Вып. 1. – С. 121–123.
- [11] BOUSQUET-MÉLOU M., PETROVŠER M. *Linear recurrences with constant coefficients: the multivariate case* / M.Bousquet-Mélou, M.Petrovšer // Discrete Mathematics. – 2000. – V. 225. – P. 51–75.

LINEAR DIFFERENCE EQUATIONS WITH MATRIX COEFFICIENTS

E.K.Leinartas

For homogeneous linear difference equation with matrix coefficients it is formulated the Cauchy problem and it is obtained the formula for its solution using the definition of fundamental solution.